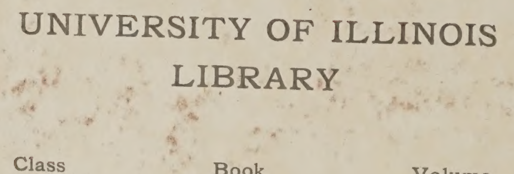






RIVISTA

DI

MATEMATICA

EDITA

DA

G. PEANO

Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

Volume III

TORINO

FRATELLI BOCCA

LIBRAI DI S. M.

1893

INDICE

	Pag.
Sulla raccolta di formule (LA REDAZIONE)	1
Pro veritate. Risposta alle « Osservazioni » del prof. Pascal (G. LORIA)	6
Corrispondenza (N. JADANZA)	15
Sullo stesso soggetto (Formule di quadratura) (G. PEANO) . .	17
Sulle equazioni di Lagrange per il moto di un punto (F. PORTA) .	18
Alcune proprietà delle accelerazioni d'ordine qualunque nel moto di una figura piana nel suo piano (F. CASTELLANO) . . .	23
Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio (G. PIRONDINI)	27
Recensione — Giovanni Biasi, *Elementi di Aritmetica e Algebra, esposti con metodo sintetico* (C. BURALI-FORTI) . . .	40
Sui sistemi lineari di coni (M. PIERI)	44
Sviluppo del determinante e relazioni notevoli che ne derivano (V. MOLLAME)	47
Considerazioni geometriche sul numero delle radici reali di un'equazione algebrica (S. PINCHERLE)	54
Sulla scoperta del potenziale (O. ZANOTTI-BIANCO)	56
Corrispondenza (G. A. MAGGI)	60
Recensioni — A. Nagy, *Principî di logica esposti secondo le teorie moderne* (G. VAILATI)	62
— X. Antomary, *Leçons de Cinématique et de Dynamique* (E. OVAZZA)	63
A proposito del postulato dell'equivalenza e di altre questioni geometriche (M. GREMIGNI)	64
Corrispondenza (G. BIASI)	74
Sulla raccolta di formule (C. BURALI-FORTI)	75
Sulla teoria delle grandezze id.	76
Sul concetto di condizione a cui devono soddisfare gli elementi di una figura nella Geometria elementare (S. CATANIA) . . .	101
Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche (G. LORIA)	105
Su un problema di geometria numerativa relativo alle congruenze lineari (V. MARTINETTI)	108
Sulle serie di potenze (G. VIVANTI)	111
Sulla scoperta del potenziale (O. ZANOTTI-BIANCO)	114
Recensioni — G. Lazzeri, *Trattato di Geometria analitica* (M. PIERI)	115
— S. Pincherle, *Algebra complementare* (F. GIUDICE) . . .	118
Sulla seconda edizione degli « Elementi di Euclide » (G. LAZZERI) .	121

Pag.
Su talune erronee « riflessioni » del prof. Arminio Nobile (E. Cesàro) 128
Rettificazione di alcune inavvertenze in un moderno trattato di geodesia (O. Zanotti-Bianco) 133
Recensioni — N. Jadanza, *Una difesa delle formole di Simpson, ed alcune formole di quadratura poco note* (P.) 137
— E. Carvallo, *Sur les forces centrales* (P.) 137
I numeri negativi (C. Burali-Forti) 138
Sull'equazione di 3° grado (F. Giudice) 146
La teoria di Maxwell dell'elettricità e della luce (A. Garbasso) . 149
Sugli insegnamenti di matematica superiore nelle Università italiane (E. Pascal) 170
Deduzione del postulato del segmento da quello dell'angolo (S. Sbrana) 179
Recensioni — M. Chini, *Esercizi di calcolo infinitesimale* (F. Castellano) 181
— G. Garbieri, *Teoria e applicazione dei determinanti* (F. Giudice) 183
— A. Ziwet, *An elementary treatise on theoretical mechanics* (P.) 184
Sul formulario di matematica 185
Lista bibliografica della teoria degli aggregati (G. Vivanti) . . 189

RIVISTA DI MATEMATICA
Vol. III. — 1893

Sulla raccolta di formule.

Al presente fascicolo va unito il 1° foglio della raccolta di formule e di teoremi di matematica, della quale raccolta si è già parlato nella *Rivista*, vol. II, in un supplemento al fascicolo 3°, a pag. 76 e 112.

Un buon numero di collaboratori si è già diviso il lavoro della raccolta e coordinazione delle varie parti del formulario.

I lettori, che troveranno aggiunte o correzioni da fare a queste formule, sono pregati di inviarle a chi si assunse la compilazione della parte a cui si riferisce l'aggiunta, o direttamente, o per mezzo della direzione della *Rivista*. Queste aggiunte verranno pubblicate col nome del proponente.

I varii capitoli del formulario si seguiranno man mano saranno pronti; e sono dati come supplemento alla *Rivista*.

La Redazione.

I.

La parte I contiene le formule di logica matematica; i §§ 1-4 contengono le formule già pubblicate nella *Rivista* (vol. I, pag. 24-31) colle correzioni ed aggiunte indicate a pag. 182-4. Le formule più importanti sono segnate con asterisco. Per schiarimenti su queste formule si veda il vol. I della *Rivista*. Si è aggiunto il § 5 contenente le proprietà delle funzioni o corrispondenze, perchè da un certo punto di vista esse appartengono più alla logica che alla matematica.

G. Vailati, *R. Università, Torino.*

II.

La parte II della *Raccolta* contiene le formule che si riferiscono alle operazioni algebriche. La numerazione in certi punti è interrotta e potrà essere completata dalle aggiunte che i lettori della *Rivista* vorranno fare. I segni delle operazioni sono quelli comunemente usati; i segni logici sono quelli adoperati negli articoli di *Logica* già pubblicati nella *Rivista*.

Le note storiche usciranno in un prossimo fascicolo.

F. Castellano, *Accademia Militare, Torino.*

Indice.

I. — Logica matematica.

§ 1. Deduzione, congiunzione.
§ 2. Negazione, disgiunzione.
§ 3. Assurdo.
§ 4. Classi.
§ 5. Funzioni.

II. — Operazioni Algebriche.

§ 1. Addizione e sottrazione.
§ 2. Moltiplicazione, divisione.
§ 3. Potenze.
§ 4. Identità.
§ 5. Disuguaglianze.
§ 6. Radici.
§ 7. Esponenti e logaritmi.
§ 8. Equazioni.

Spiegazione dei segni.

Il segno	$=$	significa	*è eguale* [I § 1, § 4 P 2].
»	$\supset$	»	*si deduce*, o, *è contenuto* [I § 1, § 4 P 1].
»	$\cap$	»	*e* (ed è generalmente sottinteso).
»	$\cup$	»	*o* [I § 2].
»	$-$	»	*non* [I § 2].
»	Λ	»	*assurdo* o *nulla* [I § 3].
»	V	»	*vero*. (Esso è usato, per ragioni di simmetria, solo in I § 3).
»	$\circ$		fra due proposizioni o classi, $a \circ b$, ha il significato del latino *aut*. (Esso è usato solo in I § 3, P 24-30).
»	ε	significa	*è, è un* [I § 4].
»	K	»	*classe*. Quindi Kq vale *classe di numeri reali* [I § 4].
»	ι	»	*eguale*. Quindi $\iota 0$ significa *eguale a 0*, o *nullo*.
»	$b \mid a$	»	*funzione*, o segno di operazione, che trasforma gli a in b [I § 5, P 1-2].
»	f	»	la funzione *inversa* della f [I § 5, P 21].
»	$(b \mid a)$sim	»	funzione *simile*, o corrispondenza univoca e reciproca degli a in b.
»	P	»	*proposizione*.
»	Pp	»	*proposizione primitiva*, che non si dimostra.
»	Hp	»	*ipotesi*.
»	Ts	»	*tesi*.
»	$\left(\frac{a}{b}\right)$		davanti ad una proposizione, indica ciò che essa diventa sostituendo b ad a.

Il segno	N	significa	*numero intero positivo.*
»	N_0	»	*numero intero positivo* o *nullo.*
»	n	»	*numero intero.*
»	Q	»	*numero reale positivo.*
»	Q_0	»	*numero reale positivo* o *nullo.*
»	q	»	*numero reale.*
»	q′	»	*numero immaginario* o *complesso* ordinario [II § 9].
»	mod a	»	*il valor assoluto di a,* o *il modulo di a* [II § 1 P 41, § 9 P 7].
»	$/a$	»	*il reciproco di a.* Quindi $b/a = b \times (/a) = \frac{b}{a}$.
»	Z_m	»	l'insieme dei numeri 1, 2, 3, ... m [II § 1 P 51].

» Z (p, q), ove p e q siano interi e $p < q$ rappresenta l'insieme degli interi $p, p+1, \ldots q-1, q$ [II § 1 P 56].

» $\sqrt[n]{{}^{*}a}$, ovvero $a^{*/n}$, rappresenta le n radici *algebriche* di a.

Nota. — Ecco alcuni esempi sul segno di funzione.

q/q	significa	*funzione reale di variabile reale.*
q/Q	»	*funzione reale di variabile positiva.*
q/u	ove $u \varepsilon$ Kq, significa	*funzione reale definita per tutti i valori della variabile appartenenti alla classe u.*
q/N	significa	*serie a termini reali.*
Q/N	»	*serie a termini positivi.*
q/Z_m	»	*successione di m quantità.*
(Z_m/Z_m) sim	»	*permutazione dei numeri* 1, 2, ... *m.*

Se $f \varepsilon q/Z_m$, le quantità che corrispondono, in questa corrispondenza f, ai numeri 1, 2, 3, ... si indicano con $f1$, $f2$, $f3$, ... (È inutile usare le parentesi, $f(1)$, $f(2)$, ..., perchè esse non recano alcun vantaggio). Talvolta i valori della variabile si scrivono come indice: così $b \varepsilon N/Z_m$ si può leggere « sia b una successione di m numeri interi » ovvero « siano b_1, b_2 ... b_m dei numeri interi ».

Note alle formule di logica.

§ 1.

P. 2. Leibnitii. *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis* (Ed. Erdmann, p. 95):

« Si idem secum ipso sumatur nil constituitur novum ».

P. 6. G. Boole. *Mathematical Analysis of Logic*, 1847, p. 17:

« If from a group of objects we select the X's we obtain a class of wich all the members are X's: if we repeat the operation on this class no further change will ensue: in selecting the X's we take the whole. Thus we have: $xx = x$, $x^2 = x$, $x^n = x$ ».

P. 7. Id. « It is indifferent in what order two successive acts of selection are performed. The symbolical expression of this law is: $xy = yx$ ».

P. 11, 30, 36, 40. Ch. Peirce. *On the Algebra of Logic. American Journal of Mathematics*, 1880, 1884.

13. Aristotelis *Analyt. Pr.* L. I, cap. IV:

Εἰ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β, καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη καὶ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι.

Id. *De Sophist. Elench.*, cap. XXXIV:

Τῆς τοιαύτης πραγματείας [τῆς συλλογιστικῆς] οὐ τὸ μὲν ἦν, τὸ δ' οὐκ ἦν προειργασμένον· ἀλλ' οὐδὲν παντελῶς ὑπῆρχε — περὶ δὲ τοῦ συλλογίζεσθαι παντελῶς οὐδὲν εἴχομεν πρότερον λέγειν ἄλλο, ἀλλὰ τριβὴν ζητοῦντες πολὺν χρόνον ἐπονοῦμεν.

P. 33. Leibnitii. *Difficultates quaedam logicae:*

« Omne A est B, idest: equivalent A et AB ».

§ 2.

P. 3. J. A. Segner. *Specimen logicae universaliter demonstr.*, 1740:

« Si x ponatur pro *non triangulo*, $-x$ erit *triangulum* » (J. Venn., *Symbolic Logic*, 1881, p. 184).

P. 6, 7, 8. Aug. De Morgan (*Cambridge Phil. Transactions*, 1858):

« Thus (A, B) et AB have ab and (a, b) for contraries » (*).

P. 16. Leibnitii. *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis:*

« $A + B = C$ significat A inesse vel contineri a C etsi A et B habeant aliquid commune ita ut ambo simul sumpta sint majora ipso C ».

(*) [$(A, B) = a \cup b$; $a = -A$] .

P. 18, 19, 22, 32-4. BOOLE, op. cit., p. 16:

« It is indifferent whether from a group of objects considered as a whole we select the class X or whether we divide the group into two parts, select the X's from them separately and then connect the results. We may express this law by the equation $x(u+v)=xu+xv$ ».

P. 24-9. CH. PEIRCE. *Three papers on Logic. Journal of speculative Philosophy* (1868).

§ 3.

P. 1. ARISTOTELIS. *Analyt. Post.*, lib. I, cap. 11:

Τὸ δὲ μὴ ἐνδέχεσθαι ἅμα φάναι καὶ ἀποφάναι οὐδεμία λαμβάνει ἀπόδειξις.

P. 3. ID. *Categoriae,* VIII, 21:

Ἐπὶ δέ γε τῆς καταφάσεως καὶ τῆς ἀποφάσεως ἀεὶ ἐάν τε ᾖ, ἐάν τε μὴ ᾖ, τὸ μὲν ἕτερον ἔσται ψευδὲς τὸ δὲ ἕτερον ἀληθές.

GALENI. *Therapeut.*, lib. I, cap. IV, 10 (cfr. Prantl. Geschichte der Logik im Abendlande):

Περὶ παντὸς ἀναγκαίον ἢ ἀποφάσκειν ἢ καταφάσκειν.

P. 8. LEIBNITII. *Difficultates quaedam logicae* (Ed. Erdmann, p. 105):

« Omne A est B seu A non B est non ens. Nullum A est B seu AB est non ens ».

P. 9, 15-18. G. BOOLE. *An investigation of the laws of thought,* 1854.

19. A. DE MORGAN. *Formal Logic,* 1847, p. 278.

P. 22. E. SCHRÖDER. *Vorlesungen über die Algebra der Logik,* Bd. II, 1891, S. 280-1.

P. 24-30. J. HAUBER. *Scholae logico-mathematicae,* 1820.

§ 5.

3. R. DEDEKIND. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, 1888, n. 21. — 5. ID. n. 22. — 9. ID. n. 23. — 10. ID. n. 24. — 12-14. ID. n. 25. — 21. ID. n. 26. — 24. ID. n. 27. — 25. ID. n. 28. — 26. ID. n. 29. — 28. ID. n. 31.

Rivista di Matematica, 1891, p. 24-31, 182-184.

PRO VERITATE

Risposta alle « Osservazioni » del prof. E. Pascal

di Gino Loria.

Alieno per indole da polemiche di ogni sorta, non avrei fatta alcuna replica alle *Osservazioni* (1) che il prof. E. Pascal diresse contro il mio lavoro sopra *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce* (2). Ma il timore che taluno dei lettori della *Rivista,* giudicandomi in base alle parole di lui, mi considerasse come persona a cui l'orgoglio di poter presentare a' suoi contemporanei cosa dimenticata (3) offuscasse la facoltà di rettamente giudicare, a cui l'ammirazione per le produzioni vetuste facesse tenere in ingiusto dispregio quelle moderne (4), mi consiglia a scrivere qualche linea di auto-difesa capace di dimostrare essere io in diritto di proclamarmi innocente da tali colpe.



Anzitutto una dichiarazione. Quando io vedo un uomo emettere e sostenere, sia con le opere, sia dalla cattedra, delle idee sue e vedo un gruppo di persone abbracciarle ed assumerle come regolatrici della loro vita intellettuale, io dico che queste persone costituiscono una

---

(1) V. questa *Rivista*, vol. II, p. 179-186.

(2) Questo trovasi negli *Atti dell'Università di Genova* pubblicati in occasione del Centenario Colombiano. Gli estratti sono in deposito nella libreria Clausen.

(3) L. c. p. 180.

(4) E a questo proposito voglio notare come io non abbia mai negato essere l'opera dello scienziato di regola superiore a quella dello storico; e l'ho pubblicamente dichiarato (V. *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*, vol. V, p. 61, ove si legge: « Lungi da noi l'antico concetto che pone a uno stesso livello il far cose grandi e il raccontarle, quindi preferiremmo assai che gli insegnanti delle nostre scuole medie si occupassero di far progredire la scienza piuttostochè esporre conquiste già fatte ») assai prima di conoscere l'opinione che aveva su questo argomento il collega dell'Università Pavese (l. c. p. 181).

scuola di cui quell'uomo è il capo. E lo dico non già usando per capriccio la parola *scuola* in un senso a me particolare, ma basandomi sull'uso comune, secondo cui fra i significati di quella parola havvi pure il seguente: *confraternita o compagnia spirituale* (1). E per ciò ho ritenuto e scritto, ed ora ripeto e sostengo che se i matematici di cui io tentai narrare le vicende scientifiche non si possono considerare come costituenti una scuola, giustizia esige si cancelli dalla storia della scienza la scuola di Platone come quelle di Pitagora e di Aristotele, e quante altre confraternite o compagnie intellettuali siano state registrate negli annali del pensiero umano. Nè so capire perchè dovrei parlare di coltura napolitana in genere (2) mentre in questa è inclusa, a tacer d'altro, la scuola sintetica, rivale di quella del Fergola, di cui io solo incidentalmente e quasi a forza feci qualche cenno.



In secondo luogo mi sento autorizzato di qualificare come completamente infondato l'appunto fattomi di equiparare la scuola del Fergola a quella di Pitagora (3), perchè l'innocente paragone da me fatto si riferisce unicamente ad un carattere secondario comune alle due scuole. Infatti, nella *Prefazione* al mio volume, dopo aver annunziato il mio intendimento di fare una succosa analisi dei prodotti dovuti alla scuola napolitana, per sottrarmi all'accusa di avere attribuita a taluno di quelli che la composero cosa che altri avesse pensata, avvertivo: « Ma tale e tanta è la comunanza di idee e l'unità di aspirazioni, tendenze e procedimenti di questi scienziati, che è vano sperare di potere valutare con esattezza separatamente l'opera di ciascuno; sicchè, malgrado certe diversità di opinioni, si sarebbe tentati di credere che essi avessero rinnovata a Napoli la scuola che tanti secoli addietro Pitagora aveva fondata a Crotone (4) ».

---

(1) V. ad es. il *Vocabolario della lingua italiana* del Rigutini.

(2) L. c. p. 183.

(3) L. c. p. 182.

(4) Mi piace osservare come il senso delle mie parole sia stato perfettamente inteso dal grande storico M. Cantor, il quale scrisse: « Eine Schule « war in der That, welche Nicola Fergola (1753 bis 1822) gegründet hat, « eine Schule von so engem Zusammenhang, wie sie kaum je wieder be- « stand, seit Pythagoras fast in derselben Gegend deren Musterbild schuf. « Dieser sehr richtige Vergleich gehört Herrn Loria an, welcher ihn noch « damit belegte, dass bei den Schriften der neapolitanischen Schule man

* * *

Sgombrata così la via da queste due critiche, avvertirò che io ritengo come una delle regole fondamentali di ogni ricerca destinata a determinare l'influenza di un uomo, quella di studiare anzitutto lo stato delle cognizioni prima della sua comparsa per poi dedurre come e quanto egli modificò il suo ambiente. Per quanto questa regola possa apparir a molti come un *truism* indegno di venire esplicitamente enunciato, pure io ho creduto di dovere notarla perchè mi sembra che l'egregio mio contradditore ne abbia adottata una diametralmente opposta, quella cioè di paragonare le azioni di uno scienziato all'opera di quelli che vennero dopo di lui o di coloro che in altri luoghi e sotto l'impero di altre circostanze fecero più e meglio di lui. Ora che questo nuovo canone di critica storica possa condurre ai più sorprendenti e meno accettabili risultamenti è cosa che non esige alcuna dimostrazione. E se il lettore si proverà ad applicarlo a dei casi diversi da quello che ci occupa, si troverà costretto a modificare radicalmente giudizii da tutti accettati, e si renderà pienamente ragione del fatto che il prof. Pascal ed io, partendo dalle medesime premesse, arriviamo a conclusioni discordi; che mentre egli considera il periodo storico in questione come *di decadenza* io lo consideri come *di rinascimento;* che, mentre egli giudica siccome perniciosa l'influenza del Fergola, io m'inchini con riverenza dinnanzi a chi scosse definitivamente i Napolitani dal loro torpore e li spinse a correre animosi alla ricerca pi nuovi veri, quei Napolitani che per tanti secoli rimasero sordi alle voci che, nel campo matematico, col precetto e coll'esempio facevano echeggiare in tutto il mondo civile la magica parola *avanti!*



Gli è appunto perchè io mi sono sforzato di tenere sempre dinnanzi a' miei occhi lo stato della scienza napolitana prima del Fergola, che

---

« stets in Zweifel sei, ob man von dem Verfasser oder den Verfassern « reden solle, da die Arbeiten, wie die Entdeckungen, bis zu einem ge- « wissen Grade Gemeingut waren, der Geist des Lehrers vollends überall « sichtbar blieb. Man möchte zum Vergleiche wohl auch die Arbeiten be- « ziehen, welche in unseren Tagen aus dem chemischen Laboratorium « berühmter Lehrer hervorgehen » (*Zeitschrift f. Math. u. Phys.*, 37 Bd., hist.-lit. Abth. p. 215).

ho enunciato un giudizio benevolo verso i principii di conversione e trasferimento che questi ha escogitati; essi rappresentano a' miei occhi il primo sintomo di aspirazione a metodi generali per la ricerca geometrica che mi sia stato possibile avvertire nella scienza napolitana. Come primo tentativo in una direzione d'indiscutibile fecondità io diedi lode al Fergola di averlo compiuto; come definitivo risultato, che potesse per mille anni (1) dare origini a studii importanti, io certo mai l'ho creduto, nè so come si potesse attribuirmi tale opinione dal momento che rimproverai ai di lui discepoli di non avere proseguito in una via in cui egli aveva mosso il primo passo. Nè so, a dir vero, come possa essere giustificato il vivace attacco del prof. Pascal contro questo mio modo di vedere, il quale io, a p. 43-44 del mio scritto, esprimeva con le seguenti parole:

« Benchè tutti questi procedimenti (2) siano applicabili soltanto in certi casi, pure non si può revocare in dubbio il loro pregio; essi servono ad attestare come il Fergola avesse sentito il bisogno di far acquistare alla geometria la generalità posseduta dall'algebra, col sostituire, alle soluzioni speciali ad ogni singolo problema, delle argomentazioni applicabili ad un'intera categoria di questioni. Sgraziatamente questo elevato indirizzo che aveva ne' suoi albori la scuola napolitana, si cerca indarno nel meriggio di essa, per non parlare del tramonto; i discepoli del Fergola si occuparono, e non senza successo, di speciali questioni, ma nessuno seppe seguire il maestro nello scoprire nuovi metodi dotati di qualche generalità. Non ha forse qualche probabilità la supposizione che in questo cambiamento di direzione abbia sede una delle cause più efficaci dello scredito e della successiva rovina della scuola napolitana? »

Questo anzi mi porge il destro di rilevare esplicitamente — il che del resto emerge da innumerevoli passi del mio lavoro — come fra il Fergola e la generalità de' suoi discepoli io riconosca un enorme dislivello intellettuale. In particolare, che questi discepoli abbiano svisate, esagerandole, non poche delle sue idee, che essi non abbiano avvertito essere transitorio il valore di queste, io non lo nego ora e l'ho sempre riconosciuto; ma il valutare i discepoli dal maestro costituisce un errore storico non minore di quello che commetterebbe colui che, ricordando soltanto la guerra accanita e sleale mossa a Galileo in nome di Aristotele, dimenticasse che fu il filosofo di Stagira che per primo proclamò la necessità del metodo sperimentale, in un'epoca in cui era co-

(1) L. c. p. 183.

(2) Cioè i metodi di trasferimento e conversione.

stume di inventare *a priori* un sistema di filosofia naturale e osservare i fatti nell'unico intento di costringerli a giustificarlo.



A meglio lavarmi della taccia di benevolenza cieca verso la scuola del Fergola, credo non vi sia di meglio che riportare qui le parole medesime con cui io ho compendiato il mio giudizio su di essa nel citato volume (p. 128-134).

« Riflettendo che il Fergola seppe da solo instradarsi e dirigersi verso la ricerca del vero, in un paese che era deficiente di tradizioni scientifiche e in un'epoca in cui le frequenti guerre, gli incessanti commovimenti interni e i molteplici cambiamenti di governo, avevano preparato e mantenevano un ambiente poco propizio alle tranquille meditazioni, non si sentirà alcuno stupore constatando l'alta stima di cui ben presto venne fatto segno e che egli seppe serbare, trasformare anzi in venerazione, colla propria attività didattica e scientifica. Quanto la prima fosse feconda è dimostrato dal numeroso stuolo di persone che lo riconobbero come maestro; mentre l'importanza della di lui opera scientifica emerge dallo studio de' suoi lavori, ed emergerebbe anche da quanto esponemmo nelle pagine precedenti, ove fossimo riusciti (come era nostra aspirazione) di mettere in chiaro come tutti gli scritti del Fergola possiedano un'indiscutibile originalità e siano improntati di quella spiccata tendenza verso le considerazioni generali, la quale di regola designa chi la possiede come uomo nato alle scoperte scientifiche.

L'esperienza fatta dal Fergola su sè stesso lo spinse a raccomandare lo studio degli antichi come eccellente preparazione alle investigazioni generali, a considerare questo metodo di istruzione come fecondo di effetti mirabili e certi: e per tale opinione egli non è certo da biasimarsi. Se un peccato il Fergola commise fu nel provare ed esprimere un'insormontabile avversione verso la geometria analitica di Lagrange; era forse difficile evitarla a lui educato nel metodo cartesiano ed innamorato di tutto che arieggiasse ai metodi dell'antica Grecia; ed è tanto diffusa quella ripugnanza verso il nuovo, che con eleganza moderna vien detto misoneismo, che noi saremmo disposti ad assolvernelo, ove quel peccato non avesse avute perniciose conseguenze. Giacchè i discepoli del Fergola, abbracciandone le idee senza discuterle, chiudendo gli occhi dinnanzi agli splendidi prodotti di cui il metodo di Lagrange era stato ubertoso prima e durante la campagna che essi avevano aperta contro di esso, s'illusero di poter abbattere una pianta

che aveva poste salde radici ed era adorna di foglie, di fiori e di frutti; e il torto di essi, che erano abbastanza giovani per potersi invece addestrare nel maneggio del nuovo strumento, venne ritenuto così grave che quando una scuola rivale volle abbattere quella del Fergola, trovò nella riluttanza di questa ad accogliere le idee di Lagrange, il punto debole ove colpirla a morte.

Ma l'esito di questo duello non deve far dimenticare il valore di chi ebbe avversa la sorte dell'armi! E chi tesse la necrologia della scuola napolitana, non può nè deve passare sotto silenzio come l'ampia e profonda conoscenza della letteratura classica che ivi si aveva, abbia permesso non soltanto di rilevare e correggere molti errori storici cui l'imponente autorità di Montucla aveva attribuito valore di dogmi, ma anche di diffondere e perfezionare la conoscenza degli antichi metodi d'indagine geometrica e di aggiungere qualche nuovo numero al catalogo dei lavori con cui i matematici recenti tentarono sopperire alla perdita di opere classiche. In questa perfetta conoscenza dei procedimenti vetusti, nell'ammirazione per essi, nell'ardente desiderio di emularli, è probabilmente da ricercarsi l'origine di quella scrupolosa cura della forma visibile in tutti gli scienziati di cui stiamo occupandoci: potrà forse il lettore moderno trovare il loro stile troppo carico di fiori retorici, non mai oscuro o scorretto; e con la continua meditazione sui classici essi probabilmente appresero anche il segreto di comporre buoni libri di istruzione, segreto del quale tutti sembrano essere stati in possesso.

Se non che tale culto per l'antichità, mentre può produrre eccellenti effetti quando venga professato in giusta misura, quando per converso degenera in una cecità intellettuale che impedisce di apprezzare secondo giustizia tutto che è moderno, ostacola l'avanzamento del sapere; di ciò non s'avvidero i discepoli del Fergola, essi non avvertirono cioè che la scuola napolitana stava per trasformarsi in una pianta parassita del forte tronco dovuto alle cure di Euclide e Apollonio, e che quindi era destinata a dare soltanto dei frutti che fossero una trasformazione dei succhi che circolavano nella pianta principale. Si sarebbe tentati di asserire che il maggior difetto degli investigatori di cui ci occupiamo consistesse nella scarsità di quella speciale fantasia che al geometra addita i problemi e i mezzi per risolverli; infatti, non soltanto i metodi di cui si servirono — eccezion fatta per alcuni pochi suggeriti dal Fergola — nacquero altrove, ma i principali fra i problemi a cui vennero applicati furono suggeriti da altri (1); sembra anzi

(1) Vegga il lettore spassionato se tali parole convengono a un ammiratore entusiasta quale mi dipinge il prof. Pascal! (l. c. p. 181).

che questa deficienza fosse avvertita e volesse venire pudicamente nascosta, perchè il Flauti non smise mai di dire e ripetere a sazietà, essere impossibile l'arrivo di un istante ove un problema fosse da considerarsi come definitivamente esaurito, essere del pari impossibile che una ricerca matematica invecchiasse.

È un fatto che ci sembra degno della più seria considerazione questo, che ogni qualvolta in un paese comincia a ridestarsi lo spirito di ricerca delle verità geometriche, gli scienziati non sanno sottrarsi al fascino su di essi esercitato dai più antichi investigatori, ed in conseguenza si sforzano di calcarne le orme, di imitarne perfino le movenze e gli atteggiamenti: la storia della geometria, la quale registra, dopo periodi di inerzia, le divinazioni di opere antiche fatte in Italia dal Viviani, in Francia da Viète e Fermat, in Inghilterra da Halley, Horseley e Simson, è là per dimostrarlo! Si sarebbe per ciò indotti a pensare che nella vita intellettuale delle nazioni avvenga qualche cosa di analogo a ciò che l'embriologia insegna a verificarsi nella vita fisica degli animali; nello stesso modo che ogni essere vivente, avanti di acquistare vita autonoma e indipendente, ripassa per tutte quelle fasi di sviluppo che attraversò la specie a cui egli appartiene prima di raggiungere lo stato fisico della generazione a cui egli dovrà appartenere, così parrebbe che ogni popolo, prima di acquistare la capacità di accrescere le nostre cognizioni sui fenomeni dello spazio, debba per qualche tempo assumere le parvenze ed i modi di agire di chi dianzi battè la stessa strada. Accettata come vera questa legge di svolgimento, la scuola, di cui stiamo occupandoci, rappresenta uno stadio che la scienza napolitana doveva necessariamente attraversare prima di essere arruolata nella coorte chiamata a combattere per la conquista di nuovi veri [1].

Ma questo stadio, per la sua stessa natura, doveva avere breve durata. Il corpo al quale il Fergola aveva dato la vita, racchiudeva in sè stesso un germe roditore che lo avviava verso il sepolcro. Tuttavia, da quello che apparve, ben presto, come un cadavere in putrefazione, stavano per sprigionarsi nuove forme di vita; i germi ivi ammassati non aspettavano per svilupparsi che una circostanza propizia. E questa non si fece attendere a lungo.

Con la venuta a Napoli, nel 1844, di Jacobi e Steiner, giunse alle falde del Vesuvio la notizia delle nuove idee che direbbersi rappresentare quei « nouveaux filons » metalliferi invocati da Lagrange per

---

[1] Mi permetto fissare l'attenzione del lettore su questa spiegazione che tentai dare dell'anacronismo che prima del Pascal (l. c. p. 184) io avevo avvertito.

trattenere i matematici in una miniera che a lui appariva come omai esausta, e l'influenza esercitata da essi fu pressochè immediata.

L'interesse che provarono i giovani napolitani per le questioni che venivano agitate al di là dell'Alpi si estrinsecò con un rinnovamento completo nel loro campo di studi. E infatti vediamo, subito dopo quel ben augurato soggiorno presso di noi dei due grandi scienziati tedeschi, dal Padula dimostrati e maggiormente svolti alcuni teoremi che Steiner gli aveva comunicati su i baricentri di curvatura, sulla cubatura di certi solidi, su i flessi ed i punti doppi delle curve algebriche; il Del Grosso redigere prima uno *Sviluppo di una nuova teoria di Jacobi riguardante la genesi, la specie ed il sito delle linee del* 2° *ordine*, porgere poi un'*Applicazione del principio di Ivory della genesi, della specie, del sito della superficie di* 2° *ordine*, e finalmente occuparsi di estendere allo spazio il problema — da Steiner già risoluto — di « determinare quelle delle ellissi circoscritte ad un quadrangolo che più si approssima ad un cerchio »; inoltre Emanuele Fergola penetrare nel campo in cui aggiravasi lo stesso Steiner quando scriveva la memoria intitolata: *Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte;* e finalmente il Padula risolvere, più tardi, elegantissimamente un problema nel quale Steiner erasi imbattuto nelle sue celebri ricerche sintetiche sui massimi e minimi; che più? vediamo persino il Trudi — a cui sembra sia stato dalla sorte riserbato il còmpito di liquidare la bancarotta della scuola napolitana — allargare il campo de' suoi studi su i poligoni inscritti e circoscritti alle coniche profittando della luce che Jacobi aveva sparsa sopra tali questioni coll'applicarvi la teoria delle trascendenti ellittiche. E a questi nomi, altri molti potrei aggiungere e non di minor valore, ove ritenessi che quelli citati non fossero sufficienti attestazioni di qual fosse la corrente di idee che predominava in Napoli dopo l'anno 1844, e ove non osservassi che tale enumerazione ben presto mi condurrebbe al punto in cui non è più lecito parlare di una scuola *napolitana*, chè la mutazione radicale nelle condizioni politiche dell'Italia, accaduta poco dopo, venne a coordinare in un grande focolare unico i centri di studio sparsi per tutta la penisola.

Ma se nello stuolo di ricercatori che nel campo delle scienze esatte, in quest'ultimo mezzo secolo, tenne alto il nome italiano, non pochi si incontrano che ebbero in Napoli la loro educazione intellettuale, non è forse dovere di ricordare con riverenza e affettuosa gratitudine, il nome di Nicola Fergola, che fece risorgere quelle regioni dallo squallore dei bassi tempi alla luce di un'èra novella? »

⁂

Non tenterò di difendere i geometri della scuola napoletana dall'avere intralciata la carriera scientifica e professionale di coloro che non ne condividevano le idee; l'accusa è grave nè ho ragione di crederla ingiusta; dessa però colpisce non solo il Flauti, ma il Padula (1) e, a tacer d'altri minori, il Cauchy nel momento che combatteva Poncelet; nè si dimentichi che « les hommes savent si peu, quelle qu'en soit la fausseté, renoncer aux idées dont ils ont été imbus dans l'âge d'où partent leurs souvenirs, qu'à un très-petit nombre d'exceptions près, ce n'est dans toute une nation que la jeunesse qui embrasse et fait prévaloir une opinion ou propage des faits nouveaux » (2).

Nè discolperò me dall'appunto di avere scritto un intero volume per descrivere un periodo che, per quanto meritorio come quello che diede ai Napolitani un posto nell'*Histoire de la Géométrie* di Chasles, è indubbiamente un periodo di preparazione; è un appunto che io stesso mi feci e di cui tentai difendermi nella *Prefazione*, del quale d'altronde mi sento assolto ora che la raccolta di documenti da me fatta con tanta fatica ha reso possibile al prof. Pascal di gettarmi il guanto di una sfida ad armi cortesi che io ho raccolto, fidando dovesse arridere la vittoria a chi combatteva *per la verità* contro un campione tanto valoroso quanto leale.

Dovrei finalmente dichiararmi colpevole di soverchio ardimento per essermi provato a descrivere la vita intellettuale di un paese in cui io non ho mai vissuto (3) e di occuparmi di fatti in cui non ho mai potuto avere un interesse diretto (4). Ma ritengo che questa sia una condizione vantaggiosa e quello non sia ostacolo insormontabile. D'altronde mi è lecito illudermi che il mio ardire non sia stato eccessivo quando vedo persone in grado di conoscere lo stato delle cose accordare la loro approvazione all'opera mia e non negarmelo nemmeno quell'Accademia che espulse il Flauti dal suo seno ed a cui è oggi affidata la cura del sapere nella parte meridionale d'Italia (5)

---

(1) Confesso che non capisco bene perchè la scuola del Fergola sia responsabile anche di questo errore del suo più accanito avversario (luogo cit. p. 186).

(2) Così Lacroix a pag. 7 dei suoi *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier* (Paris 1838).

(3) L. c. p. 180.

(4) L. c. p. 184.

(5) Cfr. *Rendiconto dell'Accademia di Napoli*, seduta dell'11 giugno 1892.

Altro aggiungerei ove non temessi abusare della pazienza dei lettori ([1]); credo però che il fin qui detto sia sufficiente a dimostrare come nel narrare le vicende della scuola napolitana, io non abbia smarrita la via di storico onesto, io non abbia tentato l'impossibile, di estollere cioè chi non lo meritava, io non mi sia rifiutato di scorgere e constatare il male ove c'era; in una parola io non abbia posto in non cale il savio avvertimento di Montaigne: « Ce n'est pas aimer la vérité que ne l'aimer que flatteuse et agréable; il faut l'aimer âpre et dure; il faut en aimer les épines et les blessures ».

Genova, 12 Dicembre 1892.

CORRISPONDENZA

Torino, 8 dicembre 1892.

Egregio Sig. Direttore,

Calcolando l'area compresa tra un dato perimetro ed una retta fondamentale nel modo indicato nella lettera del sig. ingegnere Crotti Francesco ([2]), adoperando cioè la nota formola di Simpson:

$$S = \frac{h}{3}[y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \dots + y_{2n} + y_{2n+1}]$$

si ottiene nel primo caso il numero $9600^{m.q.}$ e nel secondo l'altro numero $9720^{m.q.}$ che è maggiore del primo.

Vi è *l'assurdo* in codesto risultamento? A me pare di no.

La formola di Simpson suppone che il perimetro curvilineo compreso tra gli estremi di tre ordinate consecutive possa essere sostituito da un arco di parabola avente l'asse parallelo alle ordinate.

Ora, quando si calcola l'area totale compresa tra le ordinate y_1 e y_{21}, si sostituisce al perimetro dato quello di *dieci* archi eguali di parabola aventi i loro vertici alle estremità delle ordinate $y_2, y_4, \dots y_{20}$. Codeste parabole *hanno la* CONVESSITÀ *rivolta verso la retta fondamentale.*

Quando invece si calcola l'area compresa tra le ordinate y_2 e y_{20}, al perimetro dato si sostituisce quello di *nove* archi eguali di parabola

---

([1]) Ulteriori mie giustificazioni avrei potuto trovare a p. 32-33, 41, ecc. del mio libro.

([2]) Vedi *Rivista di Matematica*, vol. II, pag. 176.

(identica alla precedente). Questi ultimi archi però *hanno la* CONCAVITÀ *rivolta alla retta fondamentale.*

È egli indifferente sostituire ad un medesimo perimetro curvilineo una volta un arco di parabola avente la sua concavità rivolta in un senso ed un'altra rivolta in senso contrario?

Adunque i due numeri precedenti rappresentano due cose differenti e non uno il *tutto* e l'altro *una parte.*

Suo devot.mo
Prof. N. JADANZA.

Milano, 10 Dicembre 1892.

Chiarissimo Signore,

. . . .

La quadratura approssimata di Simpson consiste sostanzialmente in ciò: divisa la fondamentale in un numero pari di intervalli eguali, e condotte le ordinate dai punti di divisione, agli archi del perimetro curvo della figura data, corrispondenti a tre ordinate successive, si sostituiscono altrettanti archi di parabole di secondo ordine passanti pei termini delle tre ordinate medesime, quindi si sommano le aree dei trapezi parabolici che ne risultano. Ora, se un arco del perimetro presenta punti di flesso o cuspidi i quali non coincidano con termini di ordinate, la parabola di secondo ordine, come tutte le coniche in genere, essendo priva di punti singolari, non solamente si presterà male a surrogare la linea limitante la figura, ma in taluni casi riescirà anche meno adatta della retta, cioè la quadratura a trapezi rettilinei potrà fornire una maggiore approssimazione.

Nel caso proposto dall'ing. Crotti, ammesso che la formula di Simpson sia applicabile ai dieci trapezi in cui è stata scomposta le figura, per le misure date, il perimetro curvo viene sostituito da dieci archi eguali di parabole coniche pure eguali, ciascuna volgente la convessità alla fondamentale; e l'area della figura eguaglia quella del trapezio parabolico, espressa da 10(20+20+4.14), ripetuta dieci volte, cioè 9600^{mq}.

La formula medesima non è invece da applicarsi, per l'osservazione fatta, alla porzione di figura compresa tra le ordinate y_2 e y_{20}, in ciascuna delle nove sezioni della quale il perimetro curvo presenta un cuspide formato dall'incontro di due rami delle parabole considerate prima. Volendola usare si avrebbe l'area del trapezio parabolico: 10(14+14+4.20) ripetuta nove volte, ossia 9720^{mq}, area maggiore di quella già trovata, il che costituisce l'assurdo notato. In questo caso,

immaginando la figura limitata da nove archi eguali di parabole aventi la concavità rivolta alla fondamentale, si vede chiaro come sia da preferirsi la spezzata rettilinea alla parabolica.

È davvero da lamentarsi che, anche in libri reputati e diffusi nelle scuole non si dica parola delle cautele da aversi nell'uso delle formule di quadratura approssimata, in particolare di quella di Simpson. Sarebbe bene che, oltre al mettere in avvertenza degli errori che può trarre seco l'uso incondizionato di questa, si mostrasse la convenienza delle quadrature con parabole di ordini superiori, le quali sono dotate di punti di flesso, ricorrendo agli integrali di Cotes, quando nel perimetro della figura ci sono singolarità che la parabola di secondo ordine non possa rappresentare. Così io non so perchè non sia adoperata nella pratica la quadratura parabolica di terzo ordine, che conduce ad una formula abbastanza semplice, poco più complicata di quella di Simpson, e che non mi fu dato di vedere ricordata nei libri che trattano di questi argomenti e da me esaminati. Divisa la fondamentale in $3n+1$ segmenti ciascuno eguale ad a, la formula è la seguente:

$$\frac{3}{8}a\left\{3\sum_{1}^{3n+1} y_r - y_1 - y_{3n+1} - \sum_{1}^{n+1} y_{3r-2}\right\},$$

che si può così enunciare: per avere l'area approssimata, usando della quadratura parabolica di terzo ordine, *si moltiplichino i* $\frac{3}{8}$ *dell'intervallo costante tra due ordinate consecutive, pel triplo della somma di tutte le ordinate, diminuito delle due ordinate estreme e della somma delle* $n+1$ *ordinate (comprese ancora le estreme) che limitano gli* n *trapezi parabolici.*

Mi è propizia l'occasione per rassegnarmi colla massima stima

*Di Lei devot.*mo

Dott. Giuseppe Bardelli.

Sullo stesso soggetto.

(Formule di quadratura).

La formula di Cotes per la quadratura di terz'ordine, fatto per semplicità $n=1$, è

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{8}(y_0+3y_1+3y_2+y_3)\,. \qquad (1)$$

Essa, e le successive fino al decimo ordine trovansi nel *Calcul intégral* di BERTRAND, pag. 333; esse sono pure riportate nel *Sammlung von Formeln von Làska* (Braunschweig, 1888, pag. 233). Sgraziatamente degli errori di stampa (troppo comuni in questo libro) rendono già errata la formula successiva alla (1).

La formula (1) è esatta per le funzioni intere di terzo grado, nè più nè meno della formula di Simpson più semplice

$$\int_a^b y dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \,. \tag{2}$$

Si può calcolare l'errore R che si commette usando la (1) per una funzione qualunque y, seguendo il metodo indicato nelle mie *Applicazioni geometriche,* pag. 213 Esso vale

$$R = \frac{(b-a)^4}{4\,!\,81}\int_0^3 (z-1)(z-2)(z-3) y^{IV} dz \,,$$

ove y^{IV} rappresenta un valor medio fra quelli della derivata quarta di y, e questo valor medio è variabile con z. Quindi poichè il fattore che moltiplica y^{IV} cambia di segno due volte nell'intervallo di integrazione, non si può portare il fattore y^{IV} fuori del segno integrale. Bisognerà pertanto scomporre l'integrale $\int_0^3$ in $\int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3$, e in ognuno di questi portar fuori l'y^{IV}. Si otterrà

$$R = \frac{(b-a)^4}{4\,!\,81}\left(-\frac{19}{30}y_1{}^{IV} + \frac{11}{30}y_2{}^{IV} - \frac{19}{30}y_3{}^{IV}\right)$$

ove $y_1{}^{IV}$, $y_2{}^{IV}$, $y_3{}^{VI}$ sono valori di y^{IV} rispettivamente negli intervalli (0, 1), (1, 2) e (2, 3).

Invece nella formula (2) di Simpson l'errore vale

$$R = -\frac{(b-a)^4}{4\,!\,120} y^{IV} \,.$$

G. PEANO.

Sulle equazioni di Lagrange per il moto di un punto.

Se un punto si move sotto l'azione di una forza e il suo moto viene riferito a tre assi coordinati cartesiani ortogonali, scrivendo che la forza effettiva del punto, stimata secondo ciascuno dei tre assi, è uguale alla forza stimata secondo lo stesso asse, si ottengono le usuali equazioni del moto

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \,. \tag{1}$$

Mi propongo di mostrare che se il moto del punto viene riferito ad un sistema qualunque di coordinate *generali*, con un procedimento analogo al precedente si ottengono le equazioni del moto di Lagrange.

Nei trattati non è messa in rilievo questa osservazione, la quale mentre da una parte fa vedere l'analogia che esiste fra le equazioni (1) e quelle di Lagrange, dall'altra fornisce un significato meccanico di queste ultime equazioni, significato che scompare stabilendo nella maniera solita le equazioni di Lagrange, e inoltre spiega come queste equazioni siano indipendenti dalla reazione, nel caso di un punto vincolato. Sia M un punto materiale di massa m, sollecitato da una forza applicata F; supponiamolo dapprima libero; siano x, y, z le sue coordinate cartesiane ortogonali al tempo t e q_1 q_2 q_3 tre coordinate affatto arbitrarie dello stesso punto al medesimo istante.

Abbiamo le equazioni

$$(2)\quad \begin{cases} x = f(q_1, q_2, q_3) \\ y = \varphi(q_1, q_2, q_3) \\ z = \psi(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} q_1 = f_1(x, y, z) \\ q_2 = \varphi_1(x, y, z) \\ q_3 = \psi_1(x, y, z) \end{cases}$$

Dalle (3) si deduce che ciascuna delle tre equazioni

$$q_1 = \text{cost.}\ , \qquad q_2 = \text{cost.}\ , \qquad q_3 = \text{cost.}$$

rappresenta una superficie che passa per la posizione (x, y, z) che il punto mobile M occupa al tempo t.

Il moto di M può essere definito in due modi: colle equazioni

$$(4)\qquad x = \lambda(t)\ , \qquad y = \mu(t)\ , \qquad z = \nu(t)$$

o colle equazioni

$$(5)\qquad q_1 = \lambda_1(t)\ , \qquad q_2 = \mu_1(t)\ , \qquad q_3 = \nu_1(t)\ .$$

Le (4) ci dicono che al tempo t il punto M è l'intersezione di tre piani rappresentati rispettivamente dalle equazioni stesse; le (5) ci dicono analogamente che al tempo t il punto M è l'intersezione delle tre superficie rappresentate rispettivamente dalle equazioni stesse.

Le (4) rappresentano ad ogni istante i moti di M sulle intersezioni dei piani (4), ossia rappresentano i moti delle proiezioni di M sugli assi cartesiani e ciascuna delle coordinate x, y, z esprime lo spazio descritto alla fine del tempo t dalla proiezione corrispondente; analogamente le (5) rappresentano, a ogni istante, i moti del punto M sulle intersezioni delle superficie (5); ad es.: la $q_1 = \lambda_1(t)$ rappresenta il moto di M sulla linea

$$(6)\qquad q_2 = \mu_1(t)\ , \qquad q_3 = \nu_1(t)$$

qualora si mantengano costanti q_2 e q_3 e si faccia variare soltanto q_1 con la legge data da $q_1 = \lambda_1(t)$; ma qui devesi notare che non si può

più affermare che q_1 sia lo spazio descritto alla fine del tempo t, dal punto M, sulla linea (6).

Sia v la velocità di M al tempo t; siano v_1, v_2, v_3 ordinatamente le velocità del punto stesso a quell'istante sulle traiettorie

$$\begin{cases} q_2 = \mu_1(t) \\ q_3 = \nu_1(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_3 = \nu_1(t) \\ q_1 = \lambda_1(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = \lambda_1(t) \\ q_2 = \mu_1(t) \end{cases}$$

Si ha dalle equazioni (2):

$$(7) \qquad v_x = \frac{\partial f}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} q'_3$$

e altre due espressioni analoghe per v_y e v_z.

Se riguardiamo q_2 e q_3 come costanti, coi valori che hanno al tempo t, le componenti v_x, v_y, v_z divengono le componenti di v_1 sugli assi cartesiani; onde

$$(8) \qquad (v_1)_x = \frac{\partial f}{\partial q_1} q'_1 , \qquad (v_1)_y = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} q'_1 , \qquad (v_1)_z = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} q'_1 .$$

Espressioni analoghe sussistono per le componenti di v_2 e di v_3.

Intanto noi vediamo, confrontando le (8) con le (7), che

$$v_x = (v_1)_x + (v_2)_x + (v_3)_x$$

e analoghe; onde v è la risultante delle tre velocità v_1, v_2, v_3.

Ora indichiamo con a_1 il valore di un segmento che abbia per componenti cartesiane le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_1};$$

sarà
$$(v_1)_x = a_1 \cos(a_1 x) q'_1$$

e analoghe; onde, quadrando, sommando e estraendo la radice si otterrà

$$v_1 = a_1 q'_1$$

e quindi
$$\cos(a_1 x) = \cos(v_1 x) .$$

Dunque il segmento a_1 ha la direzione di v_1 e può perciò immaginarsi portato sulla tangente alla traiettoria (6) nel punto occupato dal mobile al tempo t.

Similmente si avrà

$$v_2 = a_2 q'_2 , \qquad v_3 = a_3 q'_3$$

ove a_2 e a_3 sono i valori di due segmenti che hanno ufficio analogo a quello di a_1.

È facile trovare i valori dei segmenti a_1, a_2, a_3 anche senza ricorrere alle (2), ma avendo soltanto riguardo alla natura del sistema di coordinate q_1, q_2, q_3.

Infatti sia s_1 lo spazio descritto alla fine del tempo t dal punto M sulla traiettoria (6), contato da un'origine fissata ad arbitrio su di essa; s_1 sarà in generale funzione di q_1, q_2, q_3; per es.: prendendo le coordinate sferiche $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$ (longitudine), $q_3 = \theta$ (colatitudine), lo spazio descritto al tempo t sulla traiettoria $q_1 = \text{cost.}$, $q_3 = \text{cost.}$ è un arco di parallelo, che, a meno di una costante, vale

$$\rho \operatorname{sen} \theta . \varphi = q_1 q_2 \operatorname{sen} q_3 \ .$$

Avremo dunque

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = \frac{\partial s_1}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial s_1}{\partial q_2} q'_2 + \frac{\partial s_1}{\partial q_3} q'_3 = \frac{\partial s_1}{\partial q_1} q'_1$$

perchè $q'_2 = q'_3 = 0$ per il moto sulla traiettoria (6) al tempo t.

Confrontando i due valori di v_1 si deduce

$$a_1 = \frac{\partial s_1}{\partial q_1}$$

e analogamente

$$a_2 = \frac{\partial s_2}{\partial q_2}, \qquad a_3 = \frac{\partial s_3}{\partial q_3} \ .$$

Così, per le coordinate sferiche, è

$$a_2 = q_1 \operatorname{sen} q_3 = \rho \operatorname{sen} \theta \ .$$

Cerchiamo ora la forza viva del punto M.

Abbiamo

$$(9) \quad \mathrm{T} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \Big[a_1^2 q'^2_1 + a_2^2 q'^2_2 + a_3^2 q'^2_3 + 2 a_1 a_2 q'_1 q'_2 \cos(a_1 a_2) + 2 a_2 a_3 q'_2 q'_3 \cos(a_2 a_3) + 2 a_3 a_1 q'_3 q'_1 \cos(a_3 a_1) \Big] .$$

Proiettando ortogonalmente la velocità v, l'accelerazione totale w e la forza applicata F, sulla direzione di a_1, otterremo successivamente

$$\alpha) \qquad v \cos(v a_1) = a_1 q'_1 + a_2 q'_2 \cos(a_1 a_2) + a_3 q'_3 \cos(a_1 a_3) \ ;$$

moltiplicando ambi i membri per a_1, il secondo membro, in virtù della (9), diviene

$$\frac{\partial \left(\frac{\mathrm{T}}{m} \right)}{\partial q'_1} = \frac{1}{m} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}$$

quindi

$$v \cos(v a_1) = \frac{1}{m a_1} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} \ ;$$

$$\beta) \qquad w\cos(wa_1) = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{1}{a_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{a_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{1}{a_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}$$

$$= \frac{1}{a_1}\frac{d}{dt}\left[v_x\frac{\partial f}{\partial q_1} + v_y\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + v_z\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right]$$

$$-\frac{1}{a_1}\left[v_x\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + v_y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right) + v_z\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a_1}\frac{d}{dt}\left[va_1\cos(va_1)\right] - \frac{1}{a_1}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial q_1} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial q_1} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial q_1}\right)$$

$$= \frac{1}{a_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{1}{2a_1}\frac{\partial}{\partial q_1}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$= \frac{1}{ma_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{1}{ma_1}\frac{\partial T}{\partial q_1};$$

$$\gamma) \quad F\cos(Fa_1) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{1}{a_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{1}{a_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{1}{a_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = \frac{1}{a_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Eguagliando la forza effettiva stimata sulla direzione di a_1 alla componente della forza applicata sulla stessa direzione, si ottiene, tralasciando il fattore comune $\frac{1}{a_1}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

che è una delle equazioni di Lagrange, e precisamente quella corrispondente alla coordinata q_1.

Per es. nel caso che le q_1 q_2 q_3 siano le coordinate sferiche, calcolando la proiezione dell'accelerazione totale sul raggio vettore, si trova

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right];$$

scrivendo

$$m\frac{d^2\rho}{dt^2} - m\rho\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \frac{\partial U}{\partial \rho}$$

è questa appunto l'equazione di Lagrange relativa alla coordinata ρ.

Se il punto è vincolato a una linea o ad una superficie, le equazioni di Lagrange si applicano senz'altro e si riducono a una o due secondo che le variabili indipendenti sono una o due, cioè il punto è ritenuto da una linea o da una superficie.

Mercè il significato, stabilito precedentemente, delle equazioni di Lagrange, possiamo renderci facilmente ragione del perchè esse non contengono la reazione del vincolo.

Supponiamo ad es. che il punto sia ritenuto da una superficie

$$\pi(x, y, z) = 0 .$$

Poniamo

$$x = f(q_1, q_2) , \qquad y = \varphi(q_1, q_2) , \qquad z = \psi(q_1, q_2)$$

e queste espressioni siano tali da soddisfare identicamente l'equazione del vincolo, qualunque siano i valori di q_1 e q_2. Si ha

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \pi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \pi}{\partial z}\delta z = 0$$

ossia

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2\right) + \ldots\ldots = 0$$

o ancora

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial \pi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial \pi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \ldots\ldots = 0$$

da cui, poichè le variazioni δq_1 e δq_2 sono arbitrarie,

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial \pi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\partial \pi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\partial \pi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\partial \pi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0 ;$$

onde i segmenti a_1 e a_2 sono normali alla normale della superficie $\pi(x, y, z) = 0$ in M, cioè stanno sul piano tangente della superficie stessa; quindi proiettando la forza totale (risultante di F e della reazione della superficie) sulle direzioni di a_1 e di a_2 si ha da fare soltanto la proiezione di F e perciò le due equazioni di Lagrange saranno indipendenti dalla reazione.

F. Porta.

Alcune proprietà delle accelerazioni d'ordine qualunque nel moto di una figura piana nel suo piano.



Le proprietà principali di queste accelerazioni si deducono dal teorema:

« Esiste in ogni istante un punto della figura piana mobile nel suo piano la cui accelerazione di un dato ordine è nulla (centro delle accelerazioni di quell'ordine) e le accelerazioni degli altri punti sono

proporzionali ai raggi che congiungono questi punti al centro delle accelerazioni, e fanno con questi raggi angoli uguali » [1].

La teoria dei vettori mi suggerisce una dimostrazione molto semplice di questo teorema.

Sia P un punto della figura mobile, $P' = \frac{dP}{dt}$ la sua velocità (accelerazione d'ordine zero), $P^{(n)} = \frac{d^nP}{dt^n}$ la sua accelerazione d'ordine $n-1$, ω la velocità angolare istantanea, ω', ω'', ω'''... le derivate di ω rispetto al tempo, i l'unità immaginaria, cioè il fattore che produce la rotazione di un angolo retto.

È ben noto che se P_1 è un punto della figura, e C è il centro istantaneo di rotazione alla fine del tempo t, il vettore P'_1 è normale al vettore $P_1 - C$ e $\frac{\text{grand. } P'_1}{\text{grand. } (P_1 - C)} = \omega$, quindi

$$P'_1 = \omega(P_1 - C)i \; ; \qquad P'_2 = \omega(P_2 - C)i$$

ed anche:

$$P'_1 - P'_2 = \omega(P_1 - P_2)i \; .$$

Derivando successivamente rispetto a t, si ha:

$$P_1'' - P_2'' = (-\omega^2 + \omega' i)(P_1 - P_2)$$
$$P_1''' - P_2''' = [-3\omega\omega' + i(\omega'' - \omega^3)](P_1 - P_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ed in generale:

$$P_1^{(n)} - P_2^{(n)} = (a + bi)(P_1 - P_2) = \rho(P_1 - P_2)e^{i\varphi} \qquad (1)$$

dove a e b, e quindi ρ e φ, sono funzioni facili a determinarsi di ω e delle sue successive derivate rispetto a t, cioè funzioni del tempo, e costanti rispetto ai punti della figura.

Dalla (1) si deduce:

$$P = P_1 + \frac{1}{\rho}(P^{(n)} - P_1^{(n)})e^{-i\varphi} \qquad (2)$$

e questa formola ci determina il punto P di data accelerazione $P^{(n)}$.

Se O è il punto d'accelerazione zero, sarà:

$$O = P_1 - \frac{1}{\rho} P_1^{(n)} e^{-i\varphi} \qquad (3)$$

ed è un punto del piano a distanza finita quando $\rho > 0$.

---

[1] J. Somoff, *Kinematik Uebersetzt von A. Ziwet.* Lipsia 1878, p. 340.

Dalla (3) si deduce:

$$P^{(n)} = \rho(P - O)e^{i\varphi} \tag{4}$$

e questa formola dimostra il teorema.

L'argomento φ è l'angolo costante delle accelerazioni, il modulo ρ è il rapporto costante dell'accelerazione di un punto alla distanza di questo punto dal centro.

Per le velocità si ha: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\rho = \omega$.

Per le accelerazioni di 1° ordine:

$$\rho = \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}, \qquad \varphi = \text{arc cos}\left(-\frac{\omega^2}{\rho}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{\omega'}{\rho}\right).$$

Per le accelerazioni di 2° ordine:

$$\rho = \sqrt{9\omega^2\omega'^2 + (\omega'' - \omega^3)^2}, \quad \cos\varphi = -\frac{3\omega\omega'}{\rho}, \quad \text{sen}\,\varphi = \frac{\omega'' - \omega^{3'}}{\rho}.$$

Se ω è costante, sarà:

$$P^{(n)} - P_1^{(n)} = (\omega i)^n(P - P_1)$$
$$P^{(n)} = (\omega i)^n(P - O);$$

quindi:

1°) Se n è pari le accelerazioni d'ordine $n-1$ concorrono in un punto O, che ne è il centro, ed i punti della figura corrispondono agli estremi delle loro accelerazioni in una omotetia di centro O e di ragione $\frac{1}{1+(i\omega)^n}$.

2°) Se n è dispari le accelerazioni d'ordine $n-1$ sono normali alle congiungenti i loro punti d'applicazione col centro delle accelerazioni, come avviene per le velocità.



Molte ed interessanti proprietà di queste accelerazioni d'ordine qualunque sono state studiate [1]; accennerò ad alcune altre che per quanto ovvie, mi sembrano degne di nota.

Se da O (centro delle accelerazioni) conduco due rette ortogonali inclinate degli angoli φ (angolo delle accelerazioni) e $\frac{\pi}{2} + \varphi$ su di

---

(1) Burmester, *Ueber den Bescleunigungszustand änlich veränderlicher und starrer ebener Systeme* (Hartig's Civilingenieur, Bd. XXIV, p. 153). — E. Novarese, *Sulle accelerazioni nel moto di una figura piana nel proprio piano* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIX, 1884).

una retta r, che incontrino la r in P ed H, sarà $P^{(n)}$ diretta secondo la r ed $H^{(n)}$ normale alla r.

Chiamerò *polo* di una retta r il punto di essa la cui accelerazione è diretta secondo la retta stessa, ed *ortopolo* il punto la cui accelerazione è normale alla retta.

Su di ogni retta esiste un polo ed un ortopolo, e questi due punti sono veduti sotto angolo retto dal centro delle accelerazioni.

Le rette che contengono le accelerazioni dei punti di una retta inviluppano una parabola [1] tangente alla retta, il cui fuoco è il centro delle accelerazioni. Il polo della retta è il punto di contatto della retta stessa colla parabola, e l'ortopolo è il punto d'incontro della retta colla direttrice della parabola.

I poli dei raggi di un fascio di centro P_1 stanno su di una circonferenza che dirò *polare* di P_1 che passa per P_1, per O, ed è tangente alla $P_1^{(n)}$.

Gli ortopoli dei raggi dello stesso fascio stanno su di una circonferenza che dirò *ortopolare* di P_1 che passa per P_1, per O, ed è normale alla $P_1^{(n)}$.

I punti diametralmente opposti a P_1 nelle due circonferenze corrispondenti sono allineati con O.

Ogni circonferenza passante per O è *polare* ed *ortopolare* degli estremi del diametro di essa che fa colla centrale condotta per O gli angoli $\pi - 2\varphi$ e 2φ.

Ai punti del piano corrispondono come polari ed ortopolari le circonferenze passanti per O.

I cerchi polari (ed ortopolari) corrispondenti ai punti di una retta formano fascio intorno al punto O ed al polo (ovvero all'ortopolo) della retta. I due fasci hanno di comune il cerchio che ha per diametro la congiungente il polo coll'ortopolo della retta.

Siano Q_1 ed H_1 i punti diametralmente opposti di un punto P_1 nelle sue circonferenze polari ed ortopolari; mentre P_1 descrive una retta r, Q_1 ed H_1 descrivono le normali alla r in P (polo) ed H (ortopolo) della r. Le due punteggiate descritte da Q_1 ed H_1 sono prospettive rispetto al centro O, ed i raggi del fascio che le proietta da O sono ortogonali ai raggi del fascio che proietta da O la punteggiata descritta da P_1.

Ai raggi di un fascio di centro S nel piano si possono far corrispondere univocamente le circonferenze polari (od ortopolari) dei punti in cui questi raggi incontrano una data retta r; le intersezioni di

---

[1] E. NOVARESE, l. c.

questi raggi colle circonferenze corrispondenti stanno sulla circonferenza polare (od ortopolare) di S.

Quindi il teorema di geometria: Dato un fascio di circonferenze ed una trasversale r per uno dei punti base del fascio, ad ogni circonferenza si può far corrispondere il raggio che proietta da un punto S del piano il secondo punto d'incontro della circonferenza colla r. I punti d'incontro dei raggi del fascio di centro S colle circonferenze corrispondenti (che non stanno sulla r) stanno su di una circonferenza che passa per S e per il 2° punto base del fascio di cerchi.

Torino, gennaio 1893. F. Castellano.

Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio.

Nota di Geminiano Pirondini.

1.

Se L_t, L_b, L_n sono le indicatrici sferiche delle tangenti, delle binormali e delle normali principali di una stessa linea L (ρ, r, s), è noto che L_t e L_b sono curve sferiche geodeticamente parallele, distanti fra loro di un quadrante ed aventi per evoluta sferica comune l'indicatrice delle tangenti dello spigolo di regresso L' della sviluppabile rettificatrice di L; e che la linea L_n è il luogo degli estremi dei quadranti tangenti alle L_t, L_b.

Se dunque delle tre linee sferiche L_t, L_b, L_n si conosce la prima o la seconda, è facile costruire le altre due.

Quando poi sia dato L_n, si osserverà che essa si può considerare come l'indicatrice delle binormali di L'; e perciò la L_t sarà una sviluppante sferica della linea geodeticamente parallela ad L_n e distante da essa di un quadrante. Costruita la L_t, sarà facile ricavare L_b.

Si deduce di qui che se due linee dello spazio L, L_1 hanno le normali principali parallele, le linee L_n, L_{1n} coincidono e le due L_t, L_{1t} sono geodeticamente parallele. Dunque:

Se due linee dello spazio hanno le normali principali rispettivamente parallele, le tangenti in punti corrispondenti formano un angolo costante.

Applichiamo queste considerazioni alla dimostrazione di un teorema di Bertrand.

Se L è una linea qualunque, L_1 il luogo degli estremi dei segmenti eguali a k staccati sulle normali principali e θ l'angolo delle tangenti alle linee L, L_1 in punti corrispondenti, si ha la relazione

$$\frac{k \cot \theta}{r} - \frac{k}{\rho} = 1 \,. \tag{1}$$

Ciò posto, se le normali principali delle curve L, L_1 coincidono, θ è costante e la (1) mostra che fra la curvatura e la torsione di L ha luogo una relazione lineare a coefficienti costanti.

Reciprocamente fra la curvatura e la torsione di L si abbia la relazione

$$\frac{a}{r} + \frac{b}{\rho} = 1 \,,$$

con a e b costanti. Costrutta come dianzi la curva L_1, si avrà la relazione (1), la quale, confrontata colla relazione data, mostra che θ è costante.

Se A e A_1 sono due punti corrispondenti delle L, L_1, il piano che passa per la tangente in A alla L ed è parallelo alla tangente in A_1 alla L_1 (contenendo la tangente ed essendo perpendicolare alla normale principale di L) è il piano rettificante di L. Le immagini sferiche di punti corrispondenti delle linee L, L_1 sono dunque sopra archi di gran cerchio tangenti all'indicatrice dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L; e poichè le tangenti corrispondenti delle linee L, L_1 formano un angolo costante, le indicatrici delle tangenti delle L, L_1 sono geodeticamente parallele e conseguentemente le indicatrici delle normali principali coincidono.

Le curve L ed L_1 hanno così le normali principali parallele; e siccome queste normali principali, considerate a due a due, hanno un punto comune, coincidono.

La dimostrazione precedente è molto più semplice di tutte quelle che si dànno comunemente [1].

2.

Supposto ora che la sfera rappresentativa abbia il raggio $=1$, l'arco elementare di L_t misura l'angolo di contingenza di L e l'angolo di contingenza di L_t è eguale all'angolo di due normali consecutive di L. Perciò

$$ds_t = \frac{ds}{\rho} \,, \qquad \frac{ds_t}{\rho_t} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}} \,.\, ds \,.$$

---

[1] V. per es. P. Serret, *Théorie des lignes à double courbure.*

Il piano osculatore della L_t è parallelo al piano che passa per la normale principale di L parallelamente alla consecutiva, cioè è parallelo al piano determinato dalla binormale e parallelo alla consecutiva nella curva L′ spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L. Ma essendo la curva L′ linea di stringimento della superficie rigata, luogo delle sue binormali, il piano precedente è il piano normale di L′.

Perciò: *Il piano osculatore dell'indicatrice* L_t *è parallelo al piano normale dello spigolo di regresso* L′ *della sviluppabile rettificatrice di* L.

Essendo allora l'angolo di torsione di L_t eguale all'angolo di contingenza di L′, si avrà

$$\frac{ds_t}{r_t} = \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds} . ds ;$$

e queste equazioni dànno immediatamente

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_t} = \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}, \qquad \frac{1}{r_t} = \rho . \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds} .$$

Indicando poi con R_t il raggio di curvatura geodetica della linea sferica L_t, si ha

$$R_t = \frac{r}{\rho} .$$

Gli angoli di contingenza e di torsione di L_b sono manifestamente eguali a quelli di L_t; essendo per di più l'angolo di torsione di L misurato dall'arco elementare di L_b, si ha

$$ds_b = \frac{ds}{r}, \qquad \frac{ds_b}{\rho_b} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}} . ds, \qquad \frac{ds_b}{r_b} = \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds} . ds .$$

E da queste equazioni si ricava

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho_b} = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}, \qquad \frac{1}{r_b} = r \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}, \qquad R_b = \frac{\rho}{r} .$$

Poichè l'arco elementare di L_n misura l'angolo di due normali principali consecutive di L, si ha

$$ds_n = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}} . ds .$$

Determiniamo la direzione della tangente di L_n. La tangente nel punto A_n di L_n è perpendicolare al raggio OA_n ed è situata nel piano

dei due raggi consecutivi OA_n, OA'_n; essa è dunque parallela alla retta H condotta normalmente alla superficie gobba delle normali principali di L, nel punto centrale. Ma, essendo le normali principali di L parallele alle binormali di L', spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L, la minima distanza di due normali principali consecutive di L è parallela alla tangente di L'. La retta H è dunque parallela alla normale principale di L'.

Dunque: *La tangente in un punto qualunque di* L_n *è parallela alla normale principale della linea* L', *spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di* L.

In conseguenza di ciò l'angolo di contingenza di L_n è eguale all'angolo di due normali principali consecutive di L'; perciò:

$$\frac{ds_n}{\rho_n} = \sqrt{\left(\frac{ds'}{\rho'}\right)^2 + \left(\frac{ds'}{r'}\right)^2}.$$

Ora

$$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds};$$

e d'altronde, essendo le binormali di L' parallele alle normali principali di L, l'angolo di torsione di L' è eguale all'angolo di due normali consecutive di L. Perciò

$$\frac{ds'}{r'} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}} \,.\, ds$$

e quindi

$$\frac{ds_n}{\rho_n} = \sqrt{\left\{\frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}\right\}^2 + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)} \,.\, ds\,.$$

Determiniamo la direzione del piano osculatore di L_n. La tangente di L_n è parallela alla normale principale di L', quindi è parallela alla binormale dello spigolo di regresso L'' della sviluppabile rettificatrice di L'. Dunque il piano osculatore di L_n è parallelo al piano che passa per la binormale di L'' ed è parallelo alla binormale consecutiva, vale a dire: *Il piano osculatore di* L_n *è parallelo al piano normale dello spigolo di regresso* L'' *della sviluppabile rettificatrice dello spigolo di regresso* L' *della sviluppabile rettificatrice di* L.

L'angolo di torsione di L_n è dunque eguale all'angolo di contingenza di L''; quindi

$$\frac{ds_n}{\rho_n} = \frac{ds''}{\rho''} = d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r'}{\rho'}\right) = \frac{d}{ds} \,.\, \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\rho r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} \frac{d}{ds} \,.\, \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right\} ds\,.$$

Dalle formole precedenti si ricava

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_n} = \sqrt{1 + \dfrac{\rho^2 r^2}{\rho^2 + r^2} \cdot \left\{ \dfrac{d \operatorname{arc\,tg} \left(\dfrac{r}{\rho} \right)}{ds} \right\}^2} \\ \dfrac{1}{r_n} = \dfrac{\rho r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} \cdot \dfrac{d \operatorname{arc\,tg} \left\{ \dfrac{\rho r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} \dfrac{d \operatorname{arc\,tg} \left(\dfrac{r}{\rho} \right)}{ds} \right\}}{ds} . \end{cases}$$

3.

Applicazioni. — 1ª). Sia A un punto qualunque dell'indicatrice L_t, A' il primo centro di curvatura sferica e A'' il secondo centro di curvatura. Il triangolo sferico rettangolo AA'A'' dà

$$\operatorname{tang} (A'\widehat{A}A'') = \frac{\operatorname{tang} (A'A'')}{\operatorname{sen} (AA')} ;$$

ma evidentemente

$$\operatorname{tang} (AA') = R_t = \frac{r}{\rho} , \quad \text{d'onde} \quad \operatorname{sen} (AA') = \frac{r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} .$$

D'altronde tang (A'A'') è il raggio di curvatura geodetica R'_t della indicatrice delle tangenti dello spigolo di regresso L' della sviluppabile rettificatrice di L e perciò:

$$\operatorname{tang} (A'A'') = R'_t = \frac{r'}{\rho'} = \frac{\dfrac{d}{ds} \operatorname{arc\,tg} \left(\dfrac{r}{\rho} \right)}{\sqrt{\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{r^2}}} .$$

Sarà quindi

$$\operatorname{tang} (A'AA'') = \rho \frac{d \operatorname{arc\,tg} \left(\dfrac{r}{\rho} \right)}{ds} = \frac{1}{r_t} .$$

Perciò, se chiamiamo i l'inclinazione dell'arco AA'' sulla linea sferica L, avremo

$$r_t = \cot (A'AA'') = \operatorname{tang} i ,$$

e cioè: *Il raggio di torsione di una linea sferica qualunque è eguale alla tangente dell'angolo sotto il quale questa linea è segata dall'arco di cerchio massimo che congiunge il punto considerato della curva col secondo centro corrispondente di curvatura sferica.*

Osservando che il raggio della sfera che va in A è parallelo alla tangente di L, e che il raggio che va in A″ è parallelo alla retta rettificatrice di L′ (retta che chiameremo seconda retta rettificatrice di L) abbiamo:

Le linee dello spazio aventi per indicatrice delle tangenti una curva a torsione costante sono caratterizzate dalla relazione analitica

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tang}\left(a + k\int \frac{ds}{\rho}\right), \tag{5}$$

che lega i suoi due raggi di curvatura e dalla proprietà geometrica che è costante l'angolo formato dal piano osculatore col piano condotto per la tangente parallelamente alla seconda retta rettificatrice.

2ª). Le geodetiche delle sviluppabili a cono direttore di rivoluzione sono caratterizzate dalla proprietà che le normali principali sono inclinate di un angolo costante sopra una retta fissa. In tale caso l'indicatrice delle normali principali è una circonferenza; e questo, in forza delle (4), avviene sempre e soltanto quando si abbia

$$\frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds} = k\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}\,. \tag{6}$$

Se L è una delle curve (6) ed L_1 una sua sviluppante, si può sempre supporre che L_1 sia una linea di curvatura di una certa superficie S; se ω è l'angolo sotto il quale il piano osculatore di L_1 sega S, si ha

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{r}{\rho}$$

e il primo membro di (6) diviene $\frac{d\omega}{ds}$. Se poi $d\varepsilon$ è l'angolo di due normali principali consecutive di L, si ha

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}\,;$$

ma siccome le normali principali di L sono parallele alle tangenti di L_1 si ha

$$d\varepsilon = \frac{ds_1}{\rho_1}\,.$$

Perciò la relazione (6) diviene

$$d\omega = k\,\frac{ds_1}{\rho_1}\,,$$

d'onde integrando

$$\omega = a + k \int \frac{ds_1}{\rho_1} \cdot$$

Se invece noi supponiamo che L sia una curva (5) ed L_1 una sua evolvente e che inoltre sia tracciata una superficie S di cui L_1 è una linea di curvatura, avremo

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{r}{\rho}$$

e da questa, in causa della (5)

$$\omega = a + k \int \frac{ds}{\rho} \cdot$$

Dunque: *Se* L *è una linea di curvatura di una superficie* S *ed* L_1 *la geodetica corrispondente dell'evoluta di* S, *la relazione*

$$\omega = a + k \int \frac{ds}{\rho}$$

è caratteristica per le linee L *che hanno per indicatrice sferica delle tangenti una linea a curvatura costante o a torsione costante, secondo che gli elementi s, ρ si riferiscono alla* L_1 *o alla* L.

Nel primo caso la linea di curvatura è un'elica.

3ª) Dalle equazioni che dànno $\frac{1}{\rho_t}$ e $\frac{1}{\rho_b}$, eliminando il rapporto $\frac{r}{\rho}$, si deduce

$$\rho^2_t + \rho^2_b = 1 \ .$$

Quindi: *La somma dei quadrati dei raggi di curvatura corrispondenti di due linee sferiche geodeticamente parallele e distanti fra loro di un quadrante, è costante ed eguale al quadrato del raggio della sfera.*

Dalle equazioni (2) e (3) si ricava

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\rho_t}{\rho_b} = \frac{r_t}{r_b} \,,$$

cioè: *Il rapporto del raggio di torsione al raggio di curvatura di una linea qualunque è eguale al rapporto del raggio di curvatura o di torsione dell'indicatrice delle tangenti, al raggio di curvatura o di torsione dell'indicatrice delle binormali.*

Deriva di qui la proporzione

$$\frac{\rho_t}{r_t} = \frac{\rho_b}{r_b} \,,$$

cioè : *In due linee sferiche geodeticamente parallele e distanti fra loro di un quadrante il rapporto del raggio di curvatura al raggio di torsione è il medesimo.*

4.

Se L e L_1 sono due linee dello spazio aventi le normali principali parallele, le loro indicatrici delle normali principali coincidono.

Perciò le formole (4), relative alla linea L, coincidono colle altre che si deducono dalle (4) cambiando ρ, r, s in ρ_1, r_1, s_1. Si riconosce allora facilmente che le equazioni che si ottengono si riducono alle altre

$$\frac{\rho r}{\sqrt{\rho^2+r^2}}=\frac{\rho_1 r_1}{\sqrt{\rho_1^2+r_1^2}}\frac{ds}{ds_1}, \qquad d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)=d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right).$$

Si supponga che sulle linee L, L_1 i punti in cui le normali principali sono parallele, siano quelli per i quali $s=s_1$. L'ultima delle precedenti dà

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{a}\right)$$

con a costante arbitraria. Di qui si ricava

$$\frac{r_1}{\rho_1}=\frac{\rho+ar}{a\rho-r};$$

ed allora, considerando quest'equazione e la prima delle precedenti, si ottiene

$$(7)\qquad \frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{1}{r}+\frac{a}{\rho}\right); \qquad \frac{1}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{a}{r}-\frac{1}{\rho}\right).$$

Perciò: *Se due linee a doppia curvatura si corrispondono punto per punto in modo, che in punti corrispondenti gli archi siano eguali e le normali principali siano parallele, la curvatura e la torsione di ciascuna di esse sono funzioni lineari della curvatura e della torsione dell'altra.*

Ne viene di conseguenza che se una delle linee è a curvatura costante, ovvero a torsione costante, ovvero è un'elica, ovvero una linea di Bertrand, l'altra è, in generale, una linea di Bertrand.

Sono nella condizione delle linee precedenti due geodetiche corrispondenti di due superficie ad area minima coniugate.

Però fra gli elementi di queste linee vi è un'altra relazione, che non si ha quando esse si considerino libere nello spazio.

Siano L ed L_1 due linee corrispondenti qualunque di due superficie ad area minima coniugate; rappresentando le due superficie sopra una sfera col metodo di Gauss, le immagini delle due curve L ed L_1 coincidono in una sola curva l.

Sia p un punto qualunque di l corrispondente ai punti P e P_1 di L e L_1. Sia poi L_c una linea di curvatura di S passante per P e L_a l'assintotica corrispondente di S_1 passante per P_1. Siccome le linee di curvatura di una superficie nella rappresentazione di Gauss non soffrono deviazioni, ed invece le assintotiche deviano di un angolo retto dalla direzione primitiva [1], la tangente in p alla l è parallela alla tangente di L_c in P e ortogonale alla tangente di L_a in P_1. Le tangenti di L_c e L_a in punti corrispondenti P e P_1 sono dunque perpendicolari.

Essendo quindi le normali alle due superficie in P e P_1 parallele ed inoltre l'inclinazione delle curve L, L_c eguale a quella delle curve L_1, L_a, si conclude che sono pure ortogonali le tangenti delle L, L_1 in punti corrispondenti.

Dunque: *Se due superficie ad area minima coniugate in applicabilità sono orientate in modo che le normali in punti corrispondenti siano parallele, si ha che le tangenti a due linee corrispondenti in punti corrispondenti sono perpendicolari.*

Ora se L e L_1 sono due geodetiche corrispondenti delle superficie, l'indicatrice delle tangenti di L sarà l'indicatrice delle binormali di L_1 e conseguentemente il raggio di curvatura dell'indicatrice delle tangenti di L sarà eguale al raggio di curvatura dell'indicatrice delle binormali di L_1. Avremo dunque

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\rho_1}{r_1} ;$$

e questa relazione, unita alle (7), ci dà

$$\rho_1 = r , \qquad r_1 = -\rho .$$

Si ha così il seguente teorema dimostrato per altra via dal signor prof. Bianchi [2]: *Quando una superficie ad area minima* S *si è ridotta per flessione alla sua coniugata* S_1, *sopra di questa si trova che una geodetica qualunque ha acquistato per raggio di curvatura e di torsione il raggio di torsione e di curvatura che sopra* S *aveva la geodetica corrispondente.*

---

(1) Dini, *Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni.* (*Annali di Matematica*, serie II, tomo IV).

(2) *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie minime.* (*Giornale di Battaglini*, 1884).

5.

Sia
$$dS^2 = Edu^2 + Gdv^2$$
il quadrato dell'elemento lineare di una superficie S riferita alle sue linee di curvatura e
$$dS'^2 = E'du^2 + G'dv^2$$
il quadrato dell'elemento lineare corrispondente della sfera, sulla quale si rappresenta la superficie col metodo di Gauss.

Essendo L una linea di curvatura del sistema $v =$ cost. e L' la sua immagine sferica, poichè le tangenti di queste due linee in punti corrispondenti sono parallele e così pure i piani osculatori, si avrà

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{ds'}{\rho'}, \qquad \frac{ds}{r} = \frac{ds'}{r'}.$$

Ora, se R è il raggio di curvatura principale della superficie S relativo alle linee di curvatura $v =$ cost., si ha

$$R = \sqrt{\frac{E}{E'}}.$$

Perciò avremo

$$\rho' = \frac{\rho}{R}, \qquad r' = \frac{r}{R}. \tag{8}$$

Consideriamo due superficie ad area minima coniugate, nel senso stabilito da Bonnet; sia L_c una linea di curvatura sopra una di esse e L_a la linea assintotica corrispondente sull'altra. Le normali alle due superficie in punti corrispondenti delle due linee L_c, L_a sono parallele, e quindi, rappresentando le due superficie sopra una medesima sfera col metodo di Gauss, si trova che le due immagini sferiche di L_c e L_a coincidono.

Fra i raggi di curvatura ρ_c, r_c di L_c e quelli ρ'_c, r'_c della sua immagine L' sussistono le relazioni (8)

$$\rho'_c = \frac{\rho_c}{R}, \qquad r'_c = \frac{r_c}{R}.$$

essendo R il valore assoluto dei raggi di curvatura della superficie data.

In quanto ad L_a, essa ha per immagine sferica l'indicatrice delle sue binormali; e perciò, in causa delle equazioni (3), fra i raggi di cur-

vatura ρ_a, r_a di L_a e quelli ρ'_a, r'_a della sua immagine L'_a sussistono le relazioni

$$\frac{1}{\rho'_a} = \sqrt{1 + \left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)^2}, \quad \frac{1}{r'_a} = r_a \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)}{ds_a}.$$

Osservando quindi che $\rho'_c = \rho'_a$ e $r'_c = r'_a$, avremo

$$\frac{R}{\rho_c} = \sqrt{1 + \left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)^2}, \quad \frac{R}{r_c} = \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)}{ds_a}.$$

Ora notiamo che le due superficie ad area minima coniugate sono applicabili e quindi, nella deformazione di una nell'altra, il valore del raggio di curvatura R rimane immutato. Ma quando L_c si è trasformato in L_a, si verifica il noto teorema di ENNEPER sulla torsione delle assintotiche, teorema che è espresso dall'equazione

$$R = r_a .$$

Introducendo questa condizione nelle precedenti equazioni e risolvendo poi le equazioni ottenute anche rapporto a ρ_a e r_a, si ha il teorema:

Fra i raggi di curvatura ρ_c, r_c di una linea di curvatura di una superficie ad area minima e i raggi di curvatura ρ_a, r_a dell'assintotica corrispondente della superficie ad area minima coniugata alla prima, hanno luogo le relazioni

$$\frac{1}{\rho_c} = \sqrt{\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{r_a^2}}, \quad \frac{1}{r_c} = \frac{d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_a}{\rho_a}\right)}{ds_a}$$

$$\frac{1}{\rho_a} = \frac{\operatorname{sen}\left(k + \int \frac{ds_c}{r_c}\right)}{\rho_c}, \quad \frac{1}{r_a} = \frac{\cos\left(k + \int \frac{ds_c}{r_c}\right)}{\rho_c},$$

essendo k una costante arbitraria.

Dalle relazioni precedenti si rileva immediatamente che l'angolo di contingenza di L_c è eguale all'angolo di 2 normali principali consecutive di L_a; e che l'angolo di torsione di L_c è eguale all'angolo di contingenza dello spigolo di regresso della sviluppabile rettificatrice di L_a.

La condizione che risulti $\frac{1}{r_c} = 0$ è equivalente all'altra che risulti $\frac{r_a}{\rho_a}$ costante.

Perciò: *Se la linea di curvatura* L_c *è piana, la linea assintotica* L_a *è un'elica, e reciprocamente.*

Quando r_c sia una costante h, si ha

$$\frac{r_a}{\rho_a} = \text{tang}\left(\frac{s_a}{h} + k\right).$$

e reciprocamente. Notando quindi che $\frac{r_a}{\rho_a}$ rappresenta la tangente dell'angolo i sotto il quale la linea L_a sega le generatrici della sviluppabile rettificatrice, si ha:

Se la linea di curvatura L_c *è a torsione costante, l'assintotica* L_a *sega le rette rettificatrici sotto un angolo funzione lineare dell'arco; e reciprocamente.*

Si osservi che se L è una linea qualunque ed L_1 una sua sviluppante, si può sempre considerare L_1 come linea di curvatura di una certa superficie ed L come la geodetica corrispondente dell'evoluta.

Applicando allora le (2), (8), si ha

$$\rho_1 = R\rho_l = = R\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}, \qquad r_1 = Rr_l = R\,.\,\rho\,\frac{d\,\text{arc tg}\left(\frac{r}{\rho}\right)}{ds}.$$

essendo R la distanza fra i punti corrispondenti delle linee L, L_1.

6.

Per mostrare, con un ulteriore esempio, quale utile partito si possa trarre dalla teoria delle indicatrici nello studio di molte questioni geometriche, applicheremo le formole del § 2 alla risoluzione di un problema inerente alle superficie rigate.

Si deformi per flessione e con continuità una superficie rigata Σ in modo che le generatrici rimangano rettilinee e, per ciascuno stato che assume la Σ si costruisca la superficie rigata coniugata Σ_1. Si vuol vedere se le infinite forme assunte da queste superficie Σ_1 si possono considerare ottenute deformando per flessione una stessa superficie rigata.

Incominciamo dal notare che le generatrici di Σ, quelle di Σ_1 e le normali comuni alle due superficie coniugate lungo la loro linea di stringimento comune L_0 sono parallele alle tangenti, alle binormali e alle normali principali di una stessa curva L (ρ, r) *(direttrice)*. Se dunque chiamiamo ε ed ε_1 gli angoli infinitesimi di due generatrici consecutive delle Σ e Σ_1, avremo

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{r}{\rho}.$$

Nella deformazione di Σ la quantità ε rimane invariata; se quindi anche la Σ_1 si deforma per flessione, la ε_1 deve pure essere invariabile. Quindi sarà invariabile il rapporto $\frac{r}{\rho}$, cioè (§ 1) il raggio di curvatura geodetica dell'indicatrice delle tangenti di L (*direttrice sferica della superficie rigata*).

Sia A la direttrice sferica della superficie Σ, considerata nella forma primitiva e B la direttrice di una deformata di Σ. Poichè l'arco elementare di queste curve misura l'angolo infinitesimo di due generatrici consecutive, il quale angolo rimane inalterato nelle predette deformazioni, avremo che le due linee sferiche A e B si corrispondono punto per punto in modo, che in punti corrispondenti gli archi sono eguali e i raggi di curvatura geodetica sono i medesimi. Dovendo allora le due curve sferiche A e B avere i loro raggi di curvatura geodetica esprimibili per una stessa funzione del loro arco, sono identiche di forma e solamente differiscono per la loro posizione sulla sfera.

L'indicatrice delle tangenti della linea di stringimento L_0 corrispondente alla forma primitiva di Σ è una linea sferica a che si ottiene dalla A staccando sugli archi di gran cerchio normali ad A degli archi misuranti le inclinazioni di L_0 sulle generatrici di Σ. Costruendo in egual modo l'indicatrice b delle tangenti della linea di stringimento L'_0 corrispondente alla nuova forma di Σ, si ha che pure a e b sono identiche di forma.

E dando al sistema di linee B, b, invariabilmente connesse fra loro, un conveniente movimento sulla sfera, si può farle coincidere colle linee A, a.

Dando quindi alla superficie deformata di Σ un conveniente movimento nello spazio, si può far sì, che le generatrici divengano parallele alle corrispondenti della superficie Σ e che le tangenti alla linea L'_0 divengano parallele alle corrispondenti di L_0.

Allora in questa posizione le due curve L_0, L'_0 si corrispondono punto per punto in modo, che in punti corrispondenti gli archi sono eguali e le tangenti parallele; e quindi esse sono eguali. Ciò porta alla conseguenza che le due superficie Σ e Σ' sono identiche, il che non può essere, essendo avvenuta una deformazione per flessione della Σ onde ridursi alla Σ'.

Abbiamo dunque il teorema: *Se una superficie rigata Σ si deforma per flessione, conservando rettilinee le generatrici, e per ciascuna forma di Σ si costruisce la superficie coniugata Σ_1, fra le infinite superficie Σ_1 non se ne possono mai trovare due che siano applicabili fra loro, colla condizione che le generatrici rettilinee siano corrispondenti.*

RECENSIONE

Elementi di Aritmetica e Algebra, esposti con metodo sintetico da GIOVANNI BIASI (Sassari, Giovanni Gallizzi).

« Non ho potuto seguire il sig. Bettazzi, dal quale tolsi alcune denominazioni, nello studiare le grandezze indipendentemente dal concetto di numero intero, ... Allo studio delle grandezze posi dunque innanzi una breve teorica dei numeri naturali; e siccome questi, nella loro origine, sono riguardati da taluni come indici d'ordine, da altri come quantità o somme di unità, tentai conciliare i due metodi . . . . . » (Prefazione, pag. III e IV).

Non risulta ben chiaro che cosa l'A. intenda dire con le parole « come indici di ordine » e « come quantità o somme di unità », ma se avesse voluto dire, come pare possa rilevarsi dal testo, che il concetto di numero può ottenersi da quello di ordine o da quello di successivo (insieme ad altri), allora avrebbe detto cosa non ancora provata, perchè non abbiamo una *teoria* del numero intero dedotta dal concetto di ordine, mentre abbiamo una completa teoria del numero intero dedotta dal concetto di successivo e della quale il concetto di ordine è conseguenza, dipendentemente anche dal concetto di corrispondenza univoca e reciproca. Nè l'A. tentando conciliare i due metodi, ha provato che il primo sia possibile, anzi, allo scopo di togliere l'inconveniente accennato nell'opera del prof. Bettazzi, cade nell'altro più grave di trattare con pochissimo rigore scientifico la teoria del numero intero — e in gran parte anche delle grandezze — teoria che può dirsi oggi completamente nota.

Ecco infatti su quali definizioni basa l'A. la teoria del numero intero.

N. 1, pag. 1. « Per *cosa* si intenderà qualunque oggetto del nostro pensiero ». E che cosa significa?

« Una cosa e un'altra insieme sono *due* cose . . . . . ; l'una si dirà *prima* . . . . . l'altra . . . . . ». È con questa definizione che l'A., come avverte nella prefazione, intende di introdurre il concetto d'ordine. È però evidente che la definizione si limita ad *assegnare un nome a cose già note o supposte note*, e non dà nessuna delle loro proprietà caratteristiche.

N. 3, pag. 1. « Le cose semplici sono *diverse* o sono la stessa cosa ». E quando è che sono diverse? E cose *che sono la stessa cosa che cosa significa?* Non pare che l'A. abbia voluto definire l'eguaglianza perchè di questa parla al N. 10. Allora?

N. 4, pag. 2. « Un sistema si dirà *infinito* se dopo aver pensato più cose del sistema sia possibile pensarne altre ancora o, brevemente, se si possa *continuare indefinitamente* a pensare nuove cose del sistema. In caso diverso si dirà finito ». In altri termini, e molto brevemente, — *un sistema è infinito quando è infinito, è finito quando non è infinito.* —

La definizione dell'A. non significa altro. E bisogna notare poi esplicitamente, che in questa definizione sta la chiave della possibile *conciliazione dei due metodi,* già accennati, non essendo possibile di parlare di corrispondenza univoca e reciproca di due classi se esse non sono costituite da un numero finito di individui.

N. 10, pag. 4. « Due cose semplici sono eguali se sono la stessa cosa; due cose composte si dicono eguali se per lo scopo che ci proponiamo, si può prendere indifferentemente l'una o l'altra, ossia, se l'una può essere sostituita all'altra ». La definizione di eguaglianza di cose semplici ha del metafisico ed è ben difficile assegnargli un senso qualunque. Per la definizione di eguaglianza di cose composte (che non ha nessuna relazione con la precedente ed è quindi strano che sieno unite in uno stesso periodo) la parte che precede l'*ossia* suona, *due cose composte sono eguali quando sono eguali,* la parte che segue l'*ossia* non è vera in generale, com'è già stato indicato in questa *Rivista* (pag. 191, vol. II) (1). L'A. una volta presa la seconda parte di questa definizione ne trae partito fino a dimostrare la proposizione (pag. 5) $a = b . \supset . a + c = b + c$, mentre vi sono classi per le quali definita l'eguaglianza con le sue tre proprietà caratteristiche e l'operazione $+$ definita convenientemente, per la quale la proposizione riportata non è vera. P. e. la classe dei razionali, quando l'eguaglianza sia intesa nel senso ordinario e l'operazione $+$ sia tale che se a e b sono razionali, $a + b$ indichi la somma, nel senso ordinario aritmetico, dei loro numeratori.

N. 14, pag. 6. « Se le cose di una pluralità si considerano soltanto come cose, senza pensare agli elementi che distinguono le une dalle altre, la pluralità prende il nome di numero naturale . . . . . » È questa la *definizione* di numero intero, il cui significato matematico non esiste, e il cui significato ordinario porterebbe a concludere che, p. e., la classe delle rette di un piano o dello spazio diviene la classe dei numeri quando si faccia astrazione dalla posizione degli individui della classe.

N. 15. « *Teorema.* Un numero non varia se si muta in qualsiasi modo l'ordine delle sue unità ». Questo teorema avrebbe senso quando fosse stata data una relazione caratteristica tra l'ordine delle unità componenti la pluralità numero (secondo l'A.) e il numero, e fosse definito il significato della parola ordine. L'A. non ha fatto nè l'una cosa nè l'altra e quindi il teorema non ha alcun significato. Di più nella dimostrazione si trova (pagina 7, riga 10 e 11) « il numero delle une sarà eguale al numero delle

---

(1) La classe *eguaglianza,* della quale sono gruppi, la *proiettività,* il *parallelismo* (convenientemente definito), la *similitudine,* l'*equivalenza,* ... è definita, come è noto, se a, b, c sono individui della classe che si considera, dagli assiomi $a = a$; $a = b . = . b = a$; $a = b . b = c . \supset . a = c$. Il prof. De Amicis (*Rivista,* vol. II, pag. 113) dimostra (pag. 115, T. I) che la proposizione $a = a$ è conseguenza delle altre due, ammettendo come proprietà degli individui della classe G che si considera la seguente $a \varepsilon G . \supset : b \varepsilon G . a = b . -= \Lambda$, cioè *esistono* dei b eguali ad a. Con ciò egli viene ad ammettere come primitiva una proposizione più complicata di quella che vuol dimostrare, proposizione che serve, senza che sia necessario, a giustificare ipotesi di questa specie $a, b \varepsilon G . a = b$ . . . . .

altre » e con ciò l'autore ammette, senza averlo definito, come noto il significato della frase, *numero degli individui di una classe*, cioè, una volta di più, ammette completamente noto il concetto di numero intero che vuol definire.

N. 16, pag. 7. Il teorema, a, b sono numeri dei tre casi $a=b$, $a>b$, $a<b$ deve verificarsene uno ed uno solo, non è affatto dimostrato dall'A., nè può dedursi dalla definizione del N. 16, che contiene proprietà che precedentemente non sono state dimostrate.

N. 25, pag. 12. « Se essendo dati i numeri delle cose di più sistemi, astraendo dagli elementi distintivi di questi sistemi, le cose stesse si considerano come appartenenti ad un unico sistema, il numero delle cose di questo sistema si dice *somma* dei numeri dati . . . . . » L'*unico sistema* a cui i due sistemi appartengono non è detto dall'A. qual sia, perchè sarebbe stato costretto a dire che la somma è la somma, e quindi il suo teorema equivale al seguente:

$$a,\ b,\ c\,\varepsilon\,\mathrm{K}\,.\,a\,\mathrm{ɔ}\,c\,.\,b\,\mathrm{ɔ}\,c:\mathrm{ɔ}:\mathrm{num}\,a+\mathrm{num}\,b=\mathrm{num}\,c$$

che è un teorema falso.

N. 49, pag. 24. Dopo aver parlato della divisione come operazione inversa della moltiplicazione — e ciò poco opportunamente non essendo introdotti i razionali — ed aver detto che la moltiplicazione ammette una sola operazione inversa perchè $ab=ba$, aggiunge: « Tuttavia questi due casi ($ab=ba$) differiscono l'uno dall'altro nei problemi cui si applica la divisione, ossia quando si tenga conto della natura delle unità dei numeri sui quali si opera ». Quale unità, quella astratta di cui si è finora parlato o quella concreta di cui si parlerà in seguito? Se di quella astratta allora la proposizione non ha senso, se di quella concreta non ha ancora senso, poichè l'A. stesso non ha definito il significato di *prodotto di due grandezze*.

E lasciamo la teoria dei numeri interi per passare a quella delle grandezze.

A pag. 31, n. 66, l'A. dice che le cose di un sistema si chiameranno *grandezze*, quando esse avranno la proprietà *aggregativa uniforme*, l'*associativa* e la *commutativa*. Al n. 67 poi dice che il sistema di grandezze si chiamerà *ordinario* e *completo* quando, oltre che alle precedenti condizioni, soddisfa a quella che dati due individui del sistema, uno almeno di cui sia la risultante dell'altro e di un terzo individuo del sistema. Indicando con G la parola grandezza e con $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ (come l'A.) la risultante (o somma) delle grandezze A e B, secondo l'A. un sistema è *ordinario* e *completo* quando gode delle proprietà

$$\alpha)\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,\mathrm{ɔ}\,.\,\mathrm{A}\times\mathrm{B}\,\varepsilon\,\mathrm{G},$$
$$\beta)\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,\mathrm{ɔ}\,.\,\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\times\mathrm{C})=(\mathrm{A}\times\mathrm{B})\times\mathrm{C},$$
$$\gamma)\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,\mathrm{ɔ}\,.\,\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{B}\times\mathrm{A},$$
$$\delta)\ \mathrm{A},\ \mathrm{B}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,\mathrm{ɔ}:\mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{B}\times\mathrm{G}\,.\cup.\,\mathrm{B}\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times\mathrm{G}.$$

Così p. e. la classe dei numeri interi, dei razionali, dei numeri reali, dai quali si escluda lo zero, non è un sistema completo anche quando la

risultante sia l'ordinaria somma, poichè la proprietà δ non è vera, potendo due numeri essere eguali.

A pag. 45, n. 97, l'A. dice che « Date due grandezze A, B di un sistema ordinario completo e a un senso, o esse sono eguali, o A è la risultante di A e di una terza grandezza, o B è la risultante di A e di una terza grandezza. Deve aver luogo uno e uno solo dei casi seguenti

$$A = B \,.\, A > B \,.\, A < B \text{ ».}$$

In altri termini l'A. dalle proposizioni α, β, γ, δ dice potersi dedurre le proposizioni

$$\delta')\ A,\ B \varepsilon G \,.\, \supset : A = B \,.\cup .\, A \varepsilon B \times G \,.\cup .\, B \varepsilon A \times G$$
$$\gamma)\ A \varepsilon G \,.\, \supset \,.\, A -\varepsilon A \times G$$

(poichè è da γ che può dedursi l'esistenza di *uno solo* dei tre casi citati).

Ora che δ' non è conseguenza delle α, β, γ, δ è già stato dimostrato, che γ non è conseguenza delle stesse proposizioni si dimostra considerando i sistemi che contengono lo zero (o la grandezza indifferente).

Di più l'A. per la dimostrazione del teorema del n. 100 e altri, fa uso della proposizione $A,\ B \varepsilon G \,.\, A \stackrel{=}{>} B \,.\, \supset \,.\, A \cup B \varepsilon G$ (¹). E dove è stato dimostrato tale teorema? Non certo alla fine della pag. 45 ove dice solo che « Si noti poi che la divergenza $A \cup B$ è solo *possibile* se $A \stackrel{=}{>} B$ ». E del resto, come potrebbe dimostrarlo senza ammettere che il sistema ordinario e completo godesse della proprietà

$$\varepsilon)\ A,\ B,\ C \varepsilon G \,.\, A \times C = B \times C \,.\, \supset \,.\, A = B$$

per non parlare della proprietà

$$\eta)\ A,\ B,\ C \varepsilon G \,.\, A = B \,.\, \supset \,.\, A \times C = B \times C \text{ ?}$$

Che poi la ε non sia conseguenza delle proposizioni α, β, γ, δ si ha considerando p. e. la classe dei razionali, lo zero compreso, e dando ad $A \times B$ il significato dell'ordinario prodotto.

Non credo che ulteriori osservazioni sul *Trattato* del sig. Biasi possano destare alcun interesse nel lettore, essendo tutte basate nella deficienza di proprietà caratteristiche della classe di grandezze, e quindi sulla deficienza di accurata analisi per l'ordinamento del lavoro.

Torino, Gennaio 1893. BURALI-FORTI CESARE.

(¹) Il segno $\cup$ indica, secondo l'A., l'operazione inversa di quella già indicata con $\times$.

Sui sistemi lineari di coni.

Nota di Mario Pieri.

Si tratta qui di coni algebrici, irreduttibili, d'ordine qualunque, dello spazio ordinario; e il problema che si risolve è quello di assegnare tutti i sistemi lineari, che hanno tali superficie (considerate come *luoghi di punti*) per elementi generici, senza aver per sostegno una stella.

1. Sia (φ) un *fascio* di coni irreduttibili φ^n d'ordine n. Poichè per un punto arbitrario dello spazio passa una e (generalmente) una sola superficie di questo sistema, la totalità delle generatrici di tali coni non potrà essere che una *congruenza Kummeriana* (o del 1° ordine) Γ *di raggi*, vale a dire una stella di raggi, o il sistema delle corde di una cubica sghemba irreduttibile, o il sistema delle rette appoggiate simultaneamente ad una retta data c e ad una curva data irreduttibile γ^p d'ordine p, la quale incontri $p-1$ volte c $(p \geqq 1)$. Nel primo caso sarà (φ) un fascio di coni aventi per comun centro il centro della stella: viceversa è chiaro, che un fascio di coni φ^n col vertice in comune non può dar luogo a nessuno degli altri due casi. Il secondo caso è evidentemente impossibile; attesochè ogni cono irreduttibile composto di corde della cubica è necessariamente un cono quadrico proiettante la medesima da un suo punto qualunque, e l'insieme di tali coni costituisce un sistema ∞^1 d'indice 2.

Nel terzo caso infine una delle due linee *focali* c e γ^p sarà il luogo dei centri di tutti i coni del sistema, poi che ognuno di tali centri è punto *singolare* per Γ; e l'altra linea dovrà esser comune a tutti quanti i coni del sistema, dal momento che per ogni suo punto passano ∞^1 rette di Γ e quindi ∞^1 coni φ^n. Pertanto, se il luogo dei vertici è la curva γ^p, le superficie coniche φ saranno fasci di raggi proiettanti la retta c dai vari punti di γ (onde $n=1$); e se il luogo dei vertici è la retta c, i coni φ^n proietteranno la curva γ^p dai vari punti di c (onde $n=p$). Ed osservando che nell'un caso e nell'altro l'insieme di tutti i coni formati nel modo anzidetto è realmente un *fascio* di superficie (in quanto che per un punto qualunque dello spazio ne passa uno e generalmente uno solo), si deduce che:

« *Se* γ^n *è una curva* (*razionale*) *dotata di una secante* $(n-1)$-*pla* c,
« *gli* ∞^1 *fasci di raggi che proiettano la retta* c *dai punti di* γ *formano il più generale possibile tra i* f a s c i *di coni del* 1° *ordine a*
« *centro variabile; e gli* ∞^1 *coni* (*razionali*) *proiettanti la curva* γ^n *dai*
« *punti di* c (*quindi contenenti questa retta come generatrice* $(n-1)$-*pla*

« *e osculati lungo tutta la medesima dagli $n-1$ piani passanti per* « *essa e per le tangenti a γ^n negli $n-1$ punti comuni) formano il* « *più generale possibile tra i* f a s c i *di superficie coniche d'ordine* « *$n > 1$ a centro variabile* ». — La *base* del fascio è nell'un caso la retta c; nell'altro è formata dalla curva γ^n e dalla retta c contata $(n-1)^2+(n-1)=n(n-1)$ volte.

Da ciò, e dalle più semplici proprietà dei sistemi lineari a due, tre, quattro, ... dimensioni, si deducono tutti i sistemi lineari di dimensione qualunque, i cui elementi generici siano coni irreduttibili d'ordine n a centro variabile.

2. E in primo luogo trattandosi di un sistema lineare di coni φ^1 del 1° ordine, è chiaro che i piani sostegno di tali coni dovranno formare un sistema lineare di egual dimensione (dal momento che ogni fascio di φ^1 ha per sostegno un ordinario fascio di piani): quindi, o una stella di piani, o uno spazio di piani.

Nel primo caso ogni piano della stella conterrà un cono φ^1 del sistema, e non potrà contenere il centro di nessun altro cono del sistema: perciocchè due coni qualunque della rete individuano un fascio di coni φ^1, e quindi (n. 1) il piano sostegno di uno qualunque di essi non può passare pel centro dell'altro. Dunque il luogo dei centri dei vari coni del sistema è allora necessariamente una *curva* γ^p d'ordine p dotata di un punto $(p-1)$-plo nel centro della stella; e ogni punto di questa linea sarà centro di ∞^1 coni φ^1 componenti un fascio del sistema. Pertanto:

« *La* r e t e *più generale di coni del 1° ordine a centro variabile* « *consta degli ∞^2 fasci di raggi, che proiettano un medesimo fascio* « *di rette dai vari punti d'una curva (piana razionale) γ^p d'ordine p,* « *la quale abbia un punto $(p-1)$-plo nel centro del fascio $(p \geqq 1)$,* « *ma non giaccia nel piano di questo* ».

Se trattasi invece di un sistema lineare triplo di coni φ^1, la stessa argomentazione prova, che il luogo dei centri di tutti i coni del sistema è necessariamente una *retta*, ogni punto della quale è centro di ∞^2 coni del sistema formanti una rete. Laonde:

« *V'è un solo sistema lineare* t r i p l o *di coni del 1° ordine, ed è* « *quello formato dagli ∞^3 fasci di raggi proiettanti le rette di un* « *dato piano dai vari punti d'una retta data, non appartenente al* « *medesimo* ».

Non esistono sistemi lineari di coni φ^1, con dimensione maggiore di 3.

3. In secondo luogo supposto $n > 1$, la condizione che due qualunque φ^n di un medesimo sistema lineare ∞^i debbano appartenere

ad un medesimo fascio di coni, trae subito con sè, che il luogo dei centri di tutti i coni del sistema abbia ad essere una linea retta c, ecc.; d'onde segue facilmente che:

« *Ogni sistema lineare di coni* φ^n *d'ordine* $n > 1$ *a centro variabile è formato di coni (razionali) aventi a comune una generatrice* $(n-1)$*-pla* c *e gli* $n-1$ *piani osculatori lungo tutta la medesima: e questa generatrice è il luogo dei centri di tutti i coni del sistema. Se* i *è la dimensione del sistema, questo sarà individuato da* $i+1$ *coni* φ^n *linearmente indipendenti, i quali passino* $n-1$ *volte per una stessa retta arbitraria* c *toccando lungo questa gli stessi* $n-1$ *piani arbitrari, senza per altro avere tutti quanti un medesimo vertice. Per conseguenza, la dimensione* i *non potrà superare il numero* $n+2$; *e il sistema di massima dimensione si otterrà proiettando dagli* ∞^1 *punti d'una retta* c *il sistema lineare* ∞^{n+1} *formato da tutte le curve d'ordine* n *d'un piano arbitrario che hanno, nella traccia di questo piano sulla retta* c, *un punto* $(n-1)$*-plo e le relative* $n-1$ *tangenti a comune* ». — E un sistema lineare di coni φ^n a centro variabile (che non sia un fascio di coni) non potrà aver *linee basi* diverse dalla retta c, nè *punti base* altro che *semplici* e in numero non superiore ad n.

4. Merita di esser segnalato il caso di un sistema lineare di coni d'ordine n a centro variabile con $n-1$ punti base (semplici); perciocchè esso è necessariamente un *sistema triplo omaloidico, anzi l'unico sistema omaloidico, o cremoniano, di coni.* Un cosiffatto sistema è individuato da quattro coni d'ordine n linearmente indipendenti e non aventi un medesimo vertice, i quali, oltre a passare per $n-1$ punti P dati ad arbitrio, contengano una stessa retta c come generatrice $(n-1)$-pla e siano toccati dagli stessi $n-1$ piani α lungo tutta questa retta; e si compone di tutti i coni soddisfacenti a tali condizioni.

Facendo corrispondere proiettivamente gli ∞^3 coni φ^n di detto sistema ai piani d'uno spazio Σ_1 si otterrà, fra lo spazio punteggiato Σ_1 e lo spazio punteggiato Σ generato da quei coni, *una trasformazione birazionale* T *d'ordine* n *e genere zero,* la cui inversa T^{-1} è ancora d'ordine n e della stessa natura: alle rette di Σ_1 corrisponderanno in Σ le curve d'ordine n, che incontrano $n-1$ volte la retta fondamentale c toccando in questi punti d'appoggio gli $n-1$ piani fondamentali α, e passano ancora per gli $n-1$ punti fondamentali P. Ma per $n=2$ questa corrispondenza è un caso particolare di quella descritta dal Cremona al n° 21 della memoria: *Sulle trasformazioni razionali dello spazio* (Ann. di Matem., serie 2ª, t. V, 1870); e per n

qualunque essa è una modificazione della corrispondenza birazionale, in cui entrambi i sistemi omaloidici constano di superficie rigate d'ordine n (necessariamente dotate di una generatrice $(n-1)$-pla); trasformazione ben nota per i lavori dei signori SEGRE [1], MONTESANO [2] e LORIA [3].

Torino, Gennaio 1893.

Sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} u & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 1 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & u \end{vmatrix}$$

e relazioni notevoli che ne derivano.

Nota di **V. Mollame.**

1. Si ha:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \\ . \\ \\ n-1 \\ n \end{array}\begin{vmatrix} u & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 1 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & u \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n+1}{1}u^n - \binom{n+1}{3}u^{n-2}(4-u^2) + \binom{n+1}{5}u^{n-4}(4-u^2)^2 - \text{ ecc.}\right]$$

$$= \frac{\text{coefficiente di } i \text{ in } (u+iv)^{n+1}}{2^n v}, \tag{1}$$

dove $i=(-1)^{\frac{1}{2}}$, e la quantità v dipende da u mediante l'equazione

$$u^2+v^2=4\;; \tag{2}$$

---

[1] *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. XXI, 1885).

[2] *Sopra una classe di trasformazioni involutorie dello spazio,* nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie 2ª, v. XXI, 1888.

[3] *Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio,* ecc., Ibidem, v. XXIII, 1890.

inoltre per coefficiente di i nello sviluppo della potenza $(u+iv)^{n-1k}$ devesi intendere quello che proviene come effetto dell'unica unità immaginaria i che comparisce attualmente nel binomio $u+iv$.

In fatto, nella serie

$$v, \quad v_2, \quad v_3, \quad v_4, \quad \ldots, \tag{3}$$

sia ogni termine legato ai due che lo precedono mediante la relazione

$$v_k = uv_{k-1} - v_{k-2}, \tag{4}$$

nella quale deve supporsi $v_1 = v$: e pongasi

$$(u+iv)^k = 2^{k-1}(b_k + ib'_k) \tag{5}$$
$$(k = 0, 1, 2, \text{ecc.});$$

si avrà allora, $b'_k = v_k$. Giacchè dalla relazione (5) si deduce che

$$(u+iv)^k = 2^{k-2}(b_{k-1} + ib'_{k-1})(u+iv)$$

e dal confronto dei secondi membri della precedente relazione e della (5) nascono le due equazioni seguenti:

$$2b_k = ub_{k-1} - vb'_{k-1}$$
$$2b'_k = ub'_{k-1} + vb_{k-1},$$

dalle quali si ricava facilmente l'altra

$$b'_k = ub'_{k-1} - \frac{u^2+v^2}{4} b'_{k-2};$$

e questa, a motivo dell'equazione (2), diviene

$$b'_k = ub'_{k-1} - b'_{k-2}. \tag{4'}$$

Or la precedente relazione ha la stessa forma della (4), ed inoltre si ha dalla (5) $b'_0 = 0$ e $b'_1 = v$: dunque i termini della serie b'_1, b'_2, b'_3, ecc., calcolati mediante la relazione (4') non differiscono dai loro corrispondenti nella serie (3). Nella (5) alle quantità b'_k si possono quindi sostituire le v_k: allora mutando b_k in u_k la (5) si potrà scrivere

$$(u+iv)^k = 2^{k-1}(u_k + iv_k). \tag{6}$$

Ciò posto, dall'equazione (4) per $k = n+1, n, \ldots, 3, 2$ scaturisce il seguente sistema di n equazioni lineari fra le altrettante quantità $v_{n+1}, v_n, \ldots, v_3, v_2$

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - uv_n + v_{n-1} &= 0\\
v_n - v_{n-1} + v_{n-2} &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
v_4 - uv_3 + v_2 &= 0\\
v_3 - uv_2 &= -v\\
v_2 &= uv;
\end{aligned}$$

dalle quali, risolvendo rispetto a v_{n+1} ed indicando con $D_n(u)$ il determinante proposto, si ricava che

$$v_{n+1} = (-1)^n v D_n(-u) \,. \tag{7}$$

Dalla relazione (6) intanto, per $k = n + 1$, si ha che

$$2^n v_{n+1} = \binom{n+1}{1} u^n v - \binom{n+1}{3} u^{n-2} v^3 + \binom{n+1}{5} u^{n-4} v^5 - \text{ecc.},$$

cioè, in virtù dell'equazione (2),

$$\frac{v_{n+1}}{v} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n+1}{1} u^n - \binom{n+1}{3} u^{n-2}(4-u^2) + \binom{n+1}{1} u^{n-4}(4-u^2)^2 - \ \text{ecc.}\right] \tag{7'}$$

e però sostituendo nella (7) al quoziente $\frac{v_{n+1}}{v}$ il suo precedente valore e poi mutando u in $-u$ si ottengono le relazioni (1).

C. D. D.

2. Nella relazione (4) facciasi $k = n$ e sostituiscansi le quantità v_n, v_{n-1}, v_{n-2} con i loro valori forniti dalla (7): indi si muti u in $-u$; si avrà allora la relazione seguente fra tre qualunque consecutivi dei determinanti $D(u)$

$$D_n(u) = u D_{n-1}(u) - D_{n-2}(u):$$

la quale, sostituendo a $D_n(u)$, $D_{n-1}(u)$, $D_{n-2}(u)$ i loro sviluppi tratti dalla (1), dà luogo all'identità seguente:

$$\begin{aligned} &\binom{n+1}{1} u^n - \binom{n+1}{3} u^{n-2}(4-u^2) + \binom{n+1}{5} u^{n-4}(4-u^2)^2 - \ \text{ecc.} \\ &= 2u\left[\binom{n}{1} u^{n-1} - \binom{n}{3} u^{n-3}(4-u^2) + \binom{n}{5} u^{n-5}(4-u^2)^2 - \ \text{ecc.}\right] \\ &-4\left[\binom{n-1}{1} u^{n-2} - \binom{n-1}{3} u^{n-4}(4-u^2) - \binom{n-1}{5} u^{n-6}(4-u^2)^2 - \ \text{ecc.}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Il primo membro di tale identità può scriversi:

$$\Sigma_k (-1)^k \binom{n+1}{2k+1} u^{n-2k} (4-u^2)^k$$
$$(k = 0 \ 1,\ 2,\ \text{ecc.})$$

e siccome il coefficiente di $(u^2)^{k-l}$ nello sviluppo della potenza $(4-u^2)^k$ è $(-1)^{k-l}\binom{k}{l}4^l$, così il coefficiente di $u^{n-2k}(u^2)^{k-l}$ cioè di u^{n-2l} nel primo membro dell'identità (8) è

$$\Sigma_k(-1)^{2k-l}4^l\binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{l}\ ; \tag{9}$$

se in questo coefficiente si muta n in $n-1$ e poi si moltiplica per 2 il risultato si ottiene

$$2\Sigma_k(-1)^{2k-l}4^l\binom{n}{2k+1}\binom{k}{l} \tag{10}$$

come coefficiente di u^{n-2l} nel primo polinomio che è nel secondo membro della (8): se invece nell'espressione (9) si muta n in $n-2$, l in $l-1$ e si moltiplica il risultato per -4 si ottiene il coefficiente di u^{2n-l} nel secondo polinomio che è nel secondo membro della (8); tale coefficiente è quindi

$$-4\Sigma_k(-1)^{2k-l+1}4^{l-1}\binom{n-1}{2k+1}\binom{k}{l-1}\ . \tag{11}$$

Dall'uguaglianza (9)=(10)+(11), fatte le riduzioni, si ha

$$\Sigma_k\binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{l} = 2\Sigma_k\binom{n}{2k+1}\binom{k}{l} + \Sigma_k\binom{n-1}{2k+1}\binom{k}{l-1}$$
$$(k = l-1\ ,\ \ l\ ,\ \ l+1\ ,\ .....)\ ;$$

questa identità può scriversi come segue:

$$\Sigma_k\binom{k}{l}\left[2\binom{n}{2k+1} - \binom{n+1}{2k+1}\right] + \Sigma_k\binom{n-1}{2k+1}\binom{k}{l-1} = 0 \tag{12}$$

e siccome si ha

$$2\binom{n}{\nu} - \binom{n+1}{\nu} = \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-\nu+2)}{\nu\,!}\,[2(n-\nu+1)-n-1]$$
$$= \frac{n(n-1)\ \dots\ (n-\nu+1)}{\nu\,!}\,\frac{n-2\nu+1}{n-\nu+1} = \binom{n}{\nu}\frac{n-2\nu+1}{n-\nu+1}$$

così, facendo $\nu=2k+1$ e sostituendo nella (12) a $2\binom{n}{2k+1}-\binom{n+1}{2k+1}$ il valore che se ne trae dalla precedente uguaglianza, si avrà

$$\Sigma_k\binom{k}{l}\binom{n}{2k+1}\frac{n-4k-1}{n-2k} + \Sigma_k\binom{n-1}{2k+1}\binom{k}{l-1} = 0\ . \tag{13}$$
$$(k = l-1\ ,\ \ l\ ,\ \ l+1\ ,\ \ .....)$$

In particolare, facendo $l=1$, e però $k=0$, 1, 2, ecc., la somma cui dà luogo il secondo dei due segni Σ nella identità (13) diviene

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{5} + \ .....\ (= 2^{n-2})$$

e però l'identità (13), dopo aver aggiunta la quantità $\frac{n-1}{n}\binom{n}{1}$ ad ambo i suoi membri, si riduce all'altra

$$\frac{n-1}{n}\binom{n}{1}+1\,.\frac{n-5}{n-2}\binom{n}{3}+2\,.\frac{n-9}{n-4}\binom{n}{5}+3\,.\frac{n-13}{n-6}\binom{n}{7}-\quad \text{ecc.}$$
$$=n-2^{n-2}-1$$

nella quale deve supporsi n dispari, altrimenti la quantità sottoposta al primo segno Σ nella (13), per $2k=n$, diviene indeterminata.

3. L'equazione (4) scritta come segue

$$\frac{v_k}{v_{k-1}}=u-\cfrac{1}{\cfrac{v_{k-1}}{v_{k-2}}},$$

e la relazione $\frac{v_2}{v_1}=u$, tratta dalla stessa (4) mostrano che

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=u-\cfrac{1}{u-\cfrac{1}{u-\ddots-\cfrac{1}{u}}}, \tag{14}$$

dove la quantità u devesi scrivere n volte. Sostituendo nella precedente relazione al quoziente $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ il suo valore dato dalla (7′), si avrà che

$$u-\cfrac{1}{u-\cfrac{1}{u-\ddots-\cfrac{1}{u}}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\binom{n+1}{1}u^n-\binom{n+1}{3}u^{n-2}(4-u^2)+\binom{n+1}{5}u^{n-4}(4-u^2)^2-\ \dots}{\binom{n}{1}u^{n-1}-\binom{n}{3}u^{n-3}(4-u^2)+\binom{n}{5}u^{n-5}(4-u^2)^2-\ \dots}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\text{coefficiente di } i \text{ in } (u+iv)^{n+1}}{\text{coefficiente di } i \text{ in } (u+iv)^{n}}\ ,\quad (u^2+v^2=4)\ .$$

4. L'equazione (4) mostra che se la quantità $v(=v_1)$ si suppone diversa da zero, allora due qualunque consecutive, v_{k-1}, v_k, delle quantità v_l non possono contemporaneamente annullarsi; altrimenti tutte le altre precedenti quelle, e quindi anche v_1 dovrebbero essere nulle. Laonde, affinchè per $n>1$ risulti $v_n=0$ (e però v_{n-1} non $=0$) è necessario e sufficiente che u sia radice dell'equazione

$$0=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\ddots-\cfrac{1}{x}}}, \tag{15}$$

dove x devesi scrivere $n-1$ volte, come risulta dalla relazione (14) dopo avervi mutato k in $k-1$. Le radici u dell'equazione (15) sono [1] le parti reali, moltiplicate per 2, delle radici complesse dell'equazione binomia

$$z^{2n}=1\ : \qquad (16)$$

se dunque $a+a'i$ è una di tali radici della precedente equazione, se cioè

$$(a+a'i)^{2n}=1\ , \qquad (17)$$

sarà $u=2a$, ed allora dall'equazione (2) e dall'altra

$$a^2+a'^2=1 \qquad (18)$$

segue che $v=2a'$.

Intanto la parte reale a di una radice complessa $a+a'i$ della (16) deve soddisfare l'equazione

$$\frac{1-a^{2n}+\binom{2n}{2}a'^2a^{2n-2}-\binom{2n}{4}a'^4a^{2n-4}+\ \dots\ \pm\binom{2n}{2n}a'^{2n}}{1-a^2}=0 \qquad (19)$$

che si ottiene uguagliando ad 1 la parte reale dello sviluppo del primo membro della (17) e sopprimendo dall'equazione che ne risulta le radici $+1$ e -1; giacchè $+1$ e -1 sono radici reali della (17). Sostituendo nell'equazione (19) in luogo di a'^2 il suo valore $1-a^2$ tratto dalla (18), il primo membro dell'equazione risultante, che è di grado $2n-2$, è la seconda potenza di una funzione razionale $F(a)$ di grado $n-1$, perchè ogni radice a dell'equazione (19) è di questa una radice doppia, dovendo essa appartenere sia ad una radice complessa dell'equazione (17) che alla radice complessa coniugata. Adunque l'equazione

$$F(a)=0 \qquad (20)$$

è quella alla quale devono soddisfare le quantità a come radici semplici, se vuolsi che sia $v_n=0$.

D'altra parte l'equazione (7), col mutarvi n in $n-1$, mostra (essendo v non $=0$) esser mestieri, per l'annullamento di v_n, che sia

$$D_{n-1}(-u)=0\ :$$

---

(1) Vedasi la Nota dal titolo *Soluzione algebrica dell'equazione*

$$0=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\ddots-\cfrac{1}{x}}}\ ,$$

inserita nel fascicolo 12° di questa *Rivista*, anno 1892.

e però se in questa equazione si pone in luogo di u il suo valore $2a$ si avrà l'altra equazione

$$D_{n-1}(-2a)=0$$

che è pur essa di grado $n-1$ e che perciò non deve esser diversa dall'equazione (20).

Pongasi
$$\lambda D_{n-1}(-2a)=F(a)$$
dove λ è un coefficiente numerico; sarà poi

$$\lambda^2[D_{n-1}(-2a)]^2=[F(a)]^2\,. \tag{21}$$

Il coefficiente di a^{n-1} nel determinante $D_{n-1}(-2a)$ è $(-2)^{n-1}$ e però il coefficiente di a^{2n-2} nel primo membro della precedente identità è $2^{2n-2}\lambda^2$. Eseguendo poi la divisione nel primo membro dell'equazione (19), dopo aver posto in essa $1-a^2$ in luogo di a'^2, si trova che il coefficiente di a^{2n-2} nel quoziente, che è uguale ad $[F(a)]^2$, è espresso dalla somma

$$1+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{2n}\,,$$

la quale, come è noto, ha per valore 2^{2n-1}, perciò deve essere

$$2^{2n-2}\lambda^2=2^{2n-1}$$

e quindi si ha $\lambda^2=2$. L'identità (21) diviene quindi la seguente:

$$F(a)=2^{\frac{1}{2}}D_{n-1}(-2a)\ ,$$

dalla quale, sostituendo ad $F(a)$ la radice quadrata del primo membro della (19), al determinante $D_{n-1}(-2a)$ il suo sviluppo, e poi moltiplicando per $\sqrt{1-a^2}$, cioè per a' si deduce che

$$\left[1-\binom{2n}{0}a^{2n}+\binom{2n}{2}a^{2n-2}a'^2+\binom{2n}{4}a^{2n-4}a'^4-\ldots\pm\binom{2n}{2n}a'^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}a'\begin{vmatrix} -2a & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -2a & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -2a & 1 & . & 0 & 0 & 0 & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & -2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & -2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & -2a \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ . \\ \\ n-2 \\ n-1 \end{matrix}$$

$$=(-1)^{n-1}2^{\frac{1}{2}}a'\left[\binom{n}{1}a^{n-1}-\binom{n}{3}a^{n-3}a'^2+\binom{n}{5}a^{n-5}a'^4-\ldots\right],$$

con la condizione che sia

$$a^2+a'^2=1\ .$$

Catania, Novembre del 1892.

Considerazioni geometriche sul numero delle radici reali di un'equazione algebrica.

Sotto questo titolo il prof. KLEIN (1) ha pubblicato recentemente una nota, geniale come tutto ciò che esce dalla penna di quel maestro, in cui, dopo di avere ricordato un metodo applicato molti anni or sono dal SYLVESTER (2) e che consiste nel considerare i coefficienti di una equazione (3) come coordinate dei punti di uno spazio per distinguere, secondo la regione di quello spazio in cui si trova un punto, il numero delle radici reali dell'equazione corrispondente, egli passa a dare l'interpretazione geometrica dei varî criterî che si hanno per riconoscere il numero delle radici reali di un'equazione. Egli insiste particolarmente sull'equazione di secondo grado

$$z^2 + 2Az + B = 0 ,$$

in cui A e B sono le coordinate cartesiane di un punto in un piano, e su quella di terzo grado

$$z^3 + 3Az^2 + 3Bz + C = 0 ,$$

in cui A, B, C sono le coordinate cartesiane di un punto in uno spazio ordinario: per quest'ultima egli dà un'elegante interpretazione geometrica del criterio di SYLVESTER (4) fondata sulla considerazione del Bezoutiano.

Benchè assai ovvio ed elementarissimo, non mi sembra complemento del tutto ozioso al lavoro citato l'applicazione di quello stesso criterio del SYLVESTER all'equazione di terzo grado, ridotta alla forma

(1) $$z^3 + 3\xi z + \eta = 0 ,$$

di cui i coefficienti ξ, η si possono riguardare come coordinate cartesiane ortogonali di un punto in un piano: anche perchè tale applicazione ci farà incontrare, per via indiretta, una curiosa proposizione di geometria.

---

(1) *Sonderabdruck aus dem Katalog der Mathematischen Ausstellung zu Nürnberg*, September 1892. München, 1892.

(2) *Philosophical transactions*, 1864.

(3) O quantità da essi dipendenti.

(4) *Philosophical transactions*, 1853. Cfr. SALMON, *Lessons on higher Algebra*, third edit., pag. 293. Dublin, 1866.

L'equazione (1) rappresenta un sistema ∞^1 di rette il cui inviluppo [1] è la cubica a cuspide

(2) $$\eta^2 + 4\xi^3 = 0 \ ;$$

un punto $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ si dirà interno od esterno a questa cubica secondo che sarà

$$\bar{\eta}^2 + 4\bar{\xi}^3 < \text{ oppure } > 0 \ ;$$

l'equazione corrispondente (1) avrà tre radici reali nel primo caso, una nel secondo.

Si formi ora il Bezoutiano [2]: si deve perciò rendere la (1) omogenea; indicandone allora il primo membro con $f(z_1, z_2)$, il Bezoutiano è

$$B = \frac{1}{z_1 z'_2 - z_2 z'_1} \left[\frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1} \frac{\partial f(z'_1, z'_2)}{\partial z'_2} - \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2} \frac{\partial f(z'_1, z'_2)}{\partial z'_1} \right];$$

eseguendo e sostituendo $\frac{z_1}{z_2}$ e $\frac{z'_1}{z'_2}$ con λ, viene

$$B = \xi\lambda^2 + \eta\lambda - \xi^2 .$$

Ora il criterio di SYLVESTER applicato all'equazione (1) consiste nell'osservare se l'equazione in λ ottenuta uguagliando B a zero ha, o no, le sue radici complesse: corrispondentemente l'equazione (1) ha tre radici reali od una sola.

L'equazione

(3) $$B = \xi\lambda^2 + \eta\lambda - \xi^2 = 0$$

rappresenta un sistema ∞^1 di parabole, talchè il criterio ora enunciato viene ad esprimere che l'equazione (1) corrispondente al punto $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ ha una o tre radici reali, secondo che per il punto stesso passano due parabole reali del sistema o nessuna.

Le parabole del sistema (3) hanno le seguenti proprietà:

a) Esse hanno per inviluppo la cubica a cuspide (2).

b) Esse passano tutte per l'origine, ed hanno l'asse parallelo: vengono pertanto a passare per tre punti fissi. L'altro punto comune alle parabole corrispondenti ai valori λ_1 e λ_2 del parametro è

$$\xi = -\lambda_1\lambda_2 \ , \qquad \eta = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) \ ,$$

da cui, per λ_1 e λ_2 reali,

$$\eta^2 + 4\xi^3 > 0 \ .$$

c) Da quest'ultima osservazione risulta che le parabole (3) ricoprono (due volte) tutta la regione del piano esterna alla cubica a cuspide, e quella soltanto.

---

(1) *Curva discriminatrice* secondo il SYLVESTER (*Phil. trans.*, 1864).

(2) KLEIN, loc. cit., pag. 5.

d) Il vertice della parabola corrispondente a λ ha per coordinate

$$\xi = \frac{\lambda^2}{2}, \quad \eta = -\frac{\lambda^3}{4},$$

onde risulta che il luogo descritto dal vertice delle parabole (3) è una cubica a cuspide, di cui l'equazione è

$$\xi^3 - 2\eta^2 = 0 .$$

Si viene così ad ottenere il seguente teorema:

« Se un sistema di parabole aventi gli assi paralleli e passanti per « un punto fisso è tale che il luogo dei loro vertici sia una cubica a « cuspide, queste parabole inviluppano una seconda cubica a cuspide « avente il cuspide nello stesso punto della prima e la medesima tan- « gente cuspidale ».

È facile di generalizzare questa proposizione. Si chiami, con vocabolo degli antichi geometri, *parabola d'ordine* $\frac{m}{n}$ la curva di cui l'equazione omogenea è

$$A\xi^n\zeta^{m-n} + B\eta^m = 0 ;$$

si ha allora il seguente teorema:

« Abbiasi un sistema di coniche passanti per un punto A e tangenti « ad una retta BC nel punto B: dal punto C fisso su BC si conducono « le tangenti CM alle coniche, ed il luogo dei punti M sia una para- « bola d'ordine $\frac{m}{n}$. Questo sistema di coniche avrà per inviluppo una « seconda parabola d'ordine $\frac{m}{n}$,

$$A'\xi^n\zeta^{m-n} + B'\eta^m = 0 ».$$

S. Pincherle.

Sulla scoperta del potenziale.

Nota storica dell'Ing. Ottavio Zanotti Bianco.

Il sig. E. J. Routh ha di recente pubblicato un libro intitolato: *A Treatise on Analytical Statics* (Cambridge 1892). A pag. 17 del volume II di esso trovasi la nota che qui trascriviamo.

« The earliest use of the function now called the potential is due to Legendre in 1784, who refers to it when discussing the attraction of

a solid of revolution. Legendre however expressly ascribes the introduction of the function to Laplace, and quotes from him the theorem connecting the components of attraction with the differential coefficients of the function. The name, Potential, was first used by Green in his *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*, published in 1828. Green also gave many of the theorems on this function now in continual use, but which have been since associated with the names of others who have discovered them a second time. Gauss also uses the name in art. 3 of his memoir on *Forces acting inversely as the square of the distance*, Leipsic 1840, translated in the third volume of Taylor's *Scientific Memoirs*. The reader may also consult Todhunter's History, art. 790, and Thomson and Tait's *Treatise on Natural Philosophy*, art. 483 ».

In questa nota del sig. Routh vien ripetuta la non esatta opinione che l'introduzione del potenziale nella scienza sia dovuta a Laplace: mentre essa è merito di Lagrange. Già Biot aveva ciò affermato nel passaggio seguente:

« M. Lagrange a démontré que les coefficients différentiels $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ pris négativement, expriment les attractions exercées par le sphéroïde sur ce même point, parallélement aux trois axes rectangulaires. M. Laplace a fait voir ensuite que la fonction V est assujettie à l'équation différentielle partielle $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ » (*Recherches sur le calcul aux différences partielles et sur les attractions des sphéroïdes*, contenuta nel vol. VI dei *Mémoires de l'Institut*. Parigi 1806).

Quest'affermazione non essendo accompagnata da indicazione alcuna sullo scritto di Lagrange cui si accenna in essa, indusse Todhunter (1) a porre in dubbio l'asserto di Biot. Affermazione concordante con quella di Biot trovasi in una nota intorno a lavori di Poisson ed Ostrogradsky pubblicata nel vol. XIV del *Bulletin de Ferrusac..... Sciences Mathématiques*, 1830; nota firmata S, iniziale che Todhunter crede corrispondere al nome di Sturm (2). A sostegno però dell'asserto di Biot, che attribuisce, come è infatti, a Lagrange la priorità dell'introduzione nella scienza, del potenziale, sta ora un passo di una memoria di Lagrange, richiamato all'attenzione dei dotti da un lavoro di Baltzer.

---

(1) *History of the theories of attraction and the Figure of the Earth.* Vol. II, pag. 221. Londra 1873.

(2) Op. cit. Vol. II, p. 281.

Questo scritto è intitolato *Zur Geschicte des Potentials:* fu pubblicato nel 1878, nel volume 86, pag. 213 del *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Baltzer trovò rammentato il passo di Lagrange che serve di base al suo lavoro a pag. 9 delle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi.

Il passo di Lagrange, del quale si tratta, leggesi nella sua Memoria intitolata: *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances;* Memoria che fu letta all'Accademia di Berlino il 2 ottobre 1777. Essa è riprodotta nel vol. IV, 1869, pag. 401 e seguenti, delle opere di Lagrange, edite da Serret. Crediamo non inutile il riportare qui il brano accennato.

« Soient M, M′, M″... les masses des corps qui composent le système donné; x, y, z les coordonnées rectangles de l'orbite du corps M dans l'espace; x', y', z' celles de l'orbite du corps M′; x'', y'', z'' celles de l'orbite du corps M″... Qu'on fasse pour abréger

$$\Omega = \frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{MM'}{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}} + \dots$$
$$+ \frac{M'M''}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}} + \dots,$$

et qu'on dénote à l'ordinaire par

$$\frac{d\Omega}{dx}, \ \frac{d\Omega}{dy}, \ \frac{d\Omega}{dz}, \ \frac{d\Omega}{dx'}, \dots$$

les coefficients de dx, dy, dz, dx', ... dans la différentielle de Ω regardée comme fonction des variables x, y, z, x', ... on aura $\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dy}$, $\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dz}$, pour les forces avec lesquelles le corps M est attiré par les autres M′, M″, ... suivant les directions des coordonnées x, y, z, de même $\frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dx'}$, $\frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dy'}$, $\frac{1}{M'}\frac{d\Omega}{dz'}$ seront les forces par lesquelles le corps M′ est attiré par les corps M, M″, ... suivant les directions des coordonnées x', y', z'; et pareillement $\frac{1}{M''}\frac{d\Omega}{dx''}$, $\frac{1}{M''}\frac{d\Omega}{dy''}$, $\frac{1}{M''}\frac{d\Omega}{dz'''}$ seront les forces par lesquelles le corps M″ sera attiré par les autres suivant la direction de x'', y'', z'' et ainsi de suite; c'est de quoi il est aisé de se convaincre en cherchant par la différentiation les valeurs des quantités dont il s'agit; car on trouvera les mêmes expressions qu'on aurait par la décomposition des forces qui agissent sur chaque corps, en vertu

de l'attraction des autres corps supposée proportionnelle à la masse divisée par le carré de la distance.

« Cette manière de représenter les forces est, comme l'on voit, extrémement commode par sa simplicité et par sa généralité : et elle a de plus l'avantage qu'on y distingue clairement les termes dus aux différentes attractions des corps, car chacune des attractions donne dans la quantité Ω, un terme multiplié par le produit des masses des deux corps qui s'attirent, et divisé par leur distance ».

Alla fine della sua Memoria Lagrange scrive quanto segue:

« Ces théorèmes sur le mouvement des centres de gravité ont déjà étés donnés en partie par M. D'Alembert dans ses *Recherches sur le système du monde* et dans ses *Opuscules;* mais la manière dont je viens de les démontrer est nouvelle et me paraît mériter surtout l'attention des Géomètres pour l'utilité dont elle peut être dans d'autres occasions. On prouverait par les mêmes principes que ces théorèmes seraient également vrais si les corps agissaient les uns sur les autres par une force d'attraction mutuelle proportionnelle à une fonction quelconque de la distance, car, nommant $f(x)$ la force d'attraction qui agit à la distance x, et faisant $F(x) = \int f(x)dx$, il n'y aura qu'à changer la valeur de Ω du N. 1 dans la suivante

$$\begin{aligned} \Omega = &- MM'F\left\{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right\} \\ &- MM''F\left\{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}\right\} - \dots \\ &\dots - M'M''F\left\{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}\right\} - \dots \end{aligned}$$

et l'on parviendra aux mêmes résultats ».

I brani che abbiamo riprodotti sono così espliciti da non lasciar più dubbio di sorta sulla priorità di Lagrange nella scoperta del potenziale, esteso anche ad una qualunque legge di attrazione.

Dopo però i citati passi di Biot e l'affermazione dello scrittore S del *Bulletin de Ferrusac* la seguente dichiarazione di Baltzer: « Lagranges priorität, ist wie es scheint, weder damals noch in unserer Zeit, erwähnt worden » non è più rigorosamente esatta.

Ecco ora il teorema delle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi che ha messo Baltzer sulla giusta via.

« Quando un punto di massa m_i e di coordinate x_i, y_i, z_i è attratto dalla massa m_j che ne dista di r_{ij}, secondo la legge $\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$ nella direzione da m_i verso m_j; alla determinazione della forza con cui m_i è attratta dalle rimanenti masse, serve il potenziale formato da Lagrange nel problema degli n corpi

$$\Omega = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \dots + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \dots ;$$

questa forza quando le posizioni corrispondano al tempo t, ha per componenti parallele agli assi

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dx_i}; \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dy_i}; \quad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dz_i} \text{ ».}$$

Stabilita ben nettamente così la priorità di Lagrange nella scoperta del *potenziale,* il rimanente dell'istoria di questa importantissima funzione quale è data dal sig. Routh e generalmente nei trattati è esatta (1).

Il sig. Hothaway ha di recente pubblicato uno scritto intitolato: *Early history of the potentials;* nel Bollettino della Società Matematica di New-York (vol. I, 1891, pag. 66 e seg.), ma non ci fu possibile consultare questa pubblicazione.

Torino, marzo 1893.

CORRISPONDENZA

Chiarissimo Collega,

. . . .

Al quesito proposto dal mio egregio amico ing. F. Crotti (2) io rispondo che, se la formola di Simpson applicata al trapezio curvilineo compreso fra le ordinate y_1 e y_{21} dà 9600, e 9720 applicata al trapezio compreso fra le ordinate y_2 e y_{20}, questo non è alcun assurdo che possa intaccare la bontà di quella formola. A seconda del caso, si sostituisce alla curva del trapezio una successione di 10 o di 9 archi di parabola coll'asse perpendicolare all'asse delle x, tutti eguali, convessi i primi e concavi i secondi verso questo asse. E quel risultato significa puramente che la somma delle aree delle figure limitate dalla seconda successione e dalla parte della prima avente gli estremi comuni con essa, cioè 18 volte l'area della figura chiusa fra mezzo arco parabolico concavo e mezzo arco parabolico convesso, supera di 120 la somma delle aree dei due trapezii le cui curve sono le parti rimanenti della prima, pari all'area del trapezio la cui curva è un arco parabolico

---

(1) Per notizie storiche a questo riguardo vedasi ZANOTTI BIANCO O.: *Il problema meccanico della figura della terra.* Parte I, 1880. Torino.

(2) *Rivista di Matematica,* vol. II, pag. 176.

convesso. Che se qualcuno coi dati del quesito applica la formola di Simpson ad un determinato trapezio compreso fra le ordinate y_1 e y_{21} e alla sua parte compresa fra le ordinate y_2 e y_{20}, vuol dire che nella valutazione del tutto e della parte s'accontenta d'un'approssimazione che implica errori la cui differenza supera 120. Non vi è certamente limite all'errore che si può commettere applicando la formola di Simpson senza preoccuparsi che la successione degli archi parabolici non si scosti fuor di certi termini dalla curva del trapezio considerato. Piuttosto si può osservare che, coi dati del quesito, la curva e la parte di essa compresa fra le ordinate y_2 e y_{20} non potranno adattarsi egualmente bene alla relativa successione d'archi parabolici.

Ma l'ing. Crotti, come apparisce dalla sua Memoria *Sopra alcune formole di planimetria e stereometria* (1) move dall'idea che la curva del trapezio considerato sia incognita, o non si voglia conoscere: e discorre come se il valore fornito dalla formola di Simpson fosse un valore più plausibile dell'area cercata. Io non vedo veramente come un tal problema si possa porre; ad ogni modo non è quello che si propone di risolvere la formola di Simpson.

Questa essendo la mia opinione, conforme a quella esposta nella *Rivista* (2) dai professori Jadanza e Bardelli, e suppongo anche alla sua, quantunque Ella si limiti a rispondere ad alcune osservazioni del prof. Bardelli, nè mai avendo potuto discorrere in senso diverso, ho ben ragione di meravigliarmi nel trovarmi citato nella Memoria ora uscita dell'ing. Crotti, *Alcune considerazioni sulla recente edizione* (14ª) *del Manuale del prof. Colombo* (3) come venuto alla conclusione che alla formola di Simpson manca ogni fondamento teorico e logico, o qualcosa d'analogo. Son posto, è vero, in ottima compagnia, tale da farmi vivamente desiderare, se quelli sono realmente di diverso parere (è nominato anche Lei) (*), di conoscere le loro ragioni. Ma *amicus Plato sed magis amica veritas;* e perciò non mi si farà appunto di tenerci che chi notasse il mio nome non mi attribuisca un giudizio al mio assolutamente opposto.

. . . .

Messina, 6 marzo 1893. *Devot. suo*

GIAN ANTONIO MAGGI.

---

(1) *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Milano,* anno XVIII.

(2) Volume in corso, pag. 15.

(3) *Atti del Collegio degli Ingegneri ecc.*, vol. XXV.

(*) A scanso di equivoci, la mia opinione su questo soggetto è pubblicata nelle mie *Lezioni di Analisi infinitesimale,* 1893, vol. I, pag. 235 e segg. (Nota di G. PEANO).

RECENSIONI

A. Nagy — *Principî di logica esposti secondo le teorie moderne.* — Torino, Loescher, 1891, p. 219.

Il dott. Nagy, libero docente nell'Università di Roma e professore di filosofia al Liceo di Velletri, è già noto per i suoi lavori sulla logica pubblicati in periodici di matematica. Nel libro ora uscito si trovano esposte le idee fondamentali e sviluppate le principali applicazioni delle teorie moderne sulla logica, sotto una forma ordinata e succinta, tale da rendere il libro, secondo l'intenzione dell'autore, adatto a servire di testo per le scuole secondarie in conformità ai programmi ministeriali vigenti.

Ci è grato segnalare questa pubblicazione come un primo tentativo in Italia verso una riforma nell'insegnamento di questo importante ramo della filosofia, nella quale si tenga conto dei progressi fatti in quest'ultimo trentennio, per opera specialmente dei logici inglesi. Tali progressi che (almeno per ciò che riguarda quella parte della logica che nella filosofia contemporanea è distinta col nome di logica formale o deduttiva) trovano solo riscontro in quelli, di natura del resto intimamente analòga (1), che resero possibile la sua costituzione come scienza indipendente all'epoca aurea della filosofia greca per opera d'Aristotele e della sua scuola, cominciano, si può dire, solo ora a richiamare sopra di sè, anche nel campo dei cultori di studi filosofici, l'attenzione che compete alla loro importanza.

I risultati delle recenti esperienze del Venn sopra due classi parallele di giovani, delle quali una soltanto era addestrata all'uso dei metodi e delle notazioni della logica simbolica, non possono che incoraggiare quelli che si accingono a propagare fra gli insegnanti di filosofia la conoscenza di queste nuove teorie. Si può prevedere, del resto, come non lontano il tempo in cui l'affermare la convenienza di famigliarizzare per tempo i giovani coi concetti e coi processi della logica matematica, diventerà un'asserzione non abbisognante di prova e in cui parrà superfluo il far rilevare l'addizionale importanza che questo genere di disciplina mentale acquista per quei giovani che nel loro corso ulteriore di studi saranno tratti ad occuparsi di scienze in cui predomini il metodo deduttivo, quali sono preeminentemente i vari rami della matematica e la parte teorica dell'economia politica e delle scienze giuridiche.

Al lavoro del Nagy viene aggiunto singolare pregio dalla copia di citazioni e riferenze atte ad invogliare il lettore a proseguire nello studio delle questioni che maggiormente lo interessassero, ricorrendo direttamente alle fonti.

G. Vailati.

(1) *The canonical forms of the Aristotelian syllogism are really symbolical; only the symbols are less perfect of their kind than those of mathematics.* Boole, Math. Analysis of Logic, P. 11.

X. Antomary — *Leçons de Cinématique et de Dynamique.* — Paris, Nony et C., 1892.

È un trattato di piccola mole, facile, chiaro, che le teorie esposte illustra con graziose applicazioni e fa seguire da numerosi ed opportuni quesiti proposti al lettore.

In esso l'A. premesse alcune nozioni sui vettori, definiti come segmenti di retta, astrazione fatta dalla loro posizione nello spazio, tratta successivamente la Cinematica del punto, la Dinamica del punto materiale e parte della Statica dei sistemi rigidi. Seguono tre note: la 1ª su due teoremi di geometria circa l'equivalenza di aree piane simmetriche obliquamente rispetto ad un diametro, e di volumi obliquamente simmetrici rispetto ad un piano diametrale, le altre due sui principî delle velocità virtuali e di D'Alembert per un punto materiale.

Obbligato a seguire un programma scolastico, quello di ammissione alla Scuola Politecnica francese, ed anzi a svolgere quei soli punti di tale programma che altro autore in altro volume non aveva svolto (1), l'A. non può offrire un trattato in sè completo. Così in Cinematica, studiando la composizione dei movimenti, si limita al caso semplice in cui i sistemi mobili di riferimento hanno moto progressivo; in Dinamica, considerando il moto di un punto materiale non libero, si occupa solo del caso in cui il punto è ritenuto da una linea ed appena accenna al caso in cui il punto deve rimanere su di una superficie; di Statica poi non espone che la parte riflettente la determinazione dei baricentri di figure omogenee.

Con programma sì ristretto l'A. non ebbe campo di applicare le nozioni esposte sui vettori alla composizione dei moti elementari simultanei dei sistemi invariabili, nè a quella delle forze agenti insieme su d'un sistema rigido. Per altro se, invece di limitarsi ad utilizzare le nozioni sui vettori nella dimostrazione dell'analogia fra la composizione delle velocità simultanee di un punto e quella delle forze insieme agenti su di un punto materiale, l'A., definito il vettore come somma di punti avente massa nulla, avesse introdotto il concetto di punto funzione del tempo ed adottate le notazioni algebriche del calcolo geometrico, pur restando nei limiti prestabiliti, avrebbe potuto studiare in modo assai più semplice molte questioni, indipendentemente dalla scelta degli assi di riferimento, come già in qualche nostra scuola si fa con vantaggio e senza rendere perciò più pesante la trattazione. La prefazione ci aveva fatto sperare tale applicazione del calcolo geometrico alla Cinematica ed alla Dinamica del punto, applicazione che avrebbe reso il trattato distinto per originalità di metodo dagli altri molti pubblicati.

Poche e lievi inesattezze ci fu dato notare; forse era preferibile che la proposizione a numero 135 invece che come teorema fosse data come de-

---

(1) M. E. Carvallo, *Leçons de Statique.* — Paris, Nony et C., 1884.

finizione di forza, semplificandosi così tutto quanto è esposto per precisare il concetto di forza e quello di risultante di più forze. Siamo lieti però di far notare che il lavoro dell'Antomary è composto con marcato senso pratico, è perciò adatto all'indole dei lettori cui è specialmente destinato; i frequenti esempi e le opportune osservazioni, massime quelle riguardanti l'omogeneità delle formule della meccanica, i sistemi di unità di misura, le dimensioni delle grandezze diverse considerate in meccanica rendono appunto il libro pregevole per chi si avvia agli studi tecnici superiori.

Torino, Febbraio 1893. E. OVAZZA.

A proposito del postulato dell'equivalenza e di altre questioni geometriche.

Risposta ad una recensione del prof. G. Lazzeri.

Nel fascicolo 11° (Novembre 1892) di questa *Rivista di Matematica*, il prof. G. Lazzeri pubblica della nuova edizione, da me curata, degli *Elementi d'Euclide*, libro I, una recensione; alla quale è mio dovere ed insieme mio interesse di rispondere. Tratterò successivamente la questione relativa al postulato dell'equivalenza, e quella riguardante il postulato del diedro e la fusione della geometria piana colla solida; poi dei postulati fondamentali della geometria ed infine delle modificazioni da me apportate al testo euclideo.

Parlando del postulato dell'equivalenza, che io ho detto e sostengo di aver dimostrato, il Lazzeri scrive: « La dimostrazione della prop. E: *se due poligoni sono eguali ed hanno una parte comune, la rimanente parte dell'uno è equivalente alla rimanente parte dell'altro;* è presso a poco una riproduzione di quella che il prof. Faifofer credè di dare dell'altra proposizione più generale: *sottraendo da due poligoni equivalenti due loro parti che siano eguali ad un terzo poligono si ottengono resti equivalenti.* Il De-Paolis provò che questa dimostrazione è errata in una sua lettera al Direttore del *Periodico* pubblicata nel I volume del *Periodico* stesso. Siccome ciò che scrisse il De-Paolis può applicarsi senza nessuna variazione alla dimostrazione del Gremigni, non esclusa la seconda parte che manca in quella del Faifofer, rimando senz'altro il lettore allo scritto del De-Paolis ».

Abbia dunque il cortese lettore la compiacenza di venir meco a vedere che cosa dice il De-Paolis della dimostrazione del Faifofer. Il De-Paolis, nella lettera citata, solleva dapprima il dubbio che le successive operazioni di suddivisione da farsi nei poligoni H e K, i quali sono uguali al terzo poligono da togliersi dai poligoni equivalenti A e B, non abbiano termine. E poi, molto opportunamente, aggiunge: « è dopo avere ammesso questo postulato (quello dell'equivalenza) e non prima, che si può stabilire il concetto di

poligoni maggiori e minori; e per dimostrare che sono equivalenti i resti che si ottengono sottraendo poligoni eguali da poligoni equivalenti, *pare* necessario aver dimostrato che due poligoni o sono equivalenti o uno è maggiore dell'altro ». Or bene io ho proprio seguito, nel mio libro, il processo sopra indicato dall'illustre prof. De-Paolis: perocchè ho in primo luogo dimostrato il postulato dell'equivalenza colle proposizioni E ed F, ho poi definiti, a pag. 71, i poligoni maggiori e minori, e di più (e questo non è stato nemmeno indicato dal De-Paolis) ho stabilito la condizione necessaria e sufficiente affinchè un poligono sia maggiore d'un altro; infine, dato il concetto di somma e di differenza di due poligoni, ho dedotto i corollari della pag. 72, e fra questi il 3°, rispetto al quale il prof. Lazzeri dice di « essere curioso di sapere come lo deduco dalle cose precedenti ». Ed io rispondo che il 3° corollario è vero, perchè è una conseguenza immediata del 2°, la cui verità è assiomatica; e del concetto precedentemente dato di poligono maggiore e minore.

In seguito la recensione continua così: « a tutti coloro che si occupano sul serio di geometria parrà per lo meno ingenua la pretesa dell'autore di avere compendiato in tre proposizioni tutta la teoria dell'equivalenza, che è una delle più difficili della geometria elementare ». Con tale asserzione il sig. Lazzeri tende a falsare l'opinione del pubblico circa il mio libro: perchè non è in tre proposizioni solamente che riassumo l'equivalenza dei poligoni, ma bensì in quelle tre proposizioni con tutto ciò che segue. Ed i corollari delle pag. 71 e 72, colle definizioni e le altre considerazioni che seguono, non fanno forse parte della teoria dell'equivalenza? Avrei potuto, è vero, di questi corollarî farne altrettanti teoremi, ma ciò non ho voluto per più ragioni: prima, per non allungare troppo il lavoro, tanto più che non si trattava d'un libro mio originale; poi perchè quei corollari, nel modo come gli ho enunciati, sono in perfetta armonia cogli assiomi d'Euclide; e fanno vedere come le proprietà dell'eguaglianza si estendono in modo assai facile all'equivalenza delle grandezze; infine perchè, dovendo lo stesso libro andar per le scuole, ho voluto lasciare i chiarimenti più facili e le dimostrazioni più ovvie all'opera dell'insegnante. Quello che è certo si è che tutta quanta la teoria dell'equivalenza si svolge, concisamente sì, ma sempre col massimo rigore; e invito il sig. Lazzeri a sapermi indicare dove esista la più piccola lacuna.

Rimane ora, perchè io abbia esaurito l'argomento dell'equivalenza, che faccia vedere, come la dimostrazione della prop. E, già enunciata, e da cui ho preso le mosse, non ha alcun bisogno di essere completata, nè corretta; contrariamente alle affermazioni della recensione. È appunto rispetto ad essa che si può muovere l'obiezione fatta dal prof. De-Paolis alla dimostrazione del Faifofer (la quale del resto non ha nulla a che fare colla mia, checchè ne dica il sig. Lazzeri) perchè occorrendo, come ho descritto nel libro, di dividere uno dei poligoni nello stesso modo con cui è diviso il suo eguale dal contorno della parte comune, e potendo per tale operazione questa parte comune venir divisa e suddivisa successivamente più volte; può ragionevolmente dubitarsi che tali suddivisioni non abbiano

termine. Ma a ciò io rispondo che le suddivisioni della parte comune cessano, ogni volta che i lati delle parti risultanti sono ridotti minori dei lati corrispondenti della parte non comune appartenente all'uno o all'altro dei poligoni eguali. Ora per lati corrispondenti intendo quelli, le cui rette si sovrappongono, quando i due poligoni eguali sono sovrapposti. E che a tale risultato si venga lo conferma chiaramente l'esempio dei due trapezi eguali aventi un triangolo in comune, che ho posto alla fine della prop. E; al quale altri ne potrei aggiungere di poliedri e di poligoni eguali.

Da questi esempi si vede che, tanto nel caso in cui la parte comune non viene suddivisa (caso che si dà appunto quando i lati di detta parte sono rispettivamente eguali o minori dei lati corrispondenti della parte non comune di ciascuno dei poligoni dati) come nei casi in cui la parte comune è divisa una volta sola, due volte sole, tre o più volte, sempre però in numero finito; si osserva costantemente questo fatto: che le operazioni di suddivisione cessano, quando le parti risultanti, in cui la parte comune viene a spezzarsi, hanno, come ho detto avanti, i lati rispettivamente eguali o minori dei lati corrispondenti della parte non comune appartenente all'uno e all'altro dei poligoni che si considerano. Ci si convince poi che la cosa non può avere eccezioni, pensando che due segmenti eguali, come anche due poligoni eguali, sono sempre divisibili nello stesso numero di parti rispettivamente eguali e disposte nello stesso modo. Possiamo inoltre osservare che le suddivisioni della parte comune seguono sempre questa legge: fra le medesime ve ne può essere una che corrisponde a sè stessa, e questo accade quando i due poligoni si sovrappongono mediante una rotazione intorno ad un punto della parte comune; v'è poi una parte, che non corrispondendo a sè stessa, ha le sue corrispondenti eguali fuori della parte comune; vi sono poi due parti eguali che anch'esse, non corrispondendosi fra loro, hanno di necessità le loro corrispondenti fuori della parte comune. Vi possono essere inoltre tre parti eguali, quattro parti eguali, ecc., che si trovano tutte nelle condizioni di quelle precedenti.

Ora io desidererei sapere perchè il prof. Lazzeri non ha fatto menzione dell'esempio sopra ricordato, mentre è da esso che avrebbe dovuto cominciare la sua critica, se invece di affermare semplicemente le cose, le avesse anche dimostrate, com'era suo dovere. Limitarsi a sollevare dei dubbî non vuol dire discutere; e non è sicuramente coi dubbî che si fa la scienza. Cerchi piuttosto, se pure gli sarà possibile, il sig. Lazzeri degli esempi da contrapporre al mio, dai quali risulti che vi sono casi in cui le divisioni successive da farsi nei due poligoni non hanno termine, e nemmeno allora potrà dire che la mia dimostrazione non è corretta, perchè essa vale sempre. Allora ciò che si renderà necessario di fare sarà semplicemente questo, cioè: estendere il concetto di poligoni equivalenti al caso in cui il numero delle parti eguali, nelle quali essi possono decomporsi, cresce indefinitamente.

M'interessa poi fare un'altra osservazione: cioè che l'esempio da me arrecato dei due trapezî, ha pure un'altra importanza, la quale sembra sia sfuggita all'autore della recensione. E l'importanza è questa: che con esso

dimostro in modo nuovo, più semplice di quello indicato dal prof. De-Paolis, l'equivalenza di due parallelogrammi aventi basi eguali ed altezze eguali; e ciò senza bisogno di premettere il caso dei parallelogrammi che hanno la stessa base o sono collocati in un determinato modo l'uno rispetto all'altro. Aggiungerò anche che seguendo un processo analogo dimostro pure (e di ciò farò argomento d'un prossimo articolo) che due parallelepipedi, i quali hanno basi eguali ed altezze eguali, sono equivalenti.

Quanto alla dimostrazione della prop. F, colla quale, in ultima analisi, si rende manifesto che, se due poligoni equivalenti sono sovrapposti, ciascun d'essi deve avere una parte esterna rispetto all'altra; essa non ha bisogno di divisioni successive, e però i dubbî sollevati nella recensione non hanno, neppure rispetto ad essa, l'ombra del fondamento.

E qui finisco la parte della mia autodifesa relativa alla questione dell'equivalenza, sicuro che tutto quanto ho detto è più che sufficiente a completamente annullare la critica del prof. Lazzeri. Onde, se come egli stesso dice, la dimostrazione del postulato dell'equivalenza deve segnare un progresso nel campo degli studi geometrici, tale progresso può dirsi raggiunto.

Mi occuperò ora del postulato del diedro, il quale si connette coll'altra questione riguardante la fusione della geometria piana colla solida.

L'autore della recensione conviene meco che la proprietà del diedro di essere rovesciabile non è un postulato, e mi fa sapere che le proprietà analoghe dell'angolo e del segmento sono l'una conseguenza dell'altra; talchè, ammessa la proprietà p. es. per il segmento, si deduce *facilmente* quella analoga dall'angolo e del diedro. E poi aggiunge « che molti autori, pur riconoscendo perfettamente questo fatto, hanno creduto di poter ammettere come postulato la possibilità di rovesciare un segmento, un angolo o un diedro, perchè consideravano come un *solo postulato* l'ammettere un medesimo fatto per enti della stessa natura. Riconosco che quest'opinione può essere discussa, ma per conto mio mi contento di vederla professata anche da valenti geometri, come Sannia, D'Ovidio e De-Paolis ». Ed io alla mia volta dirò che questo non è completamente vero: perchè il De-Paolis non segue sempre tale criterio. Difatti, mentre egli comprende in un solo postulato il segmento, l'angolo e il diedro, quando si tratta della loro comune proprietà di essere rovesciabili; ammette invece per il solo segmento il postulato d'Archimede, del quale poi fa un teorema per l'angolo, il diedro e le altre grandezze in generale. E i prof. Sannia e D'Ovidio enunciano separatamente il postulato del segmento, quello dell'angolo e quello del diedro. Comunque sia, e senza che in me venga meno la stima che ho sempre avuta per i professori sopra nominati, mi sarà lecito esprimere in proposito la mia opinione; la quale non è certo in armonia con quella manifestata dal sig. Lazzeri. Io mi domando: a che scopo devono attribuirsi ad alcuni enti geometrici, come postulati, delle proprietà, le quali costituiscono altrettanti teoremi? L'autore della recensione dice che molti autori hanno creduto di poter far ciò, perchè si trattava di enti della stessa natura. Sarà questa una ragione plausibile, ma a me non sembra tale; e poi non vedo nel segmento, nell'angolo e nel diedro questa stessa natura.

Invece, per me tali enti non costituiscono altro che tre specie di grandezze; le quali, avendo delle analogie fra loro, sono classificabili sotto un medesimo genere.

Se poi considero la cosa nel rispetto scientifico, allora la trovo anche meno commendevole. Difatti è da tutti convenuto che i postulati d'una scienza, e in particolare quelli della geometria, debbono essere ridotti al minor numero possibile: debbono cioè costituirsi di tutte e sole quelle proposizioni, distinte fra loro, le quali si rendono indispensabili per dedurne le altre verità della medesima scienza. E tutto ciò, s'intende, allo scopo di rendere tale scienza completamente rigorosa ed esatta. Se dunque si classifica fra i postulati la proprietà sopra ricordata del diedro, essendo noto ch'essa appartiene ai teoremi, non si potrà dire, a rigor di termini, d'aver fatto una scienza logicamente e rigorosamente esatta. E quando ciò non sia sufficiente a persuadere il sig. Lazzeri, riporterò qui l'opinione d'un comune amico, il prof. Bettazzi, il quale in un articolo intitolato « I postulati e gli enti geometrici » scriveva: « i postulati d'una scienza devono essere scelti in modo da risultare indipendenti e non contradditori. Se stabiliti che siano in modo da conoscere che soddisfino a tali condizioni, si giungesse in seguito a provare che qualcuno di essi è conseguenza logica degli altri, esso deve essere tolto dalla categoria dei postulati e posto in quella dei teoremi, il conservarlo fra i postulati sarebbe non già inutile, ma bensì *erroneo*, apparendo esso una verità arbitraria, mentre è verità necessaria ». È inutile adunque che il sig. Lazzeri si sforzi a negar fondamento alle mie affermazioni, quando esse sono avvalorate e confortate dall'opinione di valenti colleghi, onde avrò sempre ragione d'insistere che se la fusione della geometria piana colla solida, nel senso specialmente di comprendere in un solo enunciato le proprietà dell'angolo e quelle analoghe del diedro, deve farsi ammettendo un teorema fra i postulati, ciò è scientificamente un errore.

Ho inoltre affermato che tale fusione non è raccomandabile nemmeno dal lato didattico, e il prof. Lazzeri desidera che avvalori la mia asserzione con ragioni positive. Onde io risponderò che ciò è soprattutto questione d'esperienza, ma in ogni modo è chiaro che sarà cosa molto più facile dare ad intendere ad un giovanetto delle nostre scuole liceali successivamente le proprietà del diedro, dopo che egli avrà ben capite e fatte cognizioni proprie quelle dell'angolo, anzichè procedere allo studio di questi due enti contemporaneamente. Son sicuro poi che moltissimi miei colleghi pensano in proposito come me; e non è passato molto tempo che uno dei professori dell'Università di Pisa, amicissimo del De-Paolis, mi riferiva che nella circostanza di certi esami d'abilitazione all'insegnamento, il De-Paolis stesso si era dichiarato didatticamente contrario alla fusione in discorso. La qual cosa farà certamente meraviglia all'autore della recensione, tanto più se osserverà che io, per ribattere le sue argomentazioni, mi giovo del nome stesso del quale egli si è servito per la sua critica. Ma contro i fatti non c'è parole che bastino, ed io ho voluto ricordare la circostanza precedente, onde far capire al sig. Lazzeri che, dichiarandomi pubblicamente contrario

alla fusione della geometria piana colla solida, ero sicuro di non offendere, come egli ha temuto, sebbene fuor di luogo, la memoria del compianto prof. De-Paolis, del quale ho anch'io sempre ammirato la sapienza e l'ingegno.

Non si creda però che combattendo la fusione delle due Geometrie, io voglia tenerle nettamente separate, perocchè penso che sarebbe molto utile l'alternarne convenientemente le parti. E vedrei anzi di buon grado cangiati i programmi ministeriali dei Licei in modo che, dopo i primi quattro libri d'Euclide, si potessero esporre le proprietà di posizione delle rette e dei piani nello spazio; di guisa che i giovani, avanti di accingersi allo studio delle proporzioni, avessero ad un tempo e maggiore cultura matematica e più familiarità colle questioni geometriche.

Vengo ora a parlare dei postulati che ho intercalati fra le prime definizioni del testo Euclideo, e a proposito dei quali la recensione contiene l'unico elogio del mio libro, affermando che per questo rispetto la seconda edizione è migliore della prima. A tanta generosità, è proprio il caso di esclamare: troppa grazia!... Il sig. Lazzeri però dice che tali postulati sono quelli già adottati dal De-Paolis e da altri, ed io invece rispondo che, nella massima parte, sono proprio quelli tacitamente ammessi da Euclide, e che ho fedelmente ricercati. S'intende bene che essi non potranno differire gran che da quelli già conosciuti di altri autori; tuttavia sia per l'ordine diverso col quale si succedono, sia per il modo col quale sono enunciati, si può dire che quasi tutti presentano la loro nota caratteristica.

Difatti il post. I, che chiamo *del punto*, è ammesso da Euclide nella prop. IV; ed io nell'enunciarlo a parte, ho voluto dare alla proprietà caratteristica di questo ente, la quale consiste in ciò che un punto può sempre pigliare la posizione di qualsivoglia altro punto dello spazio, quell'importanza che in generale non gli viene attribuita. Ho fatto ciò sembrandomi che tale proprietà dia un'idea giusta di quella che ordinariamente chiamasi *omogeneità* dello spazio; la quale è da molti autori ammessa come postulato, senza prima dichiararne bene il significato; e poi senza alcun vantaggio, perchè tale parola non viene da essi mai invocata.

Il post. III, che si riferisce alla linea in genere, è implicitamente ammesso in quasi tutte le proposizioni del secondo libro d'Euclide. La prima parte del suo enunciato dice: « *in ogni linea, terminata o no, esistono infiniti punti che la dividono in parti* »; ove l'inciso è stato messo a posta onde escludere dall'idea di linea ch'essa possa avere *interruzioni* o *discontinuità*, e ciò senza far uso di queste parole, le quali non essendo facilmente definibili, devono, come la parola *omogenea*, essere bandite dai postulati.

Il post. IV è dedicato alla linea retta. Il De-Paolis dice che la retta è una linea *indefinita;* ed io, come già hanno fatto altri, ommetto questa parola; la quale, a somiglianza delle altre precedentemente ricordate, non ha ragione di trovarsi fra i postulati. Nella terza parte poi io m'allontano dal testo Euclideo, dove esso dice che *due rette non possono racchiudere uno spazio*, e preferisco invece quest'altra dizione: *La posizione di una retta è individuata dalle posizioni di due qualunque dei suoi punti;*

donde si deduce facilmente che due rette, le quali hanno due punti in comune, avendo la stessa posizione, coincidono. In tal modo viene ad essere evitata la contraddizione, la quale, sebbene apparente, non si può dire che non si faccia; allorchè si afferma che per due punti non può passare che una linea retta, e poi ce ne facciamo passare più d'una.

Il post. V è quello del segmento, ed è ammesso tacitamente da Euclide nella prop. VI.

Il post. VI si riferisce alla superficie in generale ed è specialmente usato in quasi tutte le proposizioni del secondo libro. Rispetto ad esso valgono le stesse considerazioni già fatte a proposito del postulato della linea in genere.

Il post. VII contiene le proprietà primordiali del piano. Nella prima parte esso non è conforme al testo Euclideo, ammettendo la proprietà che *se una retta ha due punti comuni con un piano è tutta situata in esso;* mentre Euclide nel libro XI ha il teorema: « *una retta non può essere in parte in un piano ed in parte fuori di esso* ». La ragione di ciò sta nel fatto che la dimostrazione di questo teorema non è rigorosa: difatti mentre in esso si suppone che il prolungamento d'una retta, situata in un piano, sia fuori del piano stesso; poi, durante il ragionamento, si ammette che la medesima retta abbia, dalla stessa parte, un altro prolungamento tutto situato in quel piano.

Il post. VIII è quello dell'angolo, che Euclide ammette tacitamente nella prop. V. A proposito di esso il prof. Lazzeri mi domanda, se mi sono accorto che esso può dedursi da quello del segmento. Onde io dirò che, sebbene avessi veduto che una certa dipendenza esiste fra questi due postulati, osservando che quando si rovescia l'angolo al vertice d'un triangolo isoscele, si rovescia anche la sua base, credo non troppo facile, se non impossibile, dedurre il postulato dell'angolo da quello del segmento. In ogni modo non avrei potuto tener conto dell'osservazione precedente, altro che alterando in gran parte l'ordine del testo Euclideo; la qual cosa non volevo nè dovevo fare, tanto più che, preferendo il metodo da me seguito, interpretavo più fedelmente il testo medesimo. Si badi però, che queste parole non debbono mettermi in contraddizione con ciò che ho precedentemente sostenuto a proposito del postulato del diedro; e dichiaro anzi che qualora il sig. Lazzeri volesse indicarmi quel modo facile a cui egli allude di ottenere il postulato dell'angolo da quello del segmento, senza ch'io fossi costretto ad alterare di troppo l'ordine del testo Euclideo, sarei lietissimo di poter introdurre questo miglioramento nel mio libro. Allora starei sicuro che almeno una cosa buona ci si troverebbe!...

Il post. IX si riferisce al movimento delle figure, ed è usato da Euclide nelle prop. IV ed VIII. Il De-Paolis enunciò il postulato del movimento dicendo: *in tutto lo spazio è possibile il movimento delle figure, e senza deformazione.* Il Bettazzi, nell'articolo citato, criticò la frase « senza deformazione » ritenendola inutile ed inesatta; per la ragione che se una figura si deforma, vuol dire che perde alcune delle sue proprietà, onde non è più la figura primitiva. A me invece quella frase, che non approvo sola-

mente perchè non è ben definita, fa pensare ad un'altra cosa: cioè alla possibilità che una figura possa muoversi, se non deformandosi, certo variando e soddisfacendo a date condizioni. Per esempio: una circonferenza si può muovere mantenendo costante il suo raggio, oppure facendolo variare; ed in questo secondo caso, non si può dire propriamente che essa si deformi, e tanto meno che perda le sue proprietà. Ne viene per conseguenza che il postulato del movimento, specialmente se esso deve servire a stabilire il concetto dell'eguaglianza di due figure, non è ben determinato, quando ci si limiti a dire, come vuole il Bettazzi, che « una figura geometrica può muoversi nello spazio geometrico ». Ond'è che io, avendo fatto precedere i postulati del segmento e dell'angolo e però avendo già stabilita l'eguaglianza di due segmenti e di due angoli, ho potuto enunciare il postulato del movimento diversamente dagli altri autori, dicendo: « Una figura può muoversi in modo che rimangano uguali i segmenti, i quali uniscono, due a due, i suoi punti; e rimangano pure uguali gli angoli che le sue rette, due a due, fanno fra loro ». Ciò non esclude il caso che una figura possa muoversi per modo che i suoi segmenti, oppure i suoi angoli soddisfino a condizioni diverse. Si deduce poi facilmente da tal postulato, che se tre punti della figura sono fissi, essa è immobile.

Resta ora che io parli, seguendo la recensione, delle dimostrazioni cambiate e dei teoremi aggiunti o soppressi. A leggere la recensione stessa sembra che questi cambiamenti ed aggiunte siano tali e tante da non più riconoscere il testo Euclideo. La verità però è questa: che sopra quarantotto proposizioni, di cui si compone il primo libro d'Euclide, mi son permesso di cambiare due sole dimostrazioni: quelle delle proposizioni V ed VIII; e di togliere due soli teoremi: il VII ed il XXI. Chiunque abbia insegnato gli elementi d'Euclide, avrà certamente osservato che le dimostrazioni più difficili a impararsi e a ritenersi dai giovani alunni sono appunto quelle dei teoremi V e VII. Questa sola considerazione però non sarebbe stata sufficiente a farmi cambiare la prima delle dimostrazioni riferite e a togliere la seconda; tanto era in me il proposito di non apportare sensibili modificazioni al testo Euclideo. Ma avendo osservato che la dimostrazione V contiene tacitamente il postulato dell'angolo, e che una volta ammesso questo postulato, il farla dipendere dalla prop. IV, come fa Euclide, diventava un vero artifizio; era naturale ch'io la cangiassi, e ad un ragionamento che prima stancava la mente dei giovani, ne sostituissi un altro, di cui la brevità e l'evidenza sono ammirevoli. Ho cambiato anche la dimostrazione del teorema VIII, e ciò per sostituire un ragionamento diretto ad uno all'assurdo, e per aver modo di togliere il teorema VII; il quale, come dicevo poco fa, oltre a non essere di facile intelligenza, non ha alcun uso nel seguito dell'opera. Le dimostrazioni all'assurdo sono troppo frequenti in Euclide, ed è già stato notato come ciò costituisce uno dei suoi difetti; non avrò dunque avuto un gran torto a diminuirne il numero. Ho poi tolto il teorema XXI, perchè, avendolo incluso in un corollario della proposizione precedente, si rendeva inutile.

Ora tutto questo il sig. Lazzeri lo chiama riveder le bucce ad Euclide.

Son sicuro però che chi mi giudicherà con più imparzialità e benevolenza di lui, capirà benissimo che l'unico mio pensiero è stato quello di rendere sempre più adatto all'insegnamento un libro, che dal 1867 in poi aveva già recato molti vantaggi all'istruzione secondaria classica. È singolare poi che il sig. Lazzeri esca fuori con simili frasi, dopo avere scritto in principio della sua recensione, che gli elementi d'Euclide « hanno continuato a dominare invariati nelle nostre scuole con gli stessi difetti, colle stesse figure brutte e spesso sbagliate, senza migliorarsi mai, non tenendo alcun conto dei progressi fatti in questo tempo dagli studi geometrici elementari ». Adunque se traendo occasione dai progressi fatti e profittando della mia esperienza nell'insegnamento, cerco appunto di raggiungere questi miglioramenti del testo euclideo tanto desiderati ed invocati, si dovrà dire che ho la pretensione di riveder le bucce ad Euclide? In che cosa avrebbero dovuto consistere i miglioramenti se non avevano per scopo di porre colla maggiore esattezza e precisione i concetti della geometria elementare, e se non fossero stati tali che tutte le verità di questa scienza si svolgessero le une dalle altre col massimo rigore logico? Secondo il sig. Lazzeri il mio libro non ha che difetti, ma intanto nella sua recensione non c'è la prova di un solo. Eppure egli non dovrebbe ignorare che quando si biasima, molto più di quando si loda, abbiamo il dovere di dimostrare le cose affermate. Egli parla di figure brutte e spesso sbagliate, ma in realtà di sbagliate io non ne trovo alcuna. Se son brutte è questione soprattutto tipografica, e poi se son sempre state a quel modo, che c'è da farci? Del resto alla figura materiale non credo che si debba dare una grande importanza: perchè se qualche volta è utile allo studioso, qualche altra può essere nociva; e chi ha esperienza dell'insegnamento avrà veduto, che questo secondo caso si dà assai di frequente. Per mio conto voglio che gli alunni si abituino a farle a modo loro le figure, e soprattutto che le abbiano chiare nell'immaginazione. Alcuni difetti poi di cui parla la recensione sono addirittura immaginari; come quello di cui l'esistenza si può dedurre dalla seguente domanda: « si è mai accorto il dott. Gremigni che le prop. 1, XII, XXII non si possono dire dimostrate rigorosamente senza i teoremi relativi alle intersezioni d'un circolo con una retta, e di due circoli fra loro, teoremi che Euclide mette nel III libro? » Ed io alla mia volta domanderò al sig. Lazzeri: ha mai letta l'osservazione che è posta alla fine della prop. XXII? Se l'avesse letta ci avrebbe trovato la dimostrazione rigorosa, che egli desidera: poichè in essa si dimostra appunto che le circonferenze, le quali servono per la costruzione del triangolo, una volta che siano soddisfatte le condizioni poste nell'enunciato del problema, si segheranno necessariamente; epperò il problema, date quelle condizioni, sarà sempre possibile e la sua costruzione sarà esatta e rigorosamente dimostrata. Che cosa vuol dunque significare il sig. Lazzeri colla sua domanda? Avrebbe forse voluto che portassi le proposizioni del III nel I libro? E se anche tale spostamento avesse servito a rendere rigorose quelle proposizioni (cosa del resto che non è possibile: perchè Euclide nel III libro non dimostra altro che se due circonferenze si segano non avranno lo stesso centro, e i punti d'intersezione non sa-

ranno più di due) avrei dovuto mettere le proposizioni del terzo libro avanti la prop. I del primo libro? Allora sì che poteva dirsi con ragione che l'Euclide non si sarebbe più riconosciuto. Eh via, sig. Lazzeri, sta tutta qui la sua critica?

Quanto alle proposizioni da me aggiunte, le ho distinte colle lettere dell'alfabeto, e si riferiscono tutte all'eguaglianza e all'equivalenza dei poligoni. Se si tratta invece delle definizioni e dei corollari aggiunti, essi sono tutti scritti con carattere diverso; talchè può sempre distinguersi ciò che riguarda il testo euclideo, da quello che è mia opera. Qual ragione dunque ha il sig. Lazzeri di chiudere la sua recensione colle seguenti parole? « Tutto ciò sarà utile, ma è il caso di domandarsi, se con tante note, aggiunte e modificazioni gli *Elementi d'Euclide* sono ancora gli *Elementi d'Euclide*, e se per caso il nome del grandissimo geometra greco è utilizzato soltanto per dare accesso privilegiato nelle nostre scuole all'opera di un minor geometra italiano ». Io non starò qui a rilevare la malignità, che è contenuta in queste frasi; ma farò osservare all'autore della recensione, che se il nome d'Euclide fosse bastato perchè i suoi *Elementi* avessero libero accesso nelle nostre scuole, non si sarebbe sentito il bisogno d'una nuova edizione; tanto più che la prima portava i nomi di Enrico Betti e Francesco Brioschi. Di più egli dovrebbe sapere che i libri non s'impongono altro che per la loro bontà e il valore didattico e scientifico che hanno; e sarebbe un far torto ai professori delle scuole secondarie classiche, qualora si pensasse diversamente. E poi se il mio libro è pieno di difetti, come crede il sig. Lazzeri, perchè dovrebbe avere accesso privilegiato nelle scuole? È un fatto che i programmi ministeriali prescrivono il metodo euclideo per l'insegnamento della Geometria nei Licei e Ginnasi, ma non indicano nè questo o quel libro speciale. A che cosa mirano dunque le parole della recensione? A nient'altro che a colpire il *minor geometra,* il quale non ha altro torto che di combattere contro coloro, i quali sostengono potersi fondere, fin dagli elementi, la geometria piana colla solida. Meno male che, quantunque piccolo, egli conosce il fatto suo, e sa bene difendersi; ciò che capirà anche il sig. Lazzeri, se vorrà provarsi a replicare.

Quanto poi all'utile che potrò ricavare dalla mia opera, è bene che si sappia, come in simili faccende non sono mai gli autori che fanno interesse, bensì gli editori; e, nel mio caso speciale dirò che, se mi sono dato a curare una nuova edizione degli Elementi d'Euclide, l'ho fatto principalmente per aderire ad un desiderio espressomi dal compianto prof. Betti.

Firenze, 14 febbraio 1893. Prof. M. Gremigni.

Illustrissimo Signor Direttore,

Non ho l'intenzione di discutere gli apprezzamenti fatti dal sig. Burali-Forti su alcuni punti dei miei « Elementi di Aritmetica e Algebra » nell'ultimo fascicolo della *Rivista di Matematica;* tuttavia non posso lasciar correre la pretesa *insufficienza delle proprietà caratteristiche,* da me date per le grandezze, che egli deduce da un errore di stampa o, se si vuole, di penna, e da asserzioni, certamente involontarie, di cose non vere o inesatte.

L'errore è questo: nella definizione di *sistema ordinario e completo di grandezze* (n. 67, pag. 31), è stampato: « Se date due grandezze » invece che « se date due grandezze disuguali », come doveva essere. Dietro questo errore, egli mi fa stabilire la proposizione δ, in luogo dell'altra contrassegnata δ'; ossia, nella sua interpretazione, ammette che io abbia voluto escludere la possibilità di grandezze eguali. Senza tener conto dell'esempio da me addotto poche linee più avanti, nel quale si parla di « coppie di numeri disuguali », e che dovrebbe, a mio avviso, eliminare qualunque equivoco, mi sembra legittima l'osservazione che, dopo una simile interpretazione, egli avrebbe dovuto dichiarare il mio libro, nel quale s'incontrano ad ogni passo eguaglianze di grandezze, nulla più che una completa contraddizione.

Egli invece continua le sue censure, affermando, o almeno lasciando credere al lettore, che io non abbia stabilito le proposizioni da lui contrassegnate γ' (suppongo, in luogo di γ, come è stampato) ed ε; mentre la tesi della γ' ($A - \varepsilon A \times G$), valevole solo per le grandezze non *indifferenti*, è espressa nella definizione di *risultante* (n. 58), colle parole « formando una cosa diversa dalla prima », e la ε non è altro che l'uniformità della *divergenza,* da me dimostrata nel n. 69. La prova, in fine, da lui data, che la ε non possa discendere dalle mie proposizioni, coll'esempio dei *razionali, lo zero compreso, dando ad* $A \times B$ *il significato dell'ordinario prodotto,* è di fatto erronea; poichè, secondo i miei Elementi (n. 245, pag. 125), lo zero è, in questo caso, l'*assoluto* (*inferiore*), il quale è introdotto solo più tardi al n. 104 (pag. 48), dove è stabilita, per esso, l'insussistenza della proposizione ε, origine dei casi di indeterminazione.

La ringrazio per la cortesia che, spero, Ella vorrà usarmi, pubblicando la mia rettifica nella *Rivista,* e mi affermo

Sassari, 25 marzo 1893. *Suo devotissimo*

GIOVANNI BIASI.

Sulla raccolta di formule.

III.

La parte III della raccolta contiene le principali formule di aritmetica. Nel §6 sono contenute le più semplici proposizioni della *teoria dei numeri,* ma sarebbe desiderabile che tale teoria, già così estesa, fosse raccolta in una parte speciale del formulario.

C. Burali-Forti, *Accademia Militare, Torino.*

Indice.

§ 1. Multipli.
§ 2. Quoto e resto.
§ 3. Massimo divisore.
§ 4. Minimo multiplo.
§ 5. Numeri primi.
§ 6. Elementi della teoria dei numeri.

Spiegazione dei segni.

Il segno quot significa *quoto* o *quoziente* [§2P1].
» rest » *resto* [§2P5].
» D » *massimo divisore* [§3P1, 1'].
» m » *minimo multiplo* [§4P1, 1'].
» Np » *numero primo* [§5P1].
» mp(b, a) ove a e b sono numeri interi diversi da zero, indica la *massima potenza di* b *che è divisore di* a [§5P19].
» $\min_n u$ ove n è un' N e u una classe di numeri, indica l'n-esimo numero della classe u, quando questi sieno disposti in ordine crescente [§5P35, 36].
» u_n ove n è un numero intero e u una classe di numeri interi equivale al segno $\min_n u$ [§5P37].
» πa ove a è un numero intero, indica la classe dei numeri non maggiori di a e primi con a [§6P11].
» φa ove a è un numero intero, indica il numero degli individui della classe πa [§6P12].

Sulla teoria delle grandezze.

Nota I.

Questa nota e le seguenti contengono una serie di osservazioni alla parte IV del formulario riguardante la teoria delle grandezze.

Il § 1 di questa parte del formulario contiene le definizioni, le proposizioni primitive e i gruppi di proposizioni primitive indipendenti. Il contenuto di questo primo paragrafo, sarà distribuito in queste note secondo il bisogno.

Ho ammessa nota la teoria dei numeri reali per la trattazione di quella delle grandezze, riducendosi a poche le proprietà di queste indipendenti dal concetto e dalla teoria, almeno, del numero intero. Nè ho creduto conveniente, ammessa nota la sola teoria dei numeri interi, ottenere i razionali e gli irrazionali come classi speciali di grandezze, per ragioni che indicherò nell'ultima di queste note, la quale conterrà, in gran parte, osservazioni di ordine puramente didattico.

Ho posto a destra dell'enunciato di ogni proposizione i numeri indicanti le proposizioni primitive dalle quali la proposizione stessa dipende. Con ciò ho potuto risparmiarmi l'introduzione di simboli per indicare classi speciali di grandezze, mentre ho fornito il mezzo, a chi debba servirsi di un numero limitato di proposizioni, di riconoscere immediatamente quali proprietà deve ammettere sieno verificate per la classe speciale che considera.

Non ho introdotto la grandezza *zero* e la grandezza *infinito;* nè ho considerato le classi a *due sensi* e quelle ad *n dimensioni.*

Le note storiche riguardanti l'argomento che tratto, saranno pubblicate insieme al formulario completo.

NOTAZIONI

Oltre le notazioni già introdotte nelle parti precedenti del formulario, farò uso delle seguenti:

Il segno	G	indica	*grandezza.*
»	Tn	»	*teoria dei numeri interi.*
»	Tr	»	*teoria dei razionali.*
»	Tq	»	*teoria dei numeri reali.*
»	Pi	»	*principio d'induzione.*

§ 1.

1. Ammetteremo che per gli individui di una classe di grandezze, sieno verificate, per ciò che riguarda l'*eguaglianza*, le condizioni già date per l'eguaglianza di due individui di una classe qualunque (Formulario I§4P7-9).

Ammetteremo cioè che

$$\begin{aligned} &A, B, C \varepsilon G . \supset : \\ &A = A \\ &A = B . = . B = A \\ &A = B . B = C . \supset . A = C . \end{aligned}$$

2. Se G è una classe di grandezze e A, B sono due qualunque dei suoi individui, con $A + B$ indicheremo una qualche cosa, che si ottiene eseguendo su A l'operazione $+ B$.

Tale operazione (+) è completamente arbitraria. Essendo p. e. G la classe dei piani, con $A + B$ possiamo indicare la retta comune ai due piani A e B. In tal caso $A + B$ è indeterminato se A e B coincidono o anche se A e B sono paralleli quando non si introduca la nozione della retta all'infinito. Se invece G è ancora la classe dei piani, ogni piano è considerato come classe di punti, e l'operazione + è l'operazione logica $\cap$, allora $A + B$ indica la retta comune ai piani A e B se questi sono distinti, il piano A se A e B coincidono, il *nulla* o una retta all'infinito, secondo le convenzioni, se i piani A e B sono paralleli. Se G è p. e. la classe dei numeri come operazione + può prendersi l'*addizione*, la *sottrazione*, la *moltiplicazione*, ecc. Essendo G una classe di grandezze come operazione + può prendersi l'ordinaria *misura*, si può cioè convenire di indicare con $A + B$ la misura di A mediante B, e in tal caso $A + B$ è un individuo appartenente alla classe dei numeri reali.....

Definendo l'operazione + in modo che $A + B$ sia un individuo appartenente ad una classe diversa dalla classe G, allora l'espressione $(A + B) + C$ o $A + (B + C)$, essendo anche C un individuo di G, se non si fanno altre convenzioni, non ha più alcun significato.

Ammetteremo quindi che l'operazione + sia definita in modo tale che $A + B$ sia un individuo della classe G. In simboli

0. $A, B \varepsilon G . \supset . A + B \varepsilon G$ Pp.

Se G è la classe dei numeri interi positivi, soddisfano alla Pp 0 le operazioni *addizione* e *moltiplicazione*, non vi soddisfano le operazioni *sottrazione* e *divisione*. Se G è la classe dei razionali positivi o nega-

tivi, lo zero compreso, soddisfano alla Pp 0 le operazioni *addizione, moltiplicazione, sottrazione,* e non si soddisfa l'operazione *divisione.* Se G è la classe dei razionali positivi, lo zero escluso, soddisfano alla Pp 0 le operazioni *addizione, moltiplicazione, divisione* e non vi soddisfa l'operazione *sottrazione.*

La Pp 0 non è stata indicata nella dipendenza delle varie proposizioni dalle proposizioni primitive, essendo pochissime quelle proposizioni che da essa sono indipendenti.

3. Potremo stabilire l'operazione $+$ in modo che soddisfi a tutte o a parte delle proposizioni primitive seguenti:

$$A, B, C \varepsilon G . \supset :$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & A = B . \supset . A + C = B + C \\ 1_1. & A = B . \supset . C + A = C + B \\ 2. & A + C = B + C . \supset . A = B \\ 2_1. & C + A = C + B . \supset . A = B \\ 3. & A + B = B + A \\ 4. & (A + B) + C = A + (B + C) \end{array}\right\} \text{Pp.}$$

I gruppi di Pp indipendenti che si possono formare con le Pp precedenti, stabiliscono le condizioni caratteristiche per altrettante classi di operazioni $+$. Se p. e. G è la classe dei numeri reali, lo zero escluso, soddisfano a tutte le Pp precedenti le operazioni *addizione* e *moltiplicazione,* mentre la *divisione* soddisfa solo alle Pp1 . 1_1 . 2 . 2_1 . Soddisfa alle Pp precedenti l'operazione *addizione* come si definisce ordinariamente per le grandezze geometriche ecc. .....

La Pp1 esprime che: « Se A, B, C sono grandezze e A e B sono eguali, allora eseguendo su A e B l'operazione $+ C$, i risultati che si ottengono sono eguali ». Esistono classi G e operazioni $+$ per le quali la Pp1 non è vera. Se p. e. G è la classe dei razionali e $A + B$ indica la somma nel senso aritmetico dei numeratori, allora la Pp1 non è vera. La Pp1 è dunque necessaria per certe classi G e per certe classi di operazioni $+$, potendo esistere alcune di queste, per le quali la Pp1 non è vera.

La Pp1_1 esprime che: « Se A, B, C sono grandezze e A e B sono eguali, allora il risultato che si ottiene eseguendo su C l'operazione $+A$ è eguale al risultato che si ottiene eseguendo su C l'operazione $+B$. Anche questa, come la precedente, è necessaria.

Le Pp2 e 2_1 sono, rispettivamente, le inverse delle Pp1 e 1_1. Se G è la classe dei numeri interi, lo zero compreso, e l'operazione $+$ è l'ordinaria *moltiplicazione,* allora le Pp2 e 2_1 non sono vere. Dunque le Pp2 e 2_1 sono necessarie.

La Pp3 esprime, in un caso particolare, la proprietà *commutativa* o *permutativa* dei termini della somma. La Pp3 è necessaria, poichè se G è p. e. la classe dei numeri reali, lo zero escluso, e l'operazione $+$ è l'ordinaria *divisione*, allora la Pp3 è falsa.

La Pp4 esprime, in un caso particolare, la proprietà *associativa* della somma. La Pp4 è necessaria, poichè se la classe G è la classe dei numeri reali positivi o negativi, lo zero compreso, e l'operazione $+$ è la *sottrazione*, allora la Pp4 non è vera.

4. Le Pp date al numero precedente non sono tutte indipendenti. Le seguenti proposizioni (a), (b), (a'), (b'), equivalgono, ordinatamente, alle P1, 2, 1', 2' del § 2 del formulario.

$$(a)\quad \text{Pp1} \,.\, \text{Pp3} \,.\, \supset .\, \text{Pp1}_1$$
$$(b)\quad \text{Pp2} \,.\, \text{Pp3} \,.\, \supset .\, \text{Pp2}_1$$
$$(a')\quad \text{Pp1}_1 \,.\, \text{Pp3} \,.\, \supset .\, \text{Pp1}$$
$$(b')\quad \text{Pp2}_1 \,.\, \text{Pp3} \,.\, \supset .\, \text{Pp2}.$$

Dalle proposizioni (a) e (a') si deduce (Formulario I§2P24)

$$\text{Pp1} \,.\, -\text{Pp1}_1 \,.\, \supset .\, -\text{Pp3}$$
$$\text{Pp1}_1 \,.\, -\text{Pp1} \,.\, \supset .\, -\text{Pp3} \;;$$

da queste si deduce (I§2P17, 10)

$$(\text{Pp1} \,.\, -\text{Pp1}_1) \cup (\text{Pp1}_1 \,.\, -\text{Pp1}) \,.\, \supset .\, -\text{Pp3} \;;$$

ovvero facendo uso del segno $\circ$, *aut* dei latini (I §3P24)

$$(c)\quad \text{Pp1} \circ \text{Pp1}_1 \,.\, \supset .\, -\text{Pp3} \;,$$

e analogamente, dalle P (b), (b')

$$(c')\quad \text{Pp2} \circ \text{Pp2}_1 \,.\, \supset .\, -\text{Pp3} \;.$$

La (c) esprime che « Se è vera la Pp1 e non è vera la Pp1_1 oppure non è vera la Pp1 ed è vera la Pp1_1, allora la Pp3 non è vera ». La (c') ha analogo significato.

Le P (c) e (c') possono trasformarsi nelle seguenti (I§2P4.§3P29):

$$\text{Pp3} \,.\, \supset .\, (-\text{Pp1} \,.\, -\text{Pp1}_1) \cup (\text{Pp1} \,.\, \text{Pp1}_1)$$
$$\text{Pp3} \,.\, \supset .\, (-\text{Pp2} \,.\, -\text{Pp2}_1) \cup (\text{Pp2} \,.\, \text{Pp2}_1) \,.$$

La prima di queste esprime che « Se la Pp3 è vera, le Pp1 e 1_1 devono esser vere insieme o false insieme ». Analogo significato ha la seconda.

Se G è p. e. la classe dei razionali, lo zero escluso, e l'operazione $+$ è l'ordinaria divisione, allora le Pp1, 1_1, 2, 2_1 sono vere e la Pp3 è

falsa. Ciò dimostra che la Pp3 non è conseguenza delle Pp1, 1_1, 2, 2_1. In simboli

$$\mathrm{Pp}1 . \mathrm{Pp}1_1 . \mathrm{Pp}2 . \mathrm{Pp}2_1 . - \mathrm{Pp}3 . - = \Lambda .$$

Possiamo dedurre da questo che se in un gruppo di Pp indipendenti comparisce la Pp1 o 1_1 si può a questa sostituire le due Pp1_1 e 3 o 1 e 3. Lo stesso dicasi per le Pp2 e 2_1. Il gruppo in generale 1 . 1_1 . 2 . 2_1 . 3, può ridursi al gruppo 1 . 2 . 3, oppure ad uno dei gruppi 1_1 . 2_1 . 3 ; 1 . 2_1 . 3 ; 1_1 . 2 . 3. Ad un gruppo però che contenga p. e. 1 e 3 non si può sostituire al gruppo 1 . 3 il gruppo 1 . 1_1. Nel formulario abbiamo soppresse le Pp1_1 e 2_1, quando comparisce la Pp3, sostituendo quindi alle 1_1 e 2_1 le Pp1 e 2 ; o in altri termini ai gruppi 1_1 . 2_1 . 3 ; 1 . 2_1 . 3 ; 1_1 . 2 . 3 , abbiamo sempre sostituito il gruppo 1 . 2 . 3, ma è chiaro che a questo si può sostituire uno qualunque di quelli.

5. Esaminiamo ora quali gruppi di Pp indipendenti si possono formare con le Pp date al n. 3.

Gruppo 1 . 1_1 . 2 . 2_1.

Se G è la classe dei numeri interi, lo zero escluso, (G=N) e l'operazione + è tale che A+B indica la potenza che ha A per base e B per esponente, allora le Pp1 . 1_1 . 2 sono vere ed è falsa la Pp2_1 (poichè qualunque potenza di 1 è uno. Dunque la Pp 2_1 non è conseguenza delle Pp1 . 1_1 . 2 . In simboli

$$(\alpha) \quad \mathrm{Pp}1 . \mathrm{Pp}1_1 . \mathrm{Pp}2 . - \mathrm{Pp}2_1 . - = \Lambda .$$

Se G = N e A + B è la potenza che ha B per base e A per esponente, allora come nel caso precedente si ha

$$(\beta) \quad \mathrm{Pp}1 . \mathrm{Pp}1_1 . \mathrm{Pp}2_1 . - \mathrm{Pp}2 . - = \Lambda .$$

Se G = N e A + B indica una delle radici algebriche di indice B di A, allora le Pp2 e 2_1 sono vere, e sono false le Pp1 e 1_1. Dunque la Pp1 e la Pp1_1 non sono conseguenze delle Pp2 . 2_1. In simboli

$$\mathrm{Pp}2 . \mathrm{Pp}2_1 . - \mathrm{Pp}1 . - = \Lambda \; ; \qquad \mathrm{Pp}2 . \mathrm{Pp}2_1 . - \mathrm{Pp}1_1 . - = \Lambda$$

oppure $$(\gamma) \quad \mathrm{Pp}2 . \mathrm{Pp}2_1 . - \mathrm{Pp}1 . - \mathrm{Pp}1_1 . - = \Lambda .$$

Se G è la classe dei numeri interi, lo zero compreso, e l'operazione + è l'ordinaria moltiplicazione, allora si ha

$$(\delta) \quad \mathrm{Pp}1 . \mathrm{Pp}1_1 . - \mathrm{Pp}2 . - \mathrm{Pp}2_1 . - = \Lambda .$$

Pare manchino esempi di classi per le quali essendo vere le Pp1 . 2 . 2_1 sia falsa la Pp1. L'impossibilità materiale di ottenere la Pp1 o

la $Pp1_1$ dalle rimanenti, può ritenersi come dimostrazione delle proposizioni

$$Pp1 . Pp2 . Pp2_1 . - Pp1_1 . - = \Lambda$$
$$Pp1_1 . Pp2 . Pp2_1 . - Pp1 . - = \Lambda$$

e di altre della medesima specie che si presenteranno per altri gruppi, riducendosi, probabilmente, qualunque discussione priva di esempi ad una inconcludente dissertazione filosofica.

GRUPPO 1 . 2 . 3 . 4.

Se G è la classe dei punti e A+B è il punto medio del segmento che ha A e B per estremi, allora le Pp1 . 2 . 3 sono vere ed è falsa la Pp4; e quindi questa non è conseguenza delle altre. In simboli

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . - Pp4 . - = \Lambda .$$

Se G è la classe dei *quaternioni* (lo zero escluso) e l'operazione + è il prodotto, secondo Hamilton, allora le Pp1 . 2 . 4 sono vere ed è falsa la Pp3. Dunque

$$Pp1 . Pp2 . Pp4 . - Pp3 . - = \Lambda .$$

Se G è la classe dei numeri reali, lo zero compreso, e l'operazione + è la moltiplicazione, allora le Pp1 . 3 . 4 sono vere ed è falsa la Pp2. Dunque

$$Pp1 . Pp3 . Pp4 . - Pp2 . - = \Lambda .$$

Come si è già osservato, può ritenersi come evidente la proposizione

$$Pp2 . Pp3 . Pp4 . - Pp1 . - = \Lambda .$$

GRUPPI $1_1 . 2_1 . 3 . 4$; $1 . 2_1 . 3 . 4$; $1_1 . 2 . 3 . 4$.

Servendosi delle medesime classi e delle medesime operazioni + considerate per il gruppo 1 . 2 . 3 . 4, si dimostra che le Pp dei gruppi ora citati sono indipendenti.

GRUPPO $1 . 1_1 . 2 . 2_1 . 4$.

Se G è la classe dei punti e A+B indica il punto medio del segmento che ha A e B per estremi, allora la Pp4 non è vera e sono vere le $Pp1 . 1_1 . 2 . 2_1$. Dunque

$$Pp1 . Pp1_1 . Pp2 . Pp2_1 . - Pp4 . - = \Lambda .$$

Facendo uso delle classi G e delle operazioni + adoperate per dimostrare le proposizioni (α), (β), (γ), (δ) di questo numero, si ottengono, ordinatamente, le proposizioni

$$Pp1 . Pp1_1 . Pp2 . - Pp2_1 . - Pp4 . - = \Lambda$$
$$Pp1 . Pp1_1 . Pp2_1 . - Pp2 . - Pp4 . - = \Lambda$$
$$Pp2 . Pp2_1 . - Pp1 . - Pp1_1 . - Pp4 . - = \Lambda$$
$$Pp1 . Pp1_1 . Pp4 . - Pp2 . - Pp2_1 . - = \Lambda .$$

Pare che, anche in questo caso, manchino esempi di classi G e di operazioni + per le quali essendo vere quattro delle Pp del gruppo che si considera, fra le quali sia compresa la Pp4, non sia vera la Pp rimanente.

§ 2. — *La somma.*

6. Il § 2 del formulario contiene le principali proprietà che si deducono dalle Pp1-4. Le P1-5 di questo paragrafo sono indipendenti dal concetto di numero intero, le altre no.

La P 6 esprime che « Se n è un numero intero maggiore di 1 e f è una successione di n individui della classe G, allora la somma di queste grandezze è pure un individuo di G ». In altri termini « La somma di un *numero finito* di grandezze è una grandezza ». Questa proposizione dipende solamente dalla Pp0.

La P7 dimostra che la proprietà *associativa,* ammessa in un caso particolare con la Pp4, è vera in generale, quando per la classe G e l'operazione + sia vera non solo la Pp4, ma anche la $Pp1_1$. Non è dunque necessario che la classe G e l'operazione + godano della proprietà *commutativa,* affinchè sia vera in generale la proprietà *associativa.*

Dalle Pp1, 3 e dalla P11 si deduce facilmente la Pp4. Dunque Pp1 . Pp3 . – Pp4 . ↄ . – P11 e quindi la proprietà *commutativa* per $n > 2$ è conseguenza necessaria della proprietà *associativa.*

7. Faremo per le formule contenute in questo paragrafo, alcune osservazioni, che valgono anche per le formule dei paragrafi seguenti e che ci risparmieremo di ripetere in seguito.

La definizione di eguaglianza « due cose sono eguali, quando l'una può esser sostituita all'altra » che è usata da molti, permette — interpretata che sia largamente, poichè è priva di un significato preciso, rimanendo a sapere *quando è che la sostituzione può farsi* — permette, diciamo, di dimostrare le Pp1 e 1_1 da noi date come indimostrabili. Esistendo classi G e operazioni + per le quali le Pp1 e 1_1 non sono vere, si può concludere che l'ordinaria definizione di uguaglianza o è falsa, o l'interpretazione che si fa di essa, a causa della mancanza di precisione del suo significato, è erronea. Una discussione in proposito può facilmente acquistare carattere filosofico e quindi divenire inintelligibile a chi la scrive e a chi la legge. Noi ci limiteremo ad osservare che, definita la classe eguaglianza mediante le sue proprietà caratteristiche (n. 1), per ogni operazione che si voglia introdurre, potremo dimostrare essere vera o falsa la proposizione « Se due grandezze sono eguali, l'una può essere sostituita all'altra ». Nello stato

attuale della scienza pare questa la via che deve essere seguita; ne seguiremo un'altra quando una definizione della classe eguaglianza, diversa da quella riportata al n. 1, sarà data in modo che soddisfi alle esigenze del rigore scientifico.

Esaminando le dimostrazioni delle P del § 2, che dipendono dalla Pp1 o dalla $Pp1_1$ scorgiamo facilmente che la Pp1 o la $P1_1$ comparisce solo perchè non abbiamo fatto uso del principio di sostituzione.

§ 3. — *Maggiori e minori.*

1. $A, B \varepsilon G . \supset : A > B . = . A \varepsilon B + G$
2. » $. \supset : A < B . = . B > A$

[Def.]

8. Il segno $>$ lo leggeremo *è maggiore di* e il segno $<$ lo leggeremo *è minore di*. La Def 1 esprime che « Se A, B sono grandezze, allora, dire che A è maggiore di B equivale a dire che A è la somma di B con una grandezza ». Segue immediatamente da ciò che la classe delle grandezze che sono maggiori della grandezza A è rappresentata da $A + G$; in simboli

$$A \varepsilon G . \supset . G \frown \overline{X \varepsilon} (X > A) = A + G$$

e per questa proposizione bisogna ammettere che per la classe G e l'operazione + sia verificata la Pp 0.

La Def 2 esprime che « Se A e B sono grandezze, allora, dire che A è minore di B equivale a dire che B è maggiore di A ».

Le proposizioni del formulario da 1 a 13 sono conseguenze delle precedenti definizioni e proposizioni primitive.

Possiamo osservare che, essendo le P da 2 a 13, *tutte* dipendenti dalla Pp4, la quale non ha significato quando la Pp0 non è vera, il definire i segni $>$ e $<$ prendendo come loro proprietà caratteristiche le P1, 2, 3, e la Def 2 è poco opportuno, dovendosi poi ammettere la Pp0 e quindi, con l'aggiunta di altre proposizioni primitive, ritornare alla Def 1 che in tal caso diviene un teorema.

9. Se G è la classe dei numeri interi non minori p. e. di 10, e l'operazione + è l'ordinaria somma, allora restando per i segni $>$ e $<$ il significato già stabilito nel n. precedente, il numero 73 non è nè eguale, nè maggiore, nè minore del numero 80, mentre è p. e. minore di 95 e maggiore di 20. Volendo escludere che per la classe G si verifichi questo fatto, dovremo ammettere che « essendo A e B degli individui di G, A sia o eguale, o maggiore, o minore di B ». In simboli

5. $A, B \varepsilon G . \supset . A = B \cup A > B \cup A < B$, Pp

oppure, non volendo far uso dei segni $>$ e $<$

$$A, B \varepsilon G . \supset . A = B \cup A \varepsilon B + G \cup B \varepsilon A + G .$$

Che questa nuova proposizione primitiva sia necessaria, è dimostrato dalla classe, ora considerata, dei numeri interi non minori di 10, essendo l'operazione $+$ l'ordinaria somma. Per questa classe le Pp che precedono la Pp5 sono vere e quindi

$$Pp1 . Pp1_1 . Pp2 . Pp2_1 . Pp3 . Pp4 . - Pp5 . -= \Lambda .$$

Anche se G è la classe dei numeri interi positivi (N) e l'operazione $+$ è il prodotto, la Pp5 non è vera, mentre sono vere tutte le Pp precedenti.

Osservazioni analoghe a quelle fatte nei numeri precedenti valgono per ciò che riguarda l'indipendenza delle Pp dei gruppi $1 . 1_1 . 2 . 2_1 . 4 . 5$; $1 . 2 . 3 . 4 . 5$; $1 . 2_1 . 3 . 4 . 5$; $1_1 . 2 . 3 . 4 . 5$; $1_1 . 2_1 . 3 . 4 . 5$.

Conseguenze immediate della Pp 5 sono le P 21-23, le quali si ottengono dalla Pp 5 con una semplice trasformazione logica. La P21, p. e., esprime che « Se A, B sono grandezze e A è non eguale a B, allora, A o è maggiore, o è minore di B ». Da questa proposizione si ottiene (formulario I§2P3, 4, 7)

$$A, B \varepsilon G . A -> B . A -< B . \supset . A = B ,$$

cioè « Se A, B sono grandezze e A è non maggiore e non minore di B, allora A è eguale a B ». Analoghe osservazioni valgono per le Pp22, 23.

10. Se G è la classe dei punti, $A + B$ indica il punto medio del segmento che ha A e B per estremi, e consideriamo anche i segmenti nulli, allora, essendo A e B due individui della classe G se A non coincide con B ($A -= B$), A è maggiore e, nello stesso tempo, è minore di B; come pure se A coincide con B si verificano, contemporaneamente, i tre casi $A = B$, $A > B$, $A < B$.

Ciò avviene perchè se A, B sono individui della classe G, possono verificarsi contemporaneamente i tre casi « A è la somma di A con una grandezza ($A \varepsilon A + G$) », « A è la somma di B con una grandezza ($A \varepsilon B + G$) », « B è la somma di A con una grandezza ($B \varepsilon A + G$) ». Vedremo tra poco che escluso possa verificarsi il primo caso ($A \varepsilon A + G$), i due rimanenti non possono verificarsi insieme quando per la classe G e l'operazione $+$ sieno vere le Pp1 . 4.

Ammetteremo dunque che per gli individui della classe G sia verificata la seguente proposizione primitiva, che è già stata dimostrata necessaria :

6. $A \varepsilon G . \supset . A - \varepsilon A + G$, Pp

cioè « Se A è una grandezza, allora A non è la somma di se stessa con una grandezza ». Tutte le classi G che contengono la grandezza *zero* (grandezze indifferente) non soddisfano alla Pp6.

Se G è la classe dei numeri reali, lo zero compreso, e l'operazione $+$ è l'ordinaria somma, allora si ha

$$\text{Pp1} . \text{Pp2} . \text{Pp3} . \text{Pp4} . \text{Pp5} . - \text{Pp6} . - = \Lambda \; .$$

Se G è la classe dei numeri reali, lo zero escluso, e l'operazione $+$ è l'ordinario prodotto, allora si ha

$$\text{Pp1} . \text{Pp2} . \text{Pp3} . \text{Pp4} . - \text{Pp5} . - \text{Pp6} . - = \Lambda \; .$$

Se G è la classe dei numeri interi non minori di 10 e l'operazione $+$ è l'ordinaria somma, allora si ha

$$\text{Pp1} . \text{Pp2} . \text{Pp3} . \text{Pp4} . \text{Pp6} . - \text{Pp5} . - = \Lambda$$

e quindi le Pp 5 e 6 sono indipendenti tra loro e non sono conseguenze delle 1, 2, 3, 4.

La P24 esprime che ammesso essere $A = B$, non può essere $A > B$ o $A < B$ quando per la classe G e l'operazione $+$ sia verificata la Pp6. Le proposizioni $A > B . \supset . A - < B$; $A < B . \supset . A - > B$ oltre che dalla Pp6 dipendono anche dalle Pp1.4 e quindi le P25.26 dipendono dalle Pp del gruppo 1.4.6, come le P28.29. Infatti per la classe considerata al principio di questo numero esclusi i segmenti nulli, la Pp6 è vera ma non è vera la Pp4 e si ha contemporaneamente $A > B$ e $A < B$.

Quando, come si fa ordinariamente, si dice « Se A, B sono grandezze, dei tre casi $A = B . A > B . A < B$, deve verificarsene uno ed uno solo », si riuniscono in una le Pp21-26, e si ammettono per gli individui di G e per l'operazione $+$, implicitamente, le due Pp5 e 6, insieme alle 1 e 4, le quali esprimono due cose ben distinte.

La P27, p. e., esprime che « Se A, B sono grandezze, allora, dire che A non è eguale a B, equivale a dire che A o è maggiore o è minore di B ». Si noti però che questa proposizione, della quale si fa spesso uso anche nel linguaggio comune, dipende dalle Pp5 e 6; quindi le frasi « non è eguale », o « è maggiore o è minore », sono equivalenti solo quando per la classe G che si considera sono vere le Pp5 e 6. Ammettendo la sola Pp5 dal dire « non è eguale » si deduce, « o è maggiore o è minore »; ammettendo la sola Pp6, dal dire, « o è maggiore o è minore », si deduce « non è eguale », ecc.

La P31 esprime che « Se la classe G contiene individui e per la classe G e l'operazione $+$ è vera la Pp6, allora, il numero degli individui di G è infinito ». Che tale proposizione sia conseguenza della Pp6 è evidente osservando che se G è costituita da individui tutti eguali fra loro, il numero degli individui di G è *uno*.

La P32 è conseguenza della P31 ed esprime che « è infinito il numero degli individui di G maggiori di uno qualunque dei suoi individui ».

11. La Pp2, e quindi anche la 2_1, è conseguenza delle Pp del gruppo 1 . 3 . 4 . 5 . 6. Infatti

$$A, B, C \varepsilon G . A + C = B + C . \supset . A = B \qquad [1 . 3 . 4 . 5 . 6]$$

$$[(\alpha)\ A, B \varepsilon G . A -= B . \S 3P21 : \supset : A > B \cup A < B$$

$$(\beta)\ A, B, C \varepsilon G . A > B . \S 3P3 : \supset : A + C > B + C$$

$$(\gamma)\quad » \quad A < B \quad » \quad : \supset : A + C < B + C$$

$$(\delta)\quad » \quad A -= B . (\alpha) \because (\beta) . (\gamma) : \supset : A + C > B + C \cup . A + C < B + C . \S 3P24 : \supset : A + C -= B + C$$

$$(\delta) : \supset \therefore A, B, C \varepsilon G . A -= B . \supset . A + C -= B + C : I\ \S 1\ P1 \therefore \supset \therefore P]$$

Che la Pp2 sia conseguenza necessaria della Pp6 si dimostra osservando che essendo G la classe dei razionali positivi, lo zero compreso, e l'operazione + l'ordinario prodotto, le Pp1.3.4.5 sono vere ed è falsa la Pp2. Pare che manchino degli esempi di classi per le quali essendo vere quattro delle Pp1.3.4.5.6, non sia vera la Pp2, e non possiamo quindi asserire che per dedurre la Pp2 sieno necessarie tutte le Pp1. 3 . 4 . 5 . 6.

Nel formulario cominciando dal §2 è stata soppressa la Pp2 quando nel gruppo delle Pp primitive dalle quali dipende una proposizione è compreso il gruppo 1.3.4.5.6.

La Pp2 può esser soppressa nella tesi delle P10 e 12 del §1.

Le P del §1 da 15 a 20, non sono state dimostrate vere in generale, quand'anche si sopprimesse la Pp2 e 2_1. Il lettore può quindi immaginarle soppresse.

Noi crediamo che le P da 15 a 20, soppressa che sia la Pp2 e 2_1 per certi gruppi, sieno vere in generale, ma però non abbiamo potuto trovare i più di 100 esempi di classi e operazioni + che occorrerebbero per dimostrarle.

L'aver conservato la Pp2 come formante parte del gruppo 1.2.3.4. 5.6.7.8, che dimostreremo in seguito essere il fondamentale, è giustificato dal fatto che molte P della teoria delle grandezze dipendono dalla Pp2 o 2_1, senza dipendere da tutte le Pp del gruppo 1.3.4.5.6.

§ 4. — *Differenza.*

A, B, $C \varepsilon G . \supset$:

1. $A - B = G \frown \overline{X \varepsilon} (A = B + X)$
2. $A - B + C = (A - B) + C$
3. $A + B - C = (A + B) - C$
4. $A - B - C = (A - B) - C$.

12. Il segno — leggeremo *meno*, ed essendo A e B grandezze, chiameremo A — B la *differenza* fra A e B.

Con la Def 1 si stabilisce di chiamare *differenza* fra le grandezze A e B, uno qualunque degli individui della classe di grandezze X tali, che A sia la somma di B con X. La differenza è così definita in generale senza stabilire, per ora, se, e sotto quali condizioni, la classe $G \frown \overline{X \varepsilon} (A = B + X)$ contiene individui e quanti.

La P1 dimostra che « Se per gli individui della classe G e per l'operazione + è vera la $Pp2_1$, oppure le Pp2 e 3, e la grandezza A è maggiore della grandezza B, allora la differenza fra A e B è una ed una sola grandezza, cioè (Def 1) esiste una sola grandezza X tale che $A = B + X$ ».

La P2 è l'inversa della P1 e questa dipende dalla sola Pp0.

Se in luogo della P3 si scrivesse la proposizione

$$A - B -\varepsilon G . \supset . A -> B$$

questa sarebbe l'inversa della contraria della P1 e quindi dipenderebbe dalla sola $Pp2_1$. La P3 dipende invece anche dalla Pp5 poichè in luogo di $A -> B$ si è sostituito $A \overline{\overline{<}} B$.

La P31 esprime che « Se A è una grandezza, allora la classe delle grandezze X, che sono minori di A, è costituita dalle grandezze che sono differenze fra A e una grandezza ». Questa proposizione è vera per le classi G e le operazioni +, per le quali sono vere le Pp2 e 3.

In ciò che segue, scrivendo p. e. $B \varepsilon G . A \varepsilon G \frown (B - G)$ intenderemo scrivere A, $B \varepsilon G . A < B$, e non terremo conto se l'equivalenza delle due proposizioni ora indicate porta, come necessaria conseguenza, che per la classe G e l'operazione + debbano esser vere le Pp2, 3. In altri termini, assumeremo come definizione formale, al solo scopo di abbreviare la scrittura, la proposizione

$$B \varepsilon G . A \varepsilon G \frown (B - G) . = : A, B \varepsilon G . A < B \qquad \text{(Def)}$$

Di tale definizione non faremo però mai uso negli enunciati dei teoremi, e l'adoperemo solo qualche volta nelle dimostrazioni quando ciò possa portare ad una notevole semplificazione di scrittura.

Nota II.

§ 5. — *Classe* NG.

1. $A \varepsilon G . \supset . 1A = A$
2. $A \varepsilon G . n \varepsilon N . \supset . (n + 1)A = nA + A$

13. La Def 2 dà, per induzione, il significato del segno nA, ove n è un numero intero e A è una grandezza. Ammesso (Def 1) essere 1A eguale ad A, il segno 2A, indica 1A + A, il segno 3A, indica 2A + A, ecc. ...

La P1 dimostra che se per la classe G e per l'operazione + è vera la Pp0, allora la classe NG è contenuta nella classe G (cioè ogni NG è un G). Dalla Def 1 si deduce che anche ogni G è un NG. Dunque (P1') le classi G ed NG sono eguali.

La P2 esprime che « La somma di un numero intero n, finito, di grandezze eguali alla grandezza A, è la grandezza nA ». È da notarsi che questa proposizione — allo scopo forse di evitare apparentemente l'uso del principio d'induzione — si suol prendere come definizione del segno nA.

Le P24, 25 esprimono che « Se A, B sono grandezze e A o è eguale o è maggiore di B, allora, la classe dei numeri m tali che mA è maggiore di B contiene individui; o, in altri termini, che vi sono grandezze, multiple di A e maggiori di B ». Se però la grandezza A è minore di B, allora per certe classi G e operazioni +, la classe delle multiple di A maggiori di B, può non contenere individui; il che si esprime ordinariamente dicendo che la grandezza A è *infinitesima* rispetto a B.

14. Essendo M un punto di un piano α, chiameremo *angolo*, di cui M è il vertice, una coppia di linee che passano per M e giacciono nel piano α (o ciò che si può ottenere astraendo dalla coppia, p. e., la parte di piano limitata dalle due linee). Le linee della coppia sono i *lati* dell'angolo individuato dalla coppia.

Diremo che due angoli sono *eguali* quando sono eguali gli archi di circonferenza dello stesso raggio, compresi fra i lati dei due angoli e aventi i centri nei vertici dei due angoli. Tale specie di eguaglianza appartiene alla classe definita al numero 1 della nota I.

Se A, B sono angoli, con A + B indicheremo uno degli angoli tali che gli archi di circonferenze dello stesso raggio compresi fra i lati

dell'angolo A + B, e aventi il centro nel vertice, sieno la somma (nel senso ordinario) degli archi compresi fra i lati degli angoli A e B.

Indichiamo con G_1 la classe costituita da tutti gli angoli che hanno per un lato una retta e per altro lato una curva essendo il vertice un punto tale che la retta non abbia contatto con la curva.

Indichiamo in generale, essendo n un numero intero maggiore di 1, con Gn, la classe costituita da tutti gli angoli che hanno per un lato una retta e per altro lato una curva, avendo la retta a comune con la curva nel vertice, n punti infinitamente vicini (contatto n—1-plo o di ordine n—1).

Se n è un numero maggiore di 1, allora ogni individuo A della classe Gn è infinitesimo rispetto a tutti gli individui delle classi G_{n-1}, ... G_1, cioè non esiste un numero finito m tale che mA sia maggiore di un dato individuo di G_{n-1} ... G_1.

È dunque necessaria la Pp seguente:

$$8_1 . \ A, B \varepsilon G . A < B . \supset : m \varepsilon N . mA \geqq B . - =_m \Lambda \qquad \text{Pp.}$$

cioè « Se A, B sono grandezze e A è minore di B, allora, la classe dei numeri m tali che mA è o eguale o maggiore di B, contiene individui ».

Questa Pp è nota sotto il nome di *Postulato di Archimede*.

15. Per la classe degli angoli — coppie di linee distinte — considerati nel numero precedente, e per l'operazione + come l'abbiamo definita, le Pp1-6 sono vere e la Pp8_1 non è vera. Dunque la Pp8_1 non è conseguenza delle precedenti. In simboli

$$\text{Pp1} . \text{Pp1}_1 . \text{Pp2} . \text{Pp2}_1 . \text{Pp3} . \text{Pp4} . \text{Pp5} . \text{Pp6} . - \text{Pp8}_1 . - = \Lambda .$$

Se G è la classe dei numeri interi, lo zero escluso, e l'operazione + è la moltiplicazione (in tal caso nA è la potenza n-esima del numero intero A) allora le Pp1-5 . 8_1 sono vere e non è vera la Pp6. Dunque

$$\text{Pp1} . \text{Pp2} . \text{Pp3} . \text{Pp4} . \text{Pp5} . \text{Pp8}_1 . - \text{Pp6} . - = \Lambda .$$

Se G è la classe dei numeri non maggiori, p. e. di 10, e l'operazione + è l'ordinaria somma, allora le Pp1.2.3.4.6.8_1 sono vere ed è falsa la Pp6. Dunque

$$\text{Pp1} . \text{Pp2} . \text{Pp3} . \text{Pp4} . \text{Pp6} . \text{Pp8}_1 . - \text{Pp5} . - = \Lambda .$$

16. La P31 non è che la Pp8_1 nella quale è soppressa l'ipotesi A < B; essa perciò dipende oltre che dalle Pp1 . 1_1 . 4 come le P23, 24, anche dalla Pp5.

La P32 esprime che « Se A, B sono grandezze e A è o eguale o maggiore di B, esistono due multipli consecutivi di B tra i quali A

è compresa ». Da questa proposizione potrebbe dedursi l'ordinaria operazione *divisione* — analoga a quella sui numeri interi. Abbiamo ritenuto inutile introdurre gli elementi *quoto* e *resto* e l'algoritmo relativo.

La P33 è, come vedremo, un'importante conseguenza del postulato di Archimede per la teoria della misura. Essa esprime che « Se A, B, U sono grandezze e A è minore di B, allora qualunque sia U, esiste una multipla di U compresa tra equimultiple di A e B ».

La P34 esprime che la classe G è eguale alla classe costituita dalle multiple della grandezza A, quando A sia il *minimo* di G, cioè quando non esistono grandezze minori di A.

Che questa P debba dipendere, insieme alle altre, dalle Pp6 . 8_1, si rende evidente considerando la classe dei numeri interi, lo zero compreso, quando l'operazione $+$ sia la somma, poichè per tale classe le Pp6 . 8_1 non sono vere e non è vera neanche la P34.

La P35 esprime che grandezze minori di una grandezza A sono contenute in G quando nella classe G vi sia almeno una grandezza non multipla di A.

17. Se G è la classe dei numeri interi, lo zero escluso, e l'operazione $+$ è la *somma*, allora la classe dei numeri interi che sono minori di 1 non contiene individui. È dunque necessaria la seguente proposizione primitiva:

7. $A \varepsilon G . \supset . G \frown (A - G) - = \Lambda$ Pp

Per la classe ora considerata le Pp1-6, 8_1 sono vere e non vera la Pp7. Dunque

$$Pp1.Pp2.Pp3.Pp4.Pp5.Pp6.Pp8_1. - Pp7 . - = \Lambda .$$

Se G è la classe degli angoli — coppie di linee — considerata al n. 14, si ha, p. e.,

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp7 . - Pp8_1 . - = \Lambda .$$

18. La P42 esprime che esistono grandezze comprese tra due grandezze non eguali. La P43 che esistono grandezze X minori di A tali che A — X sia minore di una grandezza qualunque.

Le P43′, 43″, 43‴ non differiscono dalla P43 che per l'ipotesi che stabilisce una determinata relazione tra le grandezze A e B, e perciò esse sono indipendenti dalla Pp5.

La P44 esprime che « Se n è un numero intero finito e A è una grandezza, si può trovare una successione di n grandezze tali che la loro somma sia o eguale o minore di A ». Conseguenza immediata di questa P è la P45.

§ 6. — *Classe* RG.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A, B \varepsilon G . m, n \varepsilon N . \supset : A = \frac{m}{n} B . = . nA = mB \\ 2.\ A \varepsilon G . m, n \varepsilon N . a \varepsilon R . D(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n} . \supset : aA = \frac{m}{n} A \end{array}\right\} \text{(Def.)}$$

19. La Def 1 significa « Se A, B sono grandezze e m, n sono numeri interi, allora, dire che A è eguale ad $\frac{m}{n}$ B equivale a dire che nA è eguale ad mB ».

Dalla teoria dei razionali è noto rappresentarsi col segno $\frac{m}{n}$ un ente che si chiama *razionale* e che si ottiene astraendo dalla coppia (m, n). Nella Def 1 non può però farsi astrazione dalla coppia (m, n) poichè mentre in $A = \frac{m}{n} B$ la coppia può considerarsi comparire come per forma, in $nA=mB$, segno equivalente ad $A = \frac{m}{n} B$, la coppia comparisce esplicitamente.

Con la Def 1 non resta quindi indicato il significato dell'espressione aA ove a è un razionale (astrazione della coppia) e A è una grandezza. È solo con la Def 2 che indichiamo il significato dell'espressione aA. Se a è un razionale, sappiamo dalla teoria dei razionali che esiste una sola coppia di numeri interi m, n tali che il loro massimo divisore sia 1 e che a sia eguale al razionale $\frac{m}{n}$. Sostituita così al razionale a una sola coppia di numeri interi, in luogo di una classe di coppie, stabiliamo che aA abbia lo stesso significato di $\frac{m}{n}$A. Nella P10, ad a è sostituita una delle infinite coppie ad essa eguali e la proprietà espressa dalla Def 2 in un caso particolare diviene vera in generale, quando però per la classe G sieno vere le Pp1 . 3 . 4 . 8_2 .

Non volendo introdurre la Def 2 bisogna in tutte le P del §6 sostituire al razionale, una coppia di numeri interi e quindi considerare sempre la classe R come classe di classi di coppie di numeri interi.

Tutto ciò si evita ordinariamente facendo uso del solito principio della *sostituzione,* ammesso nella pretesa definizione di eguaglianza.

20. Se n è un numero intero diverso da zero e finito, e A è una grandezza, dalla Def 1 si deduce che « dire che $\frac{1}{n}$A è una grandezza

equivale a dire che la classe G contiene un individuo B tale che il multiplo di B secondo n è eguale ad A ». Se G è la classe dei numeri interi lo zero escluso e l'operazione + è la somma, allora la seguente proposizione primitiva

$$8_2.\ \mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\,\supset\,.\,\frac{1}{n}\mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{G} \qquad \mathrm{Pp.}$$

non è vera. La Pp 8_2 è dunque necessaria.

La P2 dimostra che la Pp7 è conseguenza delle Pp1 . 1_1 . 4 . 8_2. In simboli

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp1_1}\,.\,\mathrm{Pp4}\,.\,\mathrm{Pp8_2}\,.\,\supset\,.\,\mathrm{Pp7}\,.$$

La Pp8_2 non è però conseguenza della Pp7 poichè se G è, p. e., la classe dei numeri interi positivi o negativi, la Pp7 è vera e non è vera la Pp8_2. In simboli

$$\mathrm{Pp7}\,.\,-\mathrm{Pp8_2}\,.\,-=\Lambda\,.$$

21. Se G è la classe dei numeri interi positivi lo zero escluso (N) allora le Pp1-6 . 8_1 sono vere e non è vera la Pp8_2. Dunque

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp3}\,.\,\mathrm{Pp4}\,.\,\mathrm{Pp5}\,.\,\mathrm{Pp6}\,.\,\mathrm{Pp8_1}\,.\,-\mathrm{Pp8_2}\,.\,-=\Lambda\,.$$

Se G è la classe degli angoli — coppie di linee — considerata al n° 14, allora le Pp1-6 . 8_2 sono vere ed è falsa la Pp8_1. Dunque

$$\mathrm{Pp1}\,.\,\mathrm{Pp2}\,.\,\mathrm{Pp3}\,.\,\mathrm{Pp4}\,.\,\mathrm{Pp5}\,.\,\mathrm{Pp6}\,.\,\mathrm{Pp8_2}\,.\,-\mathrm{Pp8_1}\,.\,-=\Lambda\,.$$

22. Le P1-10, 15 . 15', la P2 eccettuata, danno le proprietà fondamentali dei nuovi enti aA, ove a è un razionale coppia di numeri interi, e servono per dedurre le proprietà degli individui aA quando a è ciò che si ottiene astraendo dalla coppia di numeri interi.

Si può notare che le P3, 4 si prendono ordinariamente insieme alla P1 come definizione dei segni $\frac{1}{n}$A , $\frac{m}{n}$A. Facendo ciò si ammette implicitamente che per la classe G e l'operazione + sia vera la Pp8_2 insieme ad altre per le P1 e 3.

§ 7. — *Limiti superiori.*

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{KG}\,.\,\mathrm{X}\,\varepsilon\,\mathrm{G}\,.\,\supset:\mathrm{X}<\mathrm{l'A}\,.=.\,\mathrm{A}\frown(\mathrm{X}+\mathrm{G})-=\Lambda \\ 2.\ \mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{KG}.\mathrm{B}\,\varepsilon\,\mathrm{G}.\supset::\mathrm{l'A}=\mathrm{B}.=.\because.\mathrm{X}\,\varepsilon\,\mathrm{G}.\supset_{\mathrm{X}}:\mathrm{X}<\mathrm{l'A}.=.\mathrm{X}<\mathrm{B} \end{array}\right\}\ \text{(Def.)}$$

23. Il segno l' lo leggeremo *limite superiore.*

Def 1. Se A è una classe di grandezze e X è una grandezza, allora dire che X è minore del limite superiore della classe A, cioè minore

di un ente che otteniamo astraendo dalla classe A, equivale a dire che la classe A contiene individui maggiori di X.

Def 2. Se A è una classe di grandezze e B è una grandezza, allora dire che B è eguale al limite superiore della classe A, cioè dire che questo ente, l'A, che si ottiene astraendo dalla classe A, è un individuo della classe G, equivale a dire che, qualunque sia la grandezza X minore di l'A è X minore di B e viceversa.

Definizione analoga alla Def 2 si potrebbe dare per definire l'eguaglianza dei limiti superiori di due classi e in tal caso alcune delle P di questo § sarebbero indipendenti dal postulato della continuità. Non abbiamo creduto conveniente di far questo per evitare complicazioni inutili, essendo il postulato della continuità necessario, come ora vedremo.

Le P1-4 sono conseguenze immediate delle Def 1, 2 e dipendono dalle Pp del gruppo 1 . 4 . 5 .

24. La Pp, nota sotto il nome di *postulato della continuità,* la porremo sotto la forma seguente:

$$8.\ H \varepsilon KG . H -= \Lambda : A \varepsilon G . H \frown (A + G) = \Lambda : \supset .\therefore l'H \varepsilon G .$$

« Se H è una classe di grandezze contenente individui, e H non contiene individui maggiori di una certa grandezza A, allora il limite superiore della classe H è un individuo della classe G, cioè esiste un individuo B di G, tale che (Def 2) qualunque grandezza X minore di B è minore di l'H e viceversa ».

Che questa Pp sia necessaria si dimostra osservando che se G è la classe dei razionali, il limite superiore di una classe di razionali può non essere un razionale.

Se G è la classe dei razionali positivi, lo zero escluso, allora le Pp1-7 sono vere e la Pp8 non è vera. Dunque

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp7 . - Pp8 . -= \Lambda .$$

Se G è la classe dei numeri interi positivi, lo zero escluso, e poniamo per definizione, l'1 = 1, allora le Pp1-6.8 sono vere ed è falsa la Pp7. Dunque

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp8 . - Pp7 . -= \Lambda .$$

25. La P5, quando $A < B$, non è altro che il postulato d'Archimede ($Pp8_1$). Ciò dimostra che la $Pp8_1$ è conseguenza delle Pp del gruppo 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8 , cioè che la $Pp8_1$ è conseguenza, insieme ad altre Pp, del postulato della continuità. In simboli

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp8 . \supset . Pp8_1 .$$

La Pp8 non è però conseguenza della $Pp8_1$, come risulta considerando la classe dei razionali per la quale la $Pp8_1$ è vera ed è falsa la Pp8. In simboli

$$Pp8_1 . - Pp8 . - = \Lambda .$$

26. Le Pp6, 7 servono per dimostrare la P8. La P7 dipende dalla P45 del §5, dalla quale si deduce non esser nulla la classe delle multiple secondo n, non maggiori della grandezza A.

La P8 è identica alla $Pp8_2$ e quindi questa è conseguenza, insieme ad altre Pp, del postulato della continuità. Dalla P8 si deduce

$$Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp7 . Pp8 . \supset . Pp8_2 .$$

La Pp8 non è però conseguenza della $Pp8_2$, come risulta considerando la classe dei razionali per la quale la $Pp8_2$ è vera ed è falsa la Pp8. In simboli

$$Pp8_2 . - Pp8 . - = \Lambda .$$

27. Da quanto si è detto in questa nota risulta che dalle Pp del gruppo 1.2.3.4.5.6.7.8, possono dedursi tutte le Pp del gruppo $1_1.2_1.8_1.8_2$, mentre dalle Pp di questo gruppo pare non possano dedursi le Pp del primo gruppo, fatta tutt'al più eccezione per la Pp7. Ciò serve a spiegare per qual ragione per le Pp del gruppo $1_1.2_1.8_1.8_2$ si sono adoperati gli indici per i numeri che le indicano, non comprendendo la 2 che ha importanza speciale per quanto dipendente dalle Pp1.3.4.5.6.

Possono qui ripetersi le osservazioni fatte alla fine del n° 4 della nota I, per la sostituzione delle Pp7, 8 alle $Pp8_1$, 8_2 nella dipendenza delle varie P dalle Pp.

§ 8. — *Classe* QG.

1. $A \varepsilon G . a \varepsilon KR . l'a \varepsilon Q . \supset . (l'a)A = l'(aA)$
2. $A \varepsilon G . m \varepsilon Q . \supset : mA = \{ l'(R \cap \overline{x \varepsilon} (x \overline{\overline{<}} m)) \} A$

28. Def 1. Se A è una grandezza e a una classe di razionali che ha per limite superiore un numero reale e positivo diverso da zero e da infinito, allora il segno $(l'a)A$ equivale al segno $l'(aA)$ il cui significato è già noto. La proprietà espressa dalla Def 1 è già stata dimostrata vera (§7P14) quando il limite superiore della classe a è un razionale, nel qual caso il segno $(l'a)A$ ha un significato già noto.

La Def 1 stabilisce il significato dell'espressione mA ove m è un numero reale e A una grandezza, quando però per m si consideri anche una determinata classe a di razionali che ha m per limite supe-

riore. La Def1 non dà dunque ancora il significato dell'espressione mA quando al posto di m si metta il numero reale che si ottiene astraendo dalla classe a di razionali che lo ha per limite superiore. Essendo noto dalla teoria dei numeri reali che se m è un numero reale, esso è il limite superiore della classe dei razionali non maggiori di m, la Def2 dà in generale il significato del segno mA quando si consideri m astraendo dalle classi che lo hanno come limite superiore.

Ciò che è stato detto ora per i numeri reali corrisponde a quanto si è già detto per i razionali (questa nota n° 22).

Le formule del §8 non hanno bisogno di spiegazioni. Si può solo notare che le proprietà espresse da esse dipendono da tutte le Pp del gruppo generale **1.2.3.4.5.6.7.8**.

Nota III.

§ 9. — *La misura.*

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \mathrm{A, U} \varepsilon \mathrm{G} . \supset . \mathrm{A/U} = \mathrm{l'}\{\mathrm{R} \cap \overline{x\,\varepsilon}(n, nx\,\varepsilon\,\mathrm{N}.(nx)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} \mathrm{A} . - =_n \Lambda)\} \\ 2.\ \mathrm{A, U} \varepsilon \mathrm{G} . \supset . \overline{\mathrm{l'}}(\mathrm{A/U}) = \mathrm{R} \cap \overline{x\,\varepsilon}(n, nx\,\varepsilon\,\mathrm{N}.(nx)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} \mathrm{A} . - =_n \Lambda) \end{array}\right\} \text{(Def)}$$

29. Se A ed U sono grandezze, il segno A/U lo leggeremo *misura di* A *mediante* U, o *rapporto di* A *ad* U, o A *diviso* U.

Con la Def 1 stabiliamo di eguagliare l'ente A/U al limite superiore di quella classe di razionali x tali, che essendo n ed nx numeri interi, la multipla di U secondo nx sia non maggiore di A.

Nella Def 2 consideriamo il segno l′ come segno di funzione invertibile, che applicato ad una determinata classe di razionali, produce A/U. Quindi il segno $\overline{\mathrm{l'}}$(A/U) — ove $\overline{\mathrm{l'}}$ indica, secondo le ordinarie notazioni, la funzione inversa di quella già indicata con l′ — indica la classe dei razionali il cui limite superiore è eguale all'ente A/U. Questa Def non è necessaria. Noi l'abbiamo introdotta solo per brevità di scrittura.

30. La P1 dimostra che quando per la classe G e l'operazione + sono vere le Pp1.3.4.5.8_1, allora la classe $\overline{\mathrm{l'}}$(A/U) contiene individui, qualunque sieno le grandezze A ed U. La P2 dimostra che se per la classe G è vera, oltre alle precedenti, anche la Pp6, allora l'ente indicato con A/U è un numero reale positivo e diverso da zero e da infinito.

La P3 dimostra che la classe $\overline{\mathrm{l'}}$(A/U) è la classe di quei razionali x tali che gli individui della classe xU sono non maggiori della gran-

dezza A. La P è dimostrata indipendentemente dall'esistenza o no degli individui delle classi $\overline{l'}(A/U)$ e $R \frown \overline{x\,\varepsilon}\,(xU \stackrel{=}{<} A)$, e quindi essa non dipende dalla $Pp8_1$ (postulato d'Archimede). Non abbiamo presa la classe $R \frown \overline{x\,\varepsilon}\,(xU \stackrel{=}{<} A)$ per definire l'ente A/U, poichè si sarebbe inutilmente ammesso dovere per la classe G esser vera la $Pp8_2$, che stabilisce la esistenza di summultipli di ogni individuo di G.

31. Le P5-14 danno le proprietà fondamentali della misura ed è a notarsi che esse dipendono dalle Pp del gruppo $1.3.4.5.6.7.8_1$; sono cioè indipendenti dal postulato della continuità in generale, e in particolare dall'esistenza della summultipla di un indice qualunque di una grandezza.

Le P15-21 danno pure proprietà fondamentali della misura. Anche qui le $Pp8_2$ e 8 entrano solo quando a è un razionale o è un numero reale qualunque. È da notarsi che nella P18 non ci siamo valsi della P1 che stabilisce in generale l'esistenza della classe $\overline{l'}(A/U)$, e dimostrata l'esistenza della classe nel caso speciale considerato la P18 è risultata indipendente dal postulato d'Archimede.

La P19 che indica essere *uno* la misura di una grandezza mediante se stessa sarebbe pure indipendente dal postulato d'Archimede se per l'eguaglianza si ammettesse il principio ordinario della sostituzione.

Le P22-24 si prendono ordinariamente per definire la misura.

Le P31-36 potrebbero facilmente dedursi dalla P37 e dalle P15.16.17.

32. La P37 che enuncia la proprietà della misura che permette di passare da un'unità di misura ad un'altra, è da notarsi che è indipendente dal postulato della continuità e dall'esistenza delle summultiple.

Quando per le grandezze A, B, C, U è vera la proprietà indicata dalla P39, si dice qualche volta che « A *è il prodotto* delle grandezze B e C » e si dovrebbe aggiungere « essendo U il modulo di tale operazione », perchè la grandezza A — prodotto delle grandezze B e C — varia col variare di U. Volendo, come si fa, indicare il prodotto col segno $\times$ come per i numeri, si avrà per definizione

$$A, B, C, U \,\varepsilon\, G \,.\, \supset : A = (B \times C) \bmod U \,.\, = .\, A/C = B/U \,.$$

Teoricamente l'inutilità dell'introduzione di questa operazione modulare sulle grandezze, introdotta che sia la misura o anche solo il rapporto tra due grandezze indipendentemente — se è possibile — dal concetto di numero, risulta evidente dalla definizione ora indicata.

Le P41-46 enunciano le principali proprietà delle ordinarie *proporzioni*, l'introduzione delle quali con le parole *sta, come,* si riduce,

introdotta che sia la misura, ad esprimere sotto nuova forma proprietà note dei numeri reali.

Ordinariamente si dice che la grandezza A è *commensurabile* con la grandezza U, quando la misura di A mediante U è un numero razionale. La P47 dimostra che se gli individui di una classe di grandezze sono commensurabili con un individuo della classe, essi sono commensurabili con tutti gli altri.

33. Al concetto di misura è collegata l'importante questione della corrispondenza (modulare) tra le classi G e Q, cioè tra una classe di grandezze e la classe dei numeri reali.

Scelto, come modulo, nella classe G un individuo U, possiamo far corrispondere ad un individuo A di G, la classe di razionali che abbiamo indicata col segno $\overline{\Gamma}(A/U)$. La P1 dimostra che tale corrispondenza ha luogo quando per la classe G e per l'operazione + sono vere le Pp1.3.4.5.8_1.

Se, essendo ancora U il modulo, alla grandezza A facciamo invece corrispondere l'ente A/U, allora si è stabilita una corrispondenza tra le classi G e Q. Osserviamo che per la corrispondenza così definita si ha che

1° Ad ogni individuo di G corrisponde uno ed un solo individuo della classe Q, e ad individui eguali o non eguali di G corrispondono individui eguali o non eguali di Q, se (P2.5.7) per la classe G e l'operazione + sono vere le Pp1.3.4.5.6.8_1. La corrispondenza è quindi *univoca.*

2° Ad ogni individuo di G corrisponde un solo individuo di Q e a questo quello di G a cui corrispondeva, cioè la corrispondenza è univoca e reciproca (simile) se (P2.4) per gli individui di G e per l'operazione + sono vere le Pp1.3.4.5.6.7.8.

§ 10. — *La proporzionalità.*

34. Se V, V' sono classi di grandezze, i segni pd.VV', pi.VV', p.VV' li leggeremo rispettivamente *proporzionalità diretta tra* V *e* V', *proporzionalità inversa tra* V *e* V', *proporzionalità tra* V *e* V'.

Il concetto di proporzionalità è intuitivo. Esso comparisce sotto varie forme, talvolta non completamente precisate, anche nel linguaggio comune. Tale concetto non è però indipendente da quello di corrispondenza, e in particolare da quello di corrispondenza *simile* (univoca e reciproca).

Il concetto ordinario di *proporzionalità diretta,* è espresso, dipendentemente dal concetto di *corrispondenza* e di *misura,* dalla P1.

« Se V, V′ sono classi di grandezze, diremo che ω è una proporzionalità diretta tra V e V′, quando ω è una corrispondenza simile tra V e V′, e il rapporto tra due individui qualunque di V è eguale al rapporto degli individui di V′ corrispondenti ». Dicendo che ω è una corrispondenza simile tra V e V′ sappiamo già che si intende essere ω un segno che posto innanzi ad un individuo di V produce un V′, che a due individui eguali di V fa corrispondere due individui pure eguali di V′ e che a due individui non eguali di V fa corrispondere due individui non eguali di V′. In tal modo ogni individuo di V′ viene ad esser funzione (determinata, ω) dell'individuo di V al quale corrisponde.

La Def contenuta nella P2 ha analogo significato.

Con la Def data nella P13 conveniamo di chiamare *proporzionalità* tra V e V′, o una proporzionalità diretta o una proporzionalità inversa tra V e V′.

35. Conviene notare che nella definizione da noi data per la proporzionalità, non è contenuta alcuna ipotesi riguardo alle proprietà che devono esser verificate per gli individui delle classi V e V′, all'infuori di quella della possibilità di poter considerare il rapporto di due individui di V e di V′ come ente appartenente ad una classe per i cui individui il segno = abbia significato. Dipendentemente dalle convenzioni precedentemente fatte per il segno A/B, la Def di proporzionalità da noi data ammette implicitamente che la classe G in cui è contenuta la classe V si possa far corrispondere univocamente alla classe dei numeri reali, cioè che per la classe G sieno vere le Pp1.3.4.5.6.8_1 (§9P2).

Se ω è una proporzionalità tra le classi V e V′, dovendo, per definizione, essere ω una corrispondenza simile tra V e V′, è già noto che se V contiene un numero finito n di individui, anche V′ deve contenere n individui, e se V contiene un numero infinito di individui anche V′ contiene infiniti individui, ma però i numeri degli individui di V e V′ sono, secondo il Cantor, di egual potenza. Con le Def contenute nelle P1, 2 non abbiamo dunque posta alcuna limitazione riguardo al numero degli individui distinti che compariscono nelle classi V e V′.

Dipendentemente dal significato del segno A/B (§9Def1) per la classe G, nella quale è contenuta la classe V deve esser vera la Pp0, cioè, come si dice nel linguaggio comune, le grandezze che compariscono in V devono essere omogenee. Non è però necessario che queste sieno omogenee con quelle che compariscono in V′ purchè quelle di V′ sieno omogenee tra loro. Definendo p. e. la *velocità* nel moto uniforme come lo spazio percorso in un'unità di tempo, viene come conseguenza che lo spazio è proporzionale direttamente al tempo impiegato a per-

correrlo, ma, dipendentemente dalle convenzioni fatte, non ha senso dire che *la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo,* mentre ciò avrebbe senso quando alle grandezze ora indicate si sostituissero i numeri che le misurano mediante unità convenienti. Questa locuzione, e molte altre che si usano comunemente, sottintendono però sempre l'operazione modulare *prodotto* per due grandezze.

36. Le P3 e 4 dipendono dalla definizione di corrispondenza simile (Formul. I§5) e sono quindi indipendenti dalle Pp per la classe G.

È noto che se ω è una corrispondenza simile tra V e V', l'inversa di ω ($\overline{\omega}$) è una corrispondenza simile tra V' e V. Le P5 e 6 esprimono che « Se ω è una proporzionalità tra V e V' allora $\overline{\omega}$ è una proporzionalità tra V' e V ». Queste proposizioni dipendono dalle Pp1.3.4.5.6.8_1 che sono quelle che devono essere verificate per la classe G affinchè possa tra le classi G e Q stabilirsi una corrispondenza tale che ad individui eguali di G corrispondano individui pure eguali di Q.

Le P7, 8 dipendono invece dalle Pp che devono essere verificate per G affinchè tra G e Q possa stabilirsi una corrispondenza univoca.

Le rimanenti P, fino alla 23 inclusa, esprimono le ordinarie proprietà della proporzionalità e non hanno bisogno di spiegazioni. Noteremo solo che, eccettuate le P9'', 10'', tutte le altre sono indipendenti dal postulato della continuità, il quale comparisce solo per le P9'', 10'', perchè si ha da considerare l'ente aA ove a è un numero reale qualunque e A una grandezza. Analoga osservazione vale per la Pp8_2.

37. Le P24-29 dimostrano come essendo ω una corrispondenza simile tra le classi V e V', tale corrispondenza possa essere una proporzionalità, attribuendo alla funzione ω alcune delle proprietà dimostrate per la proporzionalità.

Le P24-29 danno in sostanza altri modi di definire una proporzionalità tra le classi V e V', modi che noi esamineremo poichè essi sono spesso adoperati e presentano inconvenienti notevoli.

38. « Se ω è una corrispondenza simile tra le classi V e V', e qualunque sieno gli individui X e Y di V si ha che X+Y è un individuo di V e il corrispondente di X+Y è la somma dei corrispondenti di X e Y (P24), allora avremo che ω è una proporzionalità diretta tra V e V' (P24_{10}) ». Questa proposizione dipende dalle Pp1.3.4.5.6.7.8 e quindi in particolare dal postulato della continuità.

Possiamo dunque assumere per la proporzionalità diretta tra le classi V e V' la definizione seguente:

$$(\alpha)\ V, V' \varepsilon KG : X, Y \varepsilon V . \supset_{X, Y} . X + Y \varepsilon V : \supset :: \omega \varepsilon (pd . VV') . = .\therefore \omega \varepsilon (V'/V) \, sim : A, B \varepsilon V . \supset_{A, B} . \omega(A+B) = \omega A + \omega B .$$

e in tal caso la proprietà ($P24_9$)

$$A, B \varepsilon V . \supset . A/B = (\omega A)/(\omega B)$$

dipende dal postulato della continuità (Pp8).

Il teorema di Talete, limitandolo come si fa ordinariamente al caso del triangolo e chiamando *lati* del triangolo i segmenti che hanno i vertici per estremi, non può enunciarsi sotto la forma « Le rette parallele ad un lato di un triangolo dividono gli altri due lati in classi di segmenti proporzionali » perchè se X e Y sono due segmenti di un lato, può X+Y essere un segmento maggiore del lato. Lo stesso teorema enunciato sotto la forma « Le rette parallele ad un lato di un triangolo dividono gli altri due lati in due classi di segmenti tali che il rapporto di due segmenti di una classe è eguale al rapporto dei segmenti corrispondenti dell'altra classe » è vero purchè per la classe dei segmenti si ammetta esser verificato il postulato della continuità.

Assumendo dunque la (α) come definizione della proporzionalità diretta, si viene ad ammettere necessariamente il postulato della continuità quando si voglia introdurre l'eguaglianza dei rapporti delle coppie di grandezze corrispondenti. Di più essendo necessaria la condizione che la somma di due individui di V sia un individuo di V, la classe V contiene infiniti individui (§3P31) quando per gli individui di G sia vera la Pp6, e viene quindi come conseguenza che la proporzionalità tra due classi non resta definita in generale, dovendosi escludere le classi contenenti un numero finito di individui.

39. Dalla P26 si deduce che per certe classi si può assumere come definizione della proporzionalità diretta la seguente:

$$(\beta)\ V, V' \varepsilon KG : n \varepsilon N . X \varepsilon V . \supset_{n, X} . nX \varepsilon V . V/X \varepsilon KR . \supset :: \omega \varepsilon (pd . VV') . = .\therefore \omega \varepsilon (V'/V) \, sim : m \varepsilon N . A \varepsilon V . \supset_{m, A} . \omega(mA) = m(\omega A) .$$

Questa è la definizione che ordinariamente si assume per la proporzionalità diretta nei trattati elementari, sopprimendo però le condizioni $mX \varepsilon V . V/X \varepsilon KR$, ed aggiungendo come proprietà caratteristica di ω la condizione $\omega\left(\frac{1}{m}A\right) = \frac{1}{m}(\omega A)$, condizione che è conseguenza ($P26_3$) di quella da noi posta in (β).

La condizione $mX \varepsilon V$ è necessaria, affinchè abbia un significato il segno $\omega(mX)$ in tutti i casi. Che anche la condizione $V/X \varepsilon KR$ sia necessaria si dimostra osservando che se V è la classe dei numeri reali e V' è la classe costituita dai numeri p. e. doppi dei razionali di V e

tripli degli irrazionali di V, allora si ha in ogni caso, per m intero, $\omega(mA) = m(\omega A)$ eppure le classi V e V′ non sono proporzionali.

Anche la (β) presa come definizione della proporzionalità diretta presenta l'inconveniente che V non può contenere un numero finito di individui se si ammette la Pp6, e di più essa vale per classi commensurabili con tutti i loro individui. Sostituendo in (β) alla condizione $V/X \varepsilon KR$, la condizione « ω è una funzione continua » si ottiene (P28) una nuova definizione di proporzionalità diretta, più generale della precedente (β) ma per la quale occorre si ammetta anche per gli individui di G il postulato della continuità.

È facile verificare che alla condizione ora indicata si può sostituire anche la seguente: $A, B \varepsilon V . A > B . \supset . \omega A > \omega B$.

Torino, Marzo 1893. BURALI FORTI CESARE.

Sul concetto di condizione a cui devono soddisfare gli elementi di una figura nella Geometria elementare.

Non mi pare inopportuno il fissare bene, nella geometria elementare, il concetto di condizioni a cui devono soddisfare gli elementi delle figure, quando specialmente queste non solo devono essere determinate in grandezza, ma anche in posizione. È utile che lo studente, fin dal suo inizio nella Geometria, si famigliarizzi con tale concetto, che poi gli si ripresenterà più generale e completo ne' suoi studi universitarii, e che sappia con sicurezza, in problemi piuttosto complessi, decidere subito se tali problemi sieno determinati oppure no. Ritengo perciò che tale concetto sistematicamente debba introdursi ne' trattati di Geometria per le scuole secondarie superiori, e sia svolto nella *Rivista*, che ha scopo essenzialmente didattico. Non pretendo poi di avere esaurito l'argomento, il quale, a mio giudizio, merita l'attenzione di coloro che si occupano di perfezionare i metodi d'insegnamento.

Mi occupo solo della geometria piana.

1. Gli *elementi* delle figure poligonali sono i lati e gli angoli. Questi elementi non sono fra loro indipendenti, ma la conoscenza di alcuni fra essi trae seco la conoscenza dei rimanenti.

Se d'una figura conoscendo alcuni elementi, una o un numero limitato di figure esistono che hanno quegli elementi, la figura si dice

determinata; se invece esistono infinite figure con quegli elementi, la figura si dice *indeterminata.* Se d'un triangolo si conoscono i lati, il triangolo è determinato in modo unico; se si conoscono due lati e un angolo opposto, il triangolo è determinato, e si hanno, in generale, due triangoli che soddisfano alla quistione; se si conoscono i tre angoli, il triangolo è indeterminato.

2. In questi casi, e in tutti i casi analoghi che si possono presentare, la figura, quando è determinata, è solo determinata in *grandezza*, potendo avere nel piano infinite posizioni. Così il triangolo costruito con i tre lati dati, può farsi muovere nel piano comunque si voglia, e sarà sempre lo stesso triangolo.

Se però la figura si deve determinare non solo in grandezza, ma anche in posizione, allora bisogna fissare non solo i lati, ma le rette dei lati, non solo gli angoli, ma i vertici degli angoli.

3. Per dire che una retta deve passare per un punto, o che un punto deve stare in una retta, si dice che la retta o il punto soddisfa ad *una condizione.* Un punto o una retta, quando sieno assoggettati a due condizioni, sono perfettamente determinati.

4. Un poligono di n lati è determinato in grandezza e posizione da $2n$ condizioni. Infatti, basta fissare i suoi vertici, e l'assegnare un vertice equivale a due condizioni.

5. Un poligono è determinato in grandezza da $2n—3$ condizioni. Infatti, suppongo descritto il poligono. In seguito faccio cadere un suo vertice in un dato punto del piano (due condizioni). La figura attorno a quel vertice può acquistare infinite posizioni. Si potrà fare in modo che un altro suo vertice cada in una data retta del piano (una condizione), e allora la figura resta determinata anche in posizione, potendo avere due situazioni simmetriche rispetto alla retta dei due vertici considerati. Si può portare la retta di un lato sopra una data retta del piano (due condizioni). La figura in tal caso può acquistare infinite posizioni, e si può fare che un altro suo lato passi per un punto dato. Si conclude che un poligono di n lati è determinato in grandezza da $2n—3$ condizioni.

6. Per un poligono l'avere un lato eguale a un dato segmento equivale ad una condizione. Infatti; posso far cadere un termine del dato segmento in un dato punto del piano, e l'altro termine in una data retta. Dopo ciò, due vertici della figura sono fissati, e ne riman-

gono a determinare altri $n—2$. In questo caso adunque la figura è determinata in grandezza e posizione da $2n—4+3=2n—1$ condizioni, e quindi l'assegnazione d'un lato della detta figura equivale ad una condizione, come dovevasi dimostrare. Si dimostra similmente che per un poligono l'assegnare un angolo equivale pure ad una condizione.

7. Se un punto deve stare in una data circonferenza di circolo, ciò equivarrà ad una condizione. Ed in vero, si fissi, oltre la circonferenza, una retta nella quale il punto deve stare; il punto allora rimane perfettamente determinato, e vi sono, in generale, due punti che soddisfano alla quistione. Ma per il punto lo stare nella retta data equivale ad una condizione, e il punto è determinato da due condizioni, dunque lo stare nella circonferenza equivarrà ad una condizione. Si dimostra similmente che per una retta l'essere tangente ad una data circonferenza equivale pure ad una condizione. E siccome una circonferenza è determinata da tre dei suoi punti o da tre delle sue tangenti, se ne conclude che una circonferenza in grandezza e posizione è determinata da tre condizioni. Inoltre, siccome una circonferenza è determinata in grandezza e posizione dal suo centro e dal suo raggio, e l'assegnare il centro equivale a due condizioni, l'assegnare il raggio equivarrà ad una condizione. Si dimostra pure che per una circonferenza il doverne toccare un'altra equivale ad una condizione.

8. Si dice che fra i lati, o alcuni dei lati; ovvero fra gli angoli, o alcuni degli angoli, di un poligono esiste una *relazione d'eguaglianza* quando un lato è determinato in grandezza dai rimanenti lati, o da alcuni di essi, o un angolo è determinato dai rimanenti angoli, o da alcuni di essi.

Ogni relazione d'eguaglianza fra gli elementi omogenei d'un poligono equivale ad una condizione. Infatti, quella relazione dà un lato o un angolo, tostochè altri lati o altri angoli sieno noti, e per un poligono l'assegnare un lato o un angolo equivale ad una condizione. Così un quadrangolo iscrittibile è determinato in grandezza da 4 condizioni, anzichè da 5, perchè fra due de' suoi angoli opposti esiste una relazione d'eguaglianza, che ne determina uno tostochè l'altro sia noto.

9. Un poligono iscrittibile di n lati è determinato in grandezza da n condizioni. Infatti, è necessario e sufficiente che tre vertici del poligono e ciascun dei rimanenti determinino un quadrangolo iscrittibile, e ciò equivarrà ad $n—3$ condizioni, che sottratte dalle $2n—3$ condizioni, che determinano in grandezza il poligono, rimangono ap-

punto n condizioni. Segue che un poligono iscrittibile di n lati è determinato in grandezza e posizione da $n+3$ condizioni.

Il numero delle condizioni che si richiedono perchè un poligono di n lati sia iscrittibile in un dato cerchio è n. Ed infatti, perchè un punto cada in una data circonferenza si richiede una condizione, e perchè vi cadano tutti i vertici del poligono se ne richiederanno perciò n.

10. Si dimostra in modo analogo che un poligono circoscrittibile è determinato in grandezza da n condizioni, in grandezza e posizione da $n+3$ condizioni, e da n condizioni è determinato se deve essere circoscritto a un dato cerchio.

11. Si chiama *punto notevole* d'una figura un punto tale, che quando esso sia assegnato, vale lo stesso che assegnare *due* condizioni a cui la figura deve soddisfare. Il centro d'un circolo ne è un punto notevole. Il punto delle mediane d'un triangolo è un punto notevole del triangolo. Infatti, dato il punto delle mediane e due vertici, il triangolo è determinato in grandezza e posizione, e si costruisce subito. Sono punti notevoli del triangolo l'ortocentro, l'incentro, gli excentri, il punto di Lemoine, ecc. Tre punti notevoli del triangolo lo determinano in grandezza e posizione.

12. Un poligono simile a un altro dato poligono è determinato in grandezza da *una* condizione, e quindi in grandezza e posizione da *quattro* condizioni.

13. Per una retta l'essere parallela o perpendicolare a un'altra, o il dover fare con quest'altra un dato angolo, equivale ad una condizione. Per una retta l'essere normale ad una data circonferenza, o il dover fare con questa un dato angolo, equivale pure ad una condizione. E ad una condizione pure equivale per una circonferenza il doverne tagliare un'altra normalmente o sotto un dato angolo, ecc. ecc.

14. È da notare infine che le condizioni che determinano una figura possono essere contraddittorie, o alcune di esse rientrare nelle altre. Nel primo caso la figura che si cerca non esiste, nel secondo il problema è indeterminato. Così se d'un triangolo si assegnano in modo affatto arbitrario l'ortocentro H, il baricentro G e il circocentro O, il triangolo non si può costruire, perchè questi tre punti devono essere in linea retta, e deve essere $OH=3OG$. Se poi queste condizioni sono verificate, esistono infiniti triangoli che soddisfano alla quistione.

Catania, aprile 1893. S. Catania.

Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche

di Gino Loria.

Nel presentare al R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti il V vol. (nuova serie) della *Bibliotheca Mathematica* diretta da G. Eneström, il prof. Favaro notava, a proposito dell'*Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche* ivi contenuto (1), che io avrei forse potuto fare a quel lavoro delle nuove aggiunte « pescando nelle famose *Riviste di giornali* del Bellavitis (2) ». Sembrommi quindi doveroso di seguire il consiglio implicitamente contenuto in questa osservazione; ed ora mi gode l'animo nell'asserire che, avendo percorsa attentamente la completa e variopinta collezione delle prelodate *Riviste,* trovai in un solo punto fatto un cenno rapidissimo del teorema su cui erigesi la teoria delle equazioni algebriche. Alludo a quel quel passo della *Settima rivista* (3) ove il celebre inventore del metodo delle equipollenze discorre della dimostrazione del Foscolo (4) (n. XXXV), per segnalare i punti di contatto che essa manifesta con una esposta assai prima dal Bellavitis stesso nel § 15 del *Saggio sull'algebra degli immaginarii* (5).

Forse non mi sarei deciso a far noto questo piccolo risultato di quella modesta ricerca bibliografica, ove non avessi così rinvenuta l'occasione desiderata per dare notizia di alcune importanti investigazioni (6) che vennero ad accrescere in modo notevole la letteratura dell'argomento in questione.

---

(1) p. 99-112. È un riassunto dell'articolo *Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche* inserito in questa *Rivista* (T. I, p. 185-248; v. anche T. II, p. 37-38).

(2) A. Favaro. *Sulla* Bibliotheca mathematica *di Gustavo Eneström* (Atti del R. Istituto Veneto, serie VII, vol. 3°, p. 643).

(3) Atti dell'I. R. Istituto Veneto, serie III, vol. 10°, 1864-65, p. 136-7).

(4) I numeri romani servono di richiami all'*Elenco* con cui si chiude il mio articolo precitato.

(5) Memorie dell'I. R. Istituto Veneto, T. IV, 1852, p. 263.

(6) Escludo quelle di E. Amigues e P. Mansion di cui fa cenno il T. XXII (p. 107) del *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik.*

Fra esse meritano il posto d'onore quelle di Weierstrass ([2]), le quali in sostanza arrivano a trasformare in argomentazione rigorosa e concludente un pseudo-ragionamento antichissimo, il cui punto debole non era sfuggito a Gauss. Infatti il grande analista di Berlino si propone di dimostrare che, posto

$$(x-x_1)(x-x_2)\,\dots\,(x-x_n) = x^n + \sum_\nu (x_1\,\dots\,x_n)_\nu x^{n-\nu},$$

ove ν qui ed in seguito assume successivamente tutti i valori interi da 1 a n, e supposte date n costanti arbitrarie $C_1, C_2 \dots C_n$, esistono sempre n altre qualità $x_1, x_2 \dots x_n$ soddisfacenti le n equazioni seguenti

$$\text{(S)} \quad (x_1\,\dots\,x_n)_\nu = C_\nu\,,$$

tali cioè che, posto

$$f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \dots + C_n\,,$$

risulti identicamente

$$f(x) = \prod_\nu (x-x_\nu)\,.$$

A tale scopo egli insegna un algoritmo con cui, date le C, si possono determinare le quantità $x_1 \dots x_n$ soddisfacenti al sistema (S), senza, ben inteso, presupporre nota prima l'esistenza di tali quantità. In questo metodo di calcolo si ammette essere differente da 0 il discriminante di $f(x)$ e noto un sistema di n quantità $a_1 \dots a_n$ soddisfacenti le condizioni

$$\text{(C)} \quad |\, C_\nu - (a_1\,\dots\,a_n)_\nu \,| < d_0\,,$$

ove d_0 è un numero positivo soggetto a certe limitazioni che per brevità qui si tacciono; da esso sistema se ne deducono successivamente altri a'_ν, a''_ν, ... mediante le equazioni

$$a'_\nu = a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\prod_\mu (a_\nu - a_\mu)}\,, \quad a''_\nu = a'_\nu - \frac{f(a'_\nu)}{\prod_\mu (a'_\nu - a'_\mu)}\,, \;\dots \quad \text{ove } \mu \gtrless \nu\,.$$

Le quantità $a_\nu^{(\lambda)}$ così definite ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$) sono tutte finite. Se si pone $A_\nu^{(\lambda)} = \left(a_1^{(\lambda)} \dots a_n^{(\lambda)}\right)_\nu$ e si chiama $\varepsilon^{(\lambda)} d_0$, per un certo valore

([2]) Furono annunziate all'Accademia di Berlino nel 1859 (v. *Monatsberichte*, p. 758) e di nuovo nel 1868 (v. *Monatsberichte*, p. 428), vennero poi ad essa presentate il 21 febbraio 1889 e inserte nel resoconto della seduta del 17 dicembre 1891, sotto il titolo *Neuer Beweis des Satzes dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Productaus linearen Functionen derselben Veränderlichen.*

di λ, e la massima fra le quantità $\left| C_\nu - \overset{(\lambda)}{\underset{\nu}{}} \right|$ si avrà $\varepsilon^{(\lambda)} < (\varepsilon)^{2^\lambda}$. Finalmente se si designa con $\varphi_\lambda(x)$ il prodotto $\Pi\left(x - a_\nu^{(\lambda)}\right)$ e con $\psi_\lambda(x)$ la differenza $f(x) - \varphi_\lambda(x)$, le n quantità

$$(*) \quad x_\nu = a_\nu - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{f\left(a_\nu^{(\lambda)}\right)}{\varphi'_\lambda\left(a_\nu^{(\lambda)}\right)},$$

queste soddisferanno il sistema (S). Tutto dunque è ora ridotto ad assodare l'esistenza delle quantità $a_1 \ldots a_n$ soddisfacenti le relazioni (C): ciò vien fatto dal Weierstrass nel terzo § della sua memoria, servendosi di due proposizioni che, a mo' di lemmi, egli premise nel secondo. Per una prossima scrittura egli riserba l'esposizione di complementi ed osservazioni al suo notevolissimo ragionamento (a dimostrarne l'importanza è sufficiente segnalare le formole (*), le quali dànno esplicitamente tutte le varie radici dell'equazione proposta), dopo averne con una semplice osservazione estesa la portata fino ad includere il caso in cui il discriminante di $f(x)$ sia nullo.

Le altre indagini su cui credo opportuno di fissare l'attenzione degli algebristi sono dovute al Mertens [1] e rappresentano uno svolgimento ulteriore di quei concetti che governano le anteriori pubblicazioni del medesimo autore sullo stesso tema (n. LXVII). Come le antiche, le nuove indagini sono di quelle che è impossibile riassumere; ci limitiamo pertanto alla seguente notizia. Quando un'equazione algebrica ad un'incognita $f(z) = 0$ non possiede alcuna radice (reale o complessa) razionale, in generale ad essa non si può soddisfare che adoperando un procedimento di approssimazione continua illimitata; laonde dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra non può significare altro che scoprire un modo per determinare successivamente dei valori razionali di $z = x + iy$ che rendano $|f(z)|$, funzione continua e sempre positiva delle variabili reali x e y, minore di qualsiasi numero positivo dato; e (supposto ancora che $f(z)$ e $f'(z)$ siano funzioni fra loro prime) a tale scopo è sufficiente sapere determinare, mediante un numero finito di tentativi, un valore a partire dal quale la notissima regola di Newton rappresenti un vero metodo di approssimazione. Gli è quello a cui mirano ed a cui giungono le argomentazioni del Mertens.

---

(1) *Der Fundamentalsatz der Algebra* (Sitzungsberichte der k. Akad. d. Win. in Wien, Math.-naturn. Classe, Bd. CI, Abth. II *a*, 1892, p. 415-424; e Monatshefte für Math. u. Phys., III Jahrg., 1892, p. 293-308).

Mi sia lecito lamentare da ultimo che anche nel più pregevole trattato d'algebra che — per quanto a me consta — vide la luce in questi ultimi tempi (¹), il teorema fondamentale venga dimostrato con quel ragionamento incompleto (²) che è oggi a cognizione di tutti per opera del *Cours d'Algèbre supérieure* di J. A. Serret.

Su un problema di geometria numerativa relativo alle congruenze lineari.

(Da una lettera del prof. V. Martinetti al prof. G. Loria).

Il sig. Sturm al n° 90 della recente sua opera *Die Gebilde I u. II Grades der Liniengeometrie* (*I Th.* pag. 125) pone il problema: « Trovare il numero N delle congruenze lineari, le quali passano per $\alpha(\leq 4)$ rette arbitrarie e posseggono un raggio in ciascuno di $8-2\alpha$ fasci di raggi dati pure arbitrariamente ». Il problema presenta cinque casi: $\alpha=4, 3, 2, 1, 0$, nel primo dei quali, come era già stato dimostrato in precedenza, si ha N=1, per gli altri si trova ordinatamente N=1, 2, 5, 14. Ma, mentre il sig. Sturm dimostra direttamente essere N=1 per $\alpha=3$, tratta i casi $\alpha=2$, $\alpha=1$ valendosi di alcuni risultati dell'Hirst (*On the Correlation of two Planes;* Proceed. London Math. Soc. Vol. 5, pag. 40, ed *Annali di Matematica,* 6_2, pag. 260) e rimanda per la dimostrazione dell'ultimo, $\alpha=0$ N=14, allo Schubert, *Kalkül der Abzählenden Geometrie* (§ 27, pag. 191).

Ora senza ricorrere a risultati, che non si trovino già dimostrati dallo Sturm nei §§ che precedono il n° 90 dell'opera citata, ma solo usando del *principio della conservazione del numero* (dallo stesso Sturm invocato in questa occasione) si può risolvere il problema con molta semplicità ed uniformità nel modo seguente:

1. Siano g_1, g_2, g_3 tre rette date ad arbitrio, e si voglia trovare il numero delle congruenze lineari le quali passano per queste tre rette e posseggono una generatrice in ciascuno di due dati fasci di raggi. Supponiamo arbitrari affatto i piani di questi ed i centri invece coincidenti in un punto arbitrario A della intersezione g_4 dei loro piani.

(¹) G. Chrystal. *Algebra, an elementary Text-book.* I Part, second edition, Edinburgh, 1889.

(²) Cfr. questa *Rivista*, T. I, p. 207-8.

Per una congruenza lineare, che soddisfaccia queste condizioni, il punto A od è singolare, ovvero l'unica generatrice della congruenza, che passa per esso, è necessariamente la g_4; ma la congruenza lineare individuata dalle quattro rette g_1, g_2, g_3, g_4 soddisfa alle poste condizioni, per cui, se oltre di essa ve ne fossero delle altre, per queste A dovrebbe essere singolare.

Ma i punti singolari di una congruenza lineare o sono su due rette sghembe (direttrici) seganti tutte le generatrici, ed è impossibile che questo si verifichi nel caso nostro, perchè nessuna retta per A può segare contemporaneamente g_1, g_2, g_3 (per l'arbitrarietà di tali elementi); ovvero sono tutti e soli i punti di un piano, nel qual caso la congruenza lineare si spezza in un piano rigato ed in una stella di raggi, i cui sostegni si appartengono, e pur questo è impossibile nel caso nostro, giacchè fra tre generatrici di una congruenza lineare degenere ve ne sono sempre due almeno appartenenti ad uno stesso punto, mentre questo non avviene per le g_1, g_2, g_3. Si conclude, che una sola congruenza lineare soddisfa le date condizioni e quindi che per $\alpha=3$ è $N=1$.

2. Si domanda il numero delle congruenze lineari passanti per due rette arbitrarie g_1, g_2 ed aventi un raggio in ciascuno di quattro fasci di raggi dati.

Prendiamo arbitrariamente i piani di questi fasci, ma coincidenti i centri di due di essi in un punto arbitrario A della intersezione g_3 dei loro piani, e pure coincidenti i centri degli altri due in un punto arbitrario B della intersezione g_4 dei rispettivi piani.

Per una congruenza lineare, che soddisfaccia queste condizioni, A e B possono essere ordinarî o singolari.

Se entrambi sono ordinarî, la congruenza deve possedere anche le generatrici g_3 e g_4. Esiste poi sempre un'unica congruenza lineare passante per le g_1, g_2, g_3, g_4 e questa fa al caso nostro.

Uno solo dei punti A e B non potrebbe essere singolare, giacchè sopra fu appunto dimostrato, che non v'ha alcuna congruenza lineare che possegga tre generatrici arbitrarie e per la quale un punto arbitrario sia singolare.

Se poi si suppongono singolari entrambi i punti A e B, la congruenza non potrebbe essere degenere, altrimenti una almeno delle rette g_1 g_2 dovrebbe (perchè non si segano) appartenere al piano rigato, che fa parte di essa ed il cui sostegno passerebbe già per A e B, e questo non è; perciò A e B dovrebbero stare sopra le direttrici della congruenza (non sulla stessa, perchè la AB non sega g_1 e g_2): ne viene che le direttrici della congruenza non possono essere che le due rette le quali passano rispettivamente per A e B ed appoggiano contemporaneamente

alle g_1 e g_2. D'altra parte la congruenza lineare, che ha queste due rette per direttrici, esiste, è unica e soddisfa a tutte le date condizioni, perciò deduciamo che per $\alpha=2$ è $N=2$.

3. Sia $\alpha=1$; prendiamo cioè una retta g e sei fasci di raggi e scegliamo questi così che i loro piani siano arbitrari, ma i loro centri coincidano due a due nei punti A, B e C.

Vi ha *una* sola congruenza lineare passante per g, avente un raggio in ciascuno di detti fasci e per la quale A, B, C non siano singolari.

Non ve n'ha alcuna, soddisfacente alle stesse condizioni, ma per la quale uno solo dei tre punti A, B, C sia singolare (n° 1).

Supponendo invece che A non sia singolare ma lo siano gli altri due, si trova (n° 2) una sola congruenza lineare; perciò *tre* sono in tutto quelle, che soddisfanno il problema, e per le quali uno solo dei tre punti A, B, C è singolare.

Finalmente, supposto che A, B, C siano tutti singolari, poichè nessuna delle rette che ne uniscono due incontra la g, la congruenza non potrebbe essere che degenere e contenere il piano rigato di sostegno ABC (sul quale non sta la g) ed avere per centro della stella, che completa la congruenza, il punto g.ABC. D'altra parte una tale congruenza lineare degenere è unica e soddisfa le condizioni poste, perciò se $\alpha=1$ è $N=5$.

4. Prendiamo $\alpha=0$. Anche qui supponiamo che i centri degli otto fasci siano a coppie coincidenti nei punti arbitrari A, B, C, D mentre i loro piani siano distinti.

Si vede subito che:

a) Vi è *un'*unica congruenza lineare, soddisfacente al problema, per la quale A, B, C, D non siano singolari;

b) Non ve n'ha alcuna, per la quale uno solo di quei punti sia singolare;

c) Ve ne sono *sei* con due soli di quei punti singolari;

d) Ve ne sono *quattro* per le quali tre di detti punti risultano singolari;

e) In fine, se tutti e quattro si suppongono singolari, non può darsi, per la loro arbitrarietà, che si riferiscano ad una congruenza degenere, nè che tre di essi trovinsi sulla medesima direttrice, quindi le *tre* sole congruenze lineari aventi per direttrici le coppie di lati opposti del quadrangolo gobbo ABCD soddisfanno al problema. Dunque per $\alpha=0$ è $N=14$.

Messina, 20 Aprile 1893. V. MARTINETTI.

Sulle serie di potenze.

Nota di G. VIVANTI.

I.

Il sig. Pringsheim, in un interessantissimo lavoro pubblicato recentemente [1], ha mostrato come esistano serie di potenze convergenti, insieme alle loro derivate di tutti gli ordini, in ogni punto del contorno del loro cerchio vero di convergenza, e tuttavia tali che la funzione analitica di cui esse sono un elemento non può prolungarsi oltre quel cerchio, pel fatto che sul contorno esiste un insieme condensato di punti singolari.

Le considerazioni che seguono ci sembrano condurre ad una costruzione metodica di serie fornite di tali proprietà.

È noto che, se $\lim\limits_{n=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, dove le c_n si suppongono reali e positive, è convergente, insieme a tutte le sue derivate, entro il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine. Applicando poi ad essa il criterio di Raabe [2] può aggiungersi che essa è convergente nel punto $x = 1$ (e quindi in ogni altro punto della circonferenza) se

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{c_{n+1}}{c_n}\right) > 1 . \qquad \text{(a)}$$

In virtù dello stesso criterio, sarà pure convergente nel punto $x=1$ la serie derivata, se

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{(n+1)c_{n+1}}{nc_n}\right) > 1 . \qquad \text{(b)}$$

Diciamo l_0, l_1 i limiti delle espressioni (a) e (b); sarà

$$l_0 - l_1 = \lim_{n=\infty} n\left[\left(1 - \frac{c_{n+1}}{c_n}\right) - \left(1 - \frac{n+1}{n}\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)\right] = \lim_{n=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 .$$

Quindi la derivata sarà convergente se $l_0 > 2$. Ripetendo lo stesso ragionamento, può concludersi che la serie data e le sue derivate

(1) *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich*, Math. Ann., t. XLII, p. 153-184.

(2) RAABE, *Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen*, Crelle's J., T. XI, p. 309-310.

di tutti gli ordini saranno convergenti su tutta la circonferenza di raggio 1 se

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)=\infty \quad (^1).$$

D'altra parte la funzione analitica di cui quella serie è un elemento ha evidentemente una singolarità nel punto $x=1$.

Immaginiamo ora di ordinare in serie semplice:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots$$

l'insieme di tutti gli angoli di ampiezza razionale compresi fra 0° e 360°, e prendiamo un insieme di quantità reali o complesse:

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots$$

tali che $\sum_{r=1}^{\infty} b_r$ sia assolutamente convergente. Allora, per un noto teorema di Weierstrass, la serie:

$$\sum_{r=1}^{\infty} b_r \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\alpha_r} x^n$$

potrà porsi sotto forma di una serie semplice $\sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$ convergente insieme a tutte le sue derivate nel cerchio di raggio 1, compreso il contorno. La funzione analitica, di cui questa serie è un elemento, avrà sulla circonferenza di raggio 1 un insieme condensato di punti singolari (i punti estremi di tutti i raggi formanti coll'asse reale angoli di ampiezza razionale), e quindi non potrà prolungarsi oltre quella circonferenza.

II.

Nella Memoria citata il sig. Pringsheim dà esempi di funzioni le quali, pur essendo determinate e finite in un punto insieme alle loro derivate di tutti gli ordini, non sono sviluppabili nell'intorno di esso in serie di Taylor. Cauchy ha messo in chiaro pel primo l'esistenza di tali funzioni mediante l'esempio della $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, che è nulla insieme a tutte le sue derivate nel punto $x=0$. Il sig. Pringsheim ritiene questo esempio non concludente, perchè i valori della funzione e delle sue derivate nel punto $x=0$ non risultano direttamente dal-

---

(1) È pressochè inutile avvertire che questa condizione è sufficiente ma non necessaria.

l'introduzione del valore $x=0$ nell'espressione di $f(x)$, ma si ottengono mediante un passaggio al limite. La difficoltà sussiste infatti, ma essa può togliersi considerando la cosa sotto un punto di vista alquanto diverso.

Abbiasi una *funzione analitica,* la quale rappresenti in tutto il piano una certa *espressione aritmetica;* e sia P un suo punto singolare essenziale isolato, p una retta passante per P. Supponiamo che andando al punto P lungo uno qualunque dei raggi posti da una stessa parte di p l'espressione aritmetica tenda ad un medesimo limite finito e determinato, e lo stesso abbia luogo per le sue derivate di tutti gli ordini. Consideriamo tra le infinite serie di potenze, elementi della funzione analitica data, le cui circonferenze vere di convergenza passano per P, quelle di cui i cerchi di convergenza sono tangenti alla retta p dalla stessa parte ove trovansi i raggi considerati. È chiaro che una qualunque di queste serie di potenze e tutte le sue derivate saranno convergenti nel punto P, e i loro valori in quel punto non saranno altro che i limiti a cui tendono rispettivamente l'espressione aritmetica e le sue derivate avvicinandosi al punto P lungo i raggi interni al cerchio di convergenza di quella serie.

Prendiamo in particolare l'espressione $e^{\frac{x}{x-1}}$, che è di natura analoga alla funzione di Cauchy. Essa è rappresentabile in tutto il piano mediante un'unica funzione analitica, avente a distanza finita il solo punto singolare $x=1$. Come primo elemento di questa funzione può prendersi la serie di potenze relativa all'origine [1]. Il cerchio di convergenza di tale serie ha raggio 1; ma siccome, andando al punto $x=1$ lungo qualunque retta interna a questo cerchio, $e^{\frac{x}{x-1}}$ e le sue derivate di tutti gli ordini tendono a zero, la serie di potenze e le sue derivate saranno convergenti nel punto $x=1$ ed avranno in esso valore nullo. Pertanto noi abbiamo in questa serie un esempio, perfettamente rigoroso, di una espressione che s'annulla insieme a tutte le sue derivate in un punto senza essere nulla in tutto il piano.

---

[1] I coefficienti di questa serie si calcolano immediatamente quando si conoscano le espressioni delle derivate della funzione data. Queste possono dedursi mediante la relazione:

$$\frac{d^n}{dx^n}\, e^{\frac{x}{x-1}} = e\,\frac{d^n}{dx^n}\, e^{\frac{1}{x-1}} = e\,\frac{d^n}{dz^n}\, e^{\frac{1}{z}}$$

da quelle delle derivate di $e^{\frac{1}{z}}$, di cui abbiamo data la legge di formazione in una Nota che uscirà nel *Jornal de Ciencias Mathematicas.*

Possiamo aggiungere che la stessa proprietà appartiene alle serie di potenze dedotte dalla serie considerata rispetto a tutti i punti dell'asse reale posti a sinistra del punto $x = 1$, mentre le serie dedotte rispetto a qualsiasi altro punto del piano divengono nel punto $x = 1$ divergenti od indeterminate.

Mantova, 29 Maggio 1893.

Sulla scoperta del potenziale.

Nella mia nota portante il titolo della presente, io lamentavo di non aver potuto consultare uno scritto del prof. Hathaway sulla storia del potenziale. L'illustre prof. Eneström con squisitissima cortesia, di cui son lieto rendergli qui pubbliche grazie, mi favorì spontaneamente in lettura il numero del *Bulletin of the New-York Mathematical Society* che contiene lo scritto del prof. Hathaway: *On the early history of the potential.* In questo si dimostra pure che la scoperta e la prima introduzione del potenziale nella scienza spettano a Lagrange e non a Laplace, come erroneamente si era, non da tutti però, creduto fino al 1878. La nota storica del prof. Hathaway sarebbe stata più completa se egli avesse accennato che molti anni prima di lui, la priorità di Lagrange era stata riconosciuta e dimostrata, oltrechè da Cayley, che egli cita, da Baltzer, Jacobi e da chi scrive queste linee; come appare dalla nota storica contenuta nelle pagine 293 e seguenti della *Parte prima* del nostro lavoro intitolato: *Il problema meccanico della figura della terra esposto secondo i migliori autori;* e dopo di essi da Bacharach nel 1883, *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie,* come ebbe la cortesia di farci notare il prof. Eneström stesso. La nostra nota precedente fu pubblicata al solo scopo d'impedire, che libri pregevoli per molti rispetti, divulgassero ancora una nozione storica, ripetutamente dimostrata inesatta.

Torino, 11 Maggio 1893.

Ottavio Zanotti Bianco.

RECENSIONI

Dott. Giulio Lazzeri — *Trattato di Geometria analitica.*
(Livorno, Raff. Giusti, 1893).

Ha avuto origine dalle lezioni, che l'egregio A. impartisce da qualche anno agli allievi della R. Accademia Navale, e a questi è specialmente rivolto. Come si poteva presumere dalla ben nota perizia dell'A., mi sembra, che lo scopo di appianare ai suoi giovani la via per un campo tanto importante della cultura matematica sia stato, almeno in gran parte, raggiunto. L'opera si contraddistingue per un uso saggiamente e sistematicamente promiscuo di metodi vecchi e nuovi e di coordinate cartesiane, plückeriane e proiettive; di proposizioni relative al piano ed allo spazio opportunamente ravvicinate fra loro; di proprietà metriche e grafiche: ed è corredata di belle figure esplicative. Il tutto è preceduto da una breve introduzione contenente alcune fra le principali nozioni di Geometria proiettiva; e termina con un'appendice, in cui sono raccolte parecchie utili costruzioni intorno alle coniche. L'aver saputo ordinare tanta disparità di argomenti e di metodi in un insieme abbastanza omogeneo, non è piccolo merito dell'A.

Nei primi tre capitoli della Parte I sono studiate le coordinate cartesiane, plückeriane e proiettive nelle forme di prima, seconda e terza specie, e le proiettività fra queste forme. Gli altri due capitoli della Parte I trattano, per mezzo di coordinate cartesiane, le proprietà della retta nel piano, del piano e della retta nello spazio, del cerchio e della sfera. La Parte II, che è tutta quanta rivolta alle coniche e alle quadriche, procedendo dall'equazione omogenea più generale di 2° grado fra tre o quattro variabili studia, nel 1° capitolo, le più importanti proprietà proiettive, e nel 2° capitolo le proprietà metriche fondamentali delle coniche e delle quadriche stesse. A questo capitolo appartiene pure la riduzione dell'equazione generale di 2° grado fra due o tre variabili non omogenee alle forme più semplici, e la discussione di detta equazione, cioè la classificazione delle coniche e delle quadriche. Nel 3° capitolo infine sono studiate le proprietà focali delle coniche e delle quadriche sulle loro equazioni ridotte (*).

Io, lasciando da parte ogni proposito di recar larghi giudizi sintetici sopra un lavoro, che è certamente il frutto di molte e mature riflessioni, e che ha già subìto in gran parte la difficile prova del pubblico insegnamento; ed anche per attenermi all'indole speciale di questa Rassegna; mi restringerò in quel che segue a notare alcune di quelle cose, che mi attenuaron di poco l'eccellente impressione ricavata dalla lettura del libro.

(*) È degna di nota la definizione ivi adottata per i fochi d'una quadrica (punti, ciascuno dei quali è vertice di infiniti triedri trirettangoli autoreciproci con una faccia in comune) la quale offre una grande analogia con la definizione ordinaria dei fochi d'una conica nel piano, e non diventa illusoria per nessun fuoco reale della quadrica.

Si tratta in gran parte di minuzie; e di censure che l'A. avrebbe potuto facilmente evitare, sol che avesse dato un po' più d'opera alla lima: ma non si stimeranno fuori di luogo rispetto ad un'opera didattica, anzi ad un libro di testo; sul quale, a parer mio, l'allievo dovrebbe poter giurare come un cristiano sul Vangelo. L'egregio A. ed amico vorrà accogliere le seguenti osservazioni (sopra alcune delle quali si può anche liberamente dissentire) non altrimenti che come un saggio di possibili ritocchi per una seconda edizione dell'opera.

L'Introduzione è forse la parte del libro, che lascia maggiormente a desiderare: ma bisogna pur molto concedere ad un'impresa così ardua, come quella di trattare in pochissime pagine (trentasette), con tutta l'esattezza ed il rigore convenienti, le nozioni fondamentali della Geometria moderna. Non mi piace il modo col quale sono introdotti, al § 4, gli elementi all'infinito; perchè questi non vengono ad esser definiti *in sè*, ma risulta definita soltanto la locuzione *incontrarsi a distanza infinita* (come sinonimo di *parallelismo*): ciò che, secondo il mio modo di vedere, non consente di parlare di *punti* e *rette* all'infinito come di enti geometrici, senza contraddire alla definizione di parallelismo. — Ai §§ 26 e 35 dove si stabilisce il principio di dualità (di cui l'A. si vale ampiamente in tutto il corso dell'opera) mi parrebbe utile chiarir maggiormente, come esso non consista nel puro e semplice scambio delle parole *punto* e *retta*, o *punto* e *piano;* e quand'è che esso si può con sicurezza applicare. — La definizione di omologia piana (§ 28), come proiezion centrale di due piani prospettivi fra loro sul piano che unisce il centro e l'asse di prospettività dei medesimi, è difettosa, perchè esclude il caso importante in cui l'asse e il centro d'omologia si appartengono: mancanza che si riflette poi naturalmente sopra alcune deduzioni dei successivi §§. La dimostrazione del § 29 prova soltanto che, *se esiste* un'omologia con centro ed asse dati e due punti corrispondenti dati, essa è necessariamente *unica:* occorre pertanto aggiungere che *una* tale corrispondenza effettivamente sussiste; ciò che si dedurrebbe per altro assai facilmente dal prec. § 28. Queste osservazioni parranno tanto più giustificate dal fatto, che sulle anzidette proposizioni attinenti all'omologia è fondata la dimostrazione dell'importantissimo teorema sui triangoli omologici, data dall'A. immediatamente dopo. — Perchè poi l'A. ha voluto sciupare il teorema sugli m-goni prospettivi (§ 29) enunciandolo sotto condizioni superflue? — Nè piacerà sicuramente a molti l'abito frequente nell'A. di usar le espressioni fascio *proiettivo*, forma *proiettiva*, isolate in fin di periodo, come (§ 31): « ..... in modo che agli elementi dell'una costituenti una forma di prima specie corrispondano nell'altra gli elementi di una forma di prima specie proiettiva ». — Il penultimo degli esercizi a pag. 41 suonerebbe: « costruire un'omologia piana, conoscendo l'asse e le due rette di fuga »; ma per certo dev'essere stato alterato nella stampa.

Nei §§ 17 e 68 dei capitoli 2° e 3° non è rilevata l'indeterminazione inerente al sistema cartesiano, allorchè si tratta di punti all'infinito; i quali, per l'Introduzione, dovrebbero omai considerarsi come acquisiti al piano ed allo spazio (e dei quali si parla del resto anche nello stesso § 17);

indeterminazione, su cui l'A. trasvola anche altrove (§ 18). — L'ammissione degli elementi immaginari è fatta, in modo puramente formale, ai §§ 10, 31 e 82, mediante la definizione: « una coordinata complessa o un sistema di due o tre coordinate complesse *determina un elemento complesso* della forma ». Non si può certo pretendere in un libro scolastico di Geometria analitica la trattazione sistematica degli elementi immaginari come veri enti geometrici indipendenti dal sistema delle coordinate, p. e. al modo di Staudt; sebbene non manchino dei buoni tentativi in proposito. Se non che l'A. afferma ripetutamente, che la definizione suddetta serve a mettere i risultati dell'Algebra in perfetto accordo con quelli della Geometria, a render compiuta la corrispondenza fra le soluzioni di una o più equazioni e gli elementi del piano e dello spazio. A me sembra invece, che una definizione siffatta non serva ad altro che ad introdurre una certa uniformità nel discorso; e che quanto al resto essa lasci il tempo che trova. — Noto ai §§ 47 e 94 l'affermazione che « dato un punto sono individuati i rapporti delle sue coordinate proiettive » la qual cosa è soggetta ad eccezioni: come non ne vanno esenti alcuni enunciati dei §§ 158 e 166, dove si dice che « due curve di 2° ordine aventi cinque punti a comune coincidono », e che « ogni conica può riguardarsi come figura omologica di un cerchio ».

Il ragionamento del § 206 esclude implicitamente l'ipotesi $a_{12}=0$: quantunque il risultato finale di detto n° non cessi di valere se $a_{12}=a_{22}=0$, come si verifica facilmente per via diretta. Ma per $a_{12}=a_{11}=0$ quel risultato non è più giusto: esso condurrebbe per es. a concludere, che l'equazione $ay^2+by+c=0$ rappresenta sempre una coppia di rette coincidenti. Per questo motivo io penso, che l'ultima parte del quadro sinottico delle curve di 2° ordine esposto al successivo n. 207 debba modificarsi come segue:

$$A_{33}=0,\ A=0 \left\{ \begin{array}{ll} a_{11} \gtrless 0 \left\{ \begin{array}{ll} A_{22}<0 & \text{coppia di rette parallele reali.} \\ A_{22}=0 & \quad\text{»} \quad \text{coincidenti.} \\ A_{22}>0 & \quad\text{»} \quad \text{parallele complesse.} \end{array} \right. \\ a_{11}=0 \left\{ \begin{array}{ll} A_{11}<0 & \quad\text{»} \quad \text{parallele reali.} \\ A_{11}=0 & \quad\text{»} \quad \text{coincidenti.} \\ A_{11}>0 & \quad\text{»} \quad \text{parallele complesse.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Così pure non sono scevri di obiezione i ragionamenti e i risultati dei §§ 228 e 229, dove è svolta la parte più scabrosa della discussione di una equazione di 2° grado nelle tre coordinate cartesiane; nè vi è considerata l'ipotesi che, oltre ad essere $A=B=0$, sia pure $A_{33}=0$, senza che si annullino tutte le A_{ik} (come succede ad es. per l'equazione $ay^2+bz^2+cyz+dy+ez+f=0$); cosicchè di fronte a questo caso è muto il quadro sinottico delle superficie di 2° ordine esposto al § 229.

La natura delle osservazioni che precedono non è tale da scemar nel lettore la buona opinione di un libro, che io stimo degnissimo di andar per le mani dei giovani. — Le figure sono spiccate e nitide, la carta e i caratteri discretamente buoni, ed assai curata la diligenza nell'edizione.

Torino, Aprile 1893. M. Pieri.

S. Pincherle — *Algebra complementare.*

Parte I — *Analisi algebrica.*

Non mi fermo a tessere gli elogi del pregevolissimo *Manuale Hoepli* uscito con questo titolo: per raccomandarlo agli studenti basta il chiarissimo nome dell'autore. La mole del libro e lo scopo didattico del medesimo non permettevano un ampio svolgimento delle diverse teorie; però l'autore seppe toccare in giusta misura e con chiarezza e moderno indirizzo i più importanti argomenti. Parla delle successioni di *segmenti* e relativo postulato di Dedekind, delle successioni di *vettori*, dei *punti derivati* e della general condizione d'esistenza di limite. Riassume le proposizioni principali d'Aritmetica; parla delle *congruenze* che applica alla risoluzione dell'equazione di Diofante; dà la funzione $\varphi(n)$ di Gauss; i teoremi di Fermat, di Euler e di Wilson e chiude questi cenni della teoria dei numeri interi col teorema: « Il prodotto di n interi consecutivi è divisibile per $n!$ ». Passando a trattare dei numeri reali, introduce successivamente i *numeri frazionarii, negativi* ed *irrazionali* con logico metodo, collegandosi alla genesi delle operazioni aritmetiche: infine pone in evidenza la rigorosa corrispondenza tra le proposizioni sui segmenti e quelle sui numeri reali: poi s'occupa dei *numeri complessi* e della perfetta corrispondenza tra i medesimi ed i vettori. Così resta pienamente giustificata l'applicazione alle quistioni d'Algebra del linguaggio geometrico, che spesso dà semplicità ed eleganza a dimostrazioni sostanzialmente analitiche. Tratta poi dei *limiti* rapidamente, le quistioni principali riguardanti le successioni essendo già state svolte in precedenza sotto varie forme. Dedica poi un capitolo alle *radici numeriche* e ne dà i valori nella forma trigonometrica. Dopo s'occupa del calcolo combinatorio, accenna alle *sostituzioni*, tratta delle *permutazioni, disposizioni* e *combinazioni* semplici e con ripetizione: ne fa applicazione agli sviluppi delle *potenze d'un binomio,* di $\cos m\theta$ e $\operatorname{sen} m\theta$, ai *numeri figurati*, alla somma delle potenze n^{me} dei numeri naturali, alle *potenze d'un polinomio* ed alle *probabilità*. Passa poi alle *serie*, ne dà il criterio generale di convergenza e dà criterii speciali per le serie a termini positivi, considerate sole od in relazione con altre di noto carattere, e per quelle a termini positivi e negativi, oppure complessi; parla della convergenza assoluta d'una serie e del prodotto di due serie: poi tratta della convergenza dei *prodotti infiniti*. Dopo considera le *frazioni continue*, particolarmente quelle coi numeratori tutti eguali ad 1; dà la legge di formazione e le proprietà delle ridotte, lo sviluppo d'un numero in frazione continua e di questa in serie: come applicazione risolve nuovamente l'equazione di Diofante. Passando alle *serie di potenze*, premette alcuni concetti e teoremi sulle *funzioni*, sulla *continuità*, sui *limiti superiore ed inferiore:* dà il principal teorema sulla convergenza di una serie di potenze, parla dei cerchi di convergenza, del loro limite superiore o vero cerchio di convergenza e della continuità di esse serie di potenze. Studia infine in modo particolare le funzioni *esponenziale, iperboliche* e *circolari*

delle quali dà gli sviluppi in serie e le equazioni funzionali: dimostra che il numero e è $\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ed è irrazionale: dà la relazione d'Eulero tra le funzioni circolare ed esponenziale; ed accenna alle *funzioni periodiche*. Il libro termina con un capitolo sui *logaritmi*, reali e complessi, dedotti dall'equazione esponenziale.

Dopo d'aver detto rapidamente degli argomenti contenuti nel Manuale del chiar.mo prof. Pincherle, farò alcune osservazioni di poca importanza suggeritemi dalla lettura del medesimo.

Nel caso d'una successione di vettori tendente all'infinito (pag. 17, *d*) mi parrebbe utile provare che, ridotti i vettori ad origine comune, si può condurre per l'origine almeno una semiretta in modo che in ogni angolo bisecato dalla medesima cadano vettori formanti ancora una successione avente l'infinito per limite: la dimostrazione si condurrebbe come quella di pag. 149, *b*), dividendo il piano in 4, 8, ... angoli eguali. Sarebbe conveniente che le proposizioni delle pag. 65 e 66 fossero completate con la dichiarazione, « supposto che questi limiti esistano »: anzi mi sembra preferibile p. es. questa forma: « se dei numeri, in numero limitato, tendono a limiti finiti, la loro somma tende alla somma di essi limiti ». Se è $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$, è

$$\lim\,[(a+f_n+\alpha_n)+(b-f_n+\beta_n)]=a+b$$

anche se f_n non tende a nessun limite, nel qual caso non tenderebbero ad un limite neppure $a+f_n+\alpha_n$ e $b-f_n+\beta_n$; e se è $\lim u_n=\infty$, $\lim v_n=\infty$, u_n+v_n può tendere a qualsiasi limite come può non tendere ad alcuno, secondo la natura di u_n e v_n: analoghe osservazioni si possono fare per l'altre operazioni. Relativamente al teorema *a*) di pag. 114 ricorderò che per la divergenza di $\sum a_n$ è sufficiente che sia $a_{n+1}:a_n \overline{\overline{>}}\, 1$, a partire da un particolar termine a_n. Conseguentemente (pag. 115, *b*), se sia $\lim.(a_{n+1}:a_n)=1$, non si potrà dir nulla soltanto se $a_{n+1}:a_n$ prenda sempre anche valori minori di 1. Per il teorema *b*) della pag. 124 ricordo esser sufficiente che delle due serie convergenti almeno una converga assolutamente ([1]). Dirò infine esser mia opinione che i due capitali e generali teoremi di Kummer ([2]) sulle serie a termini positivi, riguardante quindi tutte le serie assolutamente convergenti, e di Riemann ([3]) sulle semplicemente convergenti possano aver posto dovunque si tratti l'importantissimo argomento delle serie, senza il sussidio dell'Analisi infinitesimale.

Dirò finalmente che un mio articolo sulla convergenza delle serie a termini positivi ha dato luogo ad un'osservazione del sig. Pringsheim ([4]), alla quale io non credetti conveniente rispondere perchè la medesima restava distrutta precisamente dallo stesso mio articolo che l'aveva originata, in quanto che l'accennata osservazione è posta in modo molto significante in

---

([1]) Mertens, *Crelle's Journal*, 1874.
([2]) Kummer, *Crelle's Journal*, 1835.
([3]) B. Riemann's, *Werke*. Leipzig, 1892, pag. 235.
([4]) *Mathematische Annalen*, Dicembre 1891.

quel mio articolo (¹); ed aggiungo che la maniera usata dal sig. Pringsheim per stabilire il legame tra la mia proposizione ed il teorema di Kummer, od analogo del Dini, era già stata usata da me (²). Se ora ne ho parlato, è specialmente per procurarmi l'occasione di far conoscere questo rimarchevole enunciato del criterio generale per le serie convergenti assolutamente: *Perchè una serie a termini positivi,* $u_1 + u_2 + \dots$, *sia convergente è necessario e sufficiente che vi sia una funzione positiva* a_n *soddisfacente sempre la*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq \frac{1+a_{n+1}}{a_n} .$$

Non volendo abusare eccessivamente della pazienza di chi leggerà, tronco la digressione e per non terminare con essa, mio solo vero scopo essendo stato il riferire dell'eccellente Manuale d'Analisi algebrica, augurerò al medesimo quella diffusione nelle scuole a cui, per i suoi pregi, avrebbe diritto.

Parte II.

Nella 2ª parte del Manuale d'Algebra il chiar.ᵐᵒ prof. Pincherle tratta questi argomenti:

Le funzioni razionali. Formula di Taylor. Derivate. I determinanti. Sistemi d'equazioni lineari. L'equazione algebrica. Le funzioni simmetriche. Radici comuni. Eliminazione. Radici multiple. Trasformazioni nelle equazioni. Equazioni di terzo e quarto grado. La funzione razionale per valori reali della variabile. Numero delle radici reali comprese fra due numeri dati. Cenno sul calcolo numerico delle radici.

Le parti sulle forme lineari e sull'eliminazione sono ammirabili e per generalità di trattazione e per chiarezza di dimostrazioni, tenuto conto della concisione a cui l'autore era costretto per restare nei limiti impostisi: rigorosa e semplice è la dimostrazione del teorema di D'Alembert, fondamentale allo studio delle equazioni, del quale sono ancora frequenti le dimostrazioni mancanti di semplicità e di rigore. Le risoluzioni delle equazioni letterali di 3° e 4° grado, con discussioni relative, e delle numeriche sono trattate piuttosto rapidamente: però vi sono dimostrati i teoremi di Cartesio, di Rolle e di Sturm, ed esposti i metodi di Newton e di Lagrange: d'altronde era logico, stante la piccola mole del libro, concederne la miglior parte agli argomenti più importanti e meno facili. Prima di finire, voglio far rilevare che, secondo la definizione data a pag. 140, una funzione potrebbe esser sempre crescente, o sempre decrescente, anche per un intorno d'un punto nel quale compia oscillazioni: p. es. la funzione

$$\cos(x-a) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x-a)$$

sarebbe crescente nell'intervallo da $a - \infty$ ad $a + \infty$: in ciò non v'è dell'assurdo per cui tale definizione potrebbe anche porsi; ma ritengo che la medesima debbasi attribuire a pura distrazione.

F. Giudice.

(¹) *Rend. Circolo Mat.* Palermo, 1890, pag. 279, linee 8-11 risalendo.
(²) *Giornale di Battaglini.* Napoli, 1890, pag. 303.

Sulla seconda edizione degli « Elementi di Euclide ».

Risposta al prof. Gremigni.

Alla breve recensione della nuova edizione degli *Elementi di Euclide*, curata dal prof. Gremigni, da me pubblicata nella *Rivista*, l'autore contrappone un lungo e vivace articolo, che dovrebbe distruggere tutte le critiche, che io feci del suo lavoro.

Mi sia lecito rispondere colla maggior brevità possibile per far vedere come l'articolo destinato ad annientare la mia critica, la conferma luminosamente.

L'appunto più grave, che io aveva fatto alla nuova edizione degli *Elementi*, è che la pretesa dimostrazione della proposizione E (*se due poligoni sono eguali, ed hanno una parte comune, la rimanente parte dell'uno è equivalente alla rimanente parte dell'altro*), che il Gremigni pone come fondamento della teoria dell'equivalenza, è press'a poco quella stessa, che il prof. Faifofer credè di dare di una proposizione più generale, e che il De-Paolis dimostrò errata. — Il sig. Gremigni dice che ciò non è vero, e che anzi egli ha seguito la via indicata dal De-Paolis. — Il lettore intelligente ha un mezzo molto facile per riconoscere chi abbia ragione, quale delle due affermazioni sia conforme al vero. Confronti le due pretese dimostrazioni del Faifofer e del Gremigni, senza badare alla diversità delle parole, e giudichi la sostanza.

D'altra parte, con tutte le sue proteste, il Gremigni riconosce senza volerlo il suo torto colle parole seguenti: « Rispetto alla dimostrazione « della proposizione E si può muovere l'obiezione fatta dal prof. De-Paolis « alla dimostrazione del Faifofer, perchè occorrendo, come ho descritto nel « libro, di dividere uno dei poligoni nello stesso modo con cui è diviso il « suo eguale dal contorno della parte comune, e potendo per tale opera- « zione questa parte comune venir divisa e suddivisa successivamente più « volte; *può ragionevolmente dubitarsi* che tali suddivisioni non abbiano « termine. Ma a ciò io rispondo che le suddivisioni della parte comune « cessano ogni volta che i lati delle parti risultanti son ridotti minori dei « lati corrispondenti della parte non comune appartenente all'uno o al- « l'altro dei poligoni eguali ».

Con queste parole il Gremigni confessa che la sua dimostrazione, qual'è pubblicata nel testo, non è completa, e che manca precisamente in quella parte nella quale il De-Paolis dubitava che si potesse completare. È vero che l'ultime parole sopra citate dovrebbero, secondo l'autore, tenere il posto di ciò che manca nel libro; ma quella osservazione, contro l'abitudine così concisa, non mi pare che risolva affatto la quistione. Per mio conto confesso che non riesco a indovinare come, anche sviluppando il concetto indeciso e nebuloso contenuto in quell'osservazione, la dimostra-

zione si possa render completa e rigorosa. Anzi lo stesso sig. Gremigni non è molto convinto di quello che dice, perchè, mentre mi fa sapere che gli esempi da lui portati avrebbero dovuto persuadermi che la sua dimostrazione è giusta, e dice che la mia critica avrebbe dovuto cominciare da uno di questi, ai quali egli annette molta importanza, aggiunge: « Cerchi piut- « tosto, se pure gli sarà possibile, il sig. Lazzeri degli esempi da contrap- « porre al mio, dai quali risulti che vi sono casi in cui le divisioni suc- « cessive da farsi nei due poligoni non hanno termine; e nemmeno allora « potrà dire che la mia dimostrazione non è corretta (!) perchè essa vale « sempre (!!). Allora ciò che si renderà necessario di fare sarà semplice- « mente questo: cioè estendere il concetto di poligoni equivalenti al caso « in cui il numero delle parti eguali, nelle quali essi possono decomporsi, « cresce indefinitamente (!!!) ».

Questi due periodi sono veramente preziosi per più ragioni. In primo luogo dimostrano che l'autore ammette la possibilità di trovare esempi, nei quali non si verifica il fatto accennato, e quindi che la sua dimostrazione possa essere demolita. In secondo luogo dimostrano che il sig. Gremigni la pensa diversamente dal suo e mio illustre maestro prof. Dini, il quale non si stanca di ripetere ai suoi scolari, che un milione di esempi favorevoli ed un dato enunciato generale non sono sufficienti a stabilirne la verità, mentre un solo contrario ne prova la falsità, e, tenendo in vista questa legge, è riuscito a fare tante e così importanti rettifiche al calcolo infinitesimale di 20 a 30 anni fa, sollevando dei dubbi su cose che prima si ammettevano come verità indiscutibili. In terzo luogo dimostrano che il sig. Gremigni ha dimenticato che io non ho mai messo in dubbio l'enunciato della proposizione E, ma soltanto la bontà della sua pretesa dimostrazione. Ed è molto strano che egli abbia preso questo equivoco, perchè non dovrebbe ignorare che su quell'enunciato non può cadere nessun dubbio. È notissimo che due poligoni equivalenti (come sono appunto le parti sovrapposte di due poligoni eguali aventi una parte comune), si possono sempre decomporre in uno stesso numero *finito* di parti eguali.

Sapendo ciò, come può il sig. Gremigni ammettere la possibilità di dover ricorrere alla teoria dei limiti per l'equivalenza dei poligoni come per quella dei poliedri? Ripeto, non metto in dubbio l'enunciato della proposizione E; nemmeno intendo affermare che il postulato dell'equivalenza non possa un giorno o l'altro diventare un teorema. Soltanto dico che la pretesa dimostrazione della citata proposizione non regge, e che perciò crolla con essa tutto l'edifizio della teoria dell'equivalenza, costruito *con lungo studio e grande amore* dal sig. Gremigni (*).

(*) Dopo avere scritto questo articolo ho visto che nell'ultimo fascicolo dei *Mathematische Annalen* la proposizione « Se due superficie piane hanno « una parte comune, le parti non comuni sono equivalenti » è stata argomento di una lunga polemica fra i signori M. Rethy di Budapest e H. Dobriner di Francoforte (*Endlich-gleiche Flächen* von M. Rethy. M. Ann. Bd. XXXVIII, pag. 405-428. — *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn* M. Rethy *uber* « *Endlich-gleich Flächen* » von H. Dobriner. M. Ann. Bd.

È facile convincersi della verità di questa mia asserzione (quando anche quella che ho detto finora non bastasse) pensando che, se il ragionamento del Faifofer e del Gremigni fosse giusto, sarebbe tale egualmente sostituendo alla parola *poligoni* la parola *poliedri*, e così si dimostrerebbe che anche due poliedri equivalenti (per esempio due piramidi aventi basi equivalenti ed altezze eguali) sono scomponibili in un egual numero *finito* di parti eguali; scomposizione che fino ad oggi nessuno è riuscito a fare.

Osservo inoltre che, quand'anche si riuscisse a rendere rigorosa la dimostrazione della prop. E, la dimostrazione della prop. F, qual'è pubblicata nel testo del sig. Gremigni, non va. Infatti egli comincia col dire: « *Sieno* α « *e* β *due poligoni, tali che* β *sia parte di* α; dico che essi non sono equi- « valenti fra loro. — *Supponiamo invece che* α *e* β *sieno equivalenti* ecc. ». E dopo un lungo ragionamento conclude: « Dunque in α si trovano più « parti che in β, mentre se α e β fossero equivalenti, come si sono sup- « posti, per *qualunque* suddivisione che si facesse nell'uno o nell'altro, si « dovrebbe ottenere *sempre* lo stesso numero di parti rispettivamente « uguali ».

Dunque l'autore ammette già che due poligoni sieno equivalenti quando per *qualunque* suddivisione sono scomposti in parti rispettivamente eguali, ed allora la supposizione che α sia equivalente a β contraddice l'ipotesi (non la tesi) del teorema, perchè esiste già una scomposizione per la quale α contiene β insieme ad altre parti. E ciò rende inutile tutto il ragionamento.

Prima di passare ad altro argomento non posso fare a meno di osservare che se, chiamando per lo meno ingenua la pretesa di condensare in tre teoremi la teoria dell'equivalenza, si tendesse a falsare l'opinione del pubblico circa il libro del Gremigni, non sono io l'autore di una simile accusa, ma il Gremigni stesso che nella prefazione scrisse: « Quanto al postulato « dell'equivalenza sono riuscito dopo una lunga prova a darne la dimo- « strazione; onde il lettore troverà qui, *dalla proposizione* D *alla pro-* « *posizione* F *inclusive*, la teoria completa dell'equivalenza dei poligoni, « la quale potrà anche estendersi a tutte le grandezze in generale ».

Relativamente al postulato del diedro, il sig. Gremigni fa una lunga serie di considerazioni, che non hanno niente a che fare con le critiche, che io avevo fatto in proposito. — Per non ripetermi rimando il lettore a quanto già scrissi nella mia recensione; soltanto osserverò due cose. In

---

XLII, p. 275-284 — *Der Satz « Congruentes von Congruentem giebt Gleichs » in seiner Anwendung auf ebene Flächen von* H. Dobriner. M. Ann. Bd., XLII, p. 285-296. — *Ueber endlich-gleiche Flächen* von M. Rethy. M. Ann. Bd., XLII, p. 297-307).

Non credo però che questa lunga discussione abbia fatto fare un passo avanti alla teoria dell'equivalenza. Infatti l'ultimo dei citati articoli comincia : « Wir stellen uns vor, eine jede zusammenhängende Fläche A sei theilbar, « der *Gesammtheit* hirer Stüche A_1, A_2 . . . A_n *gleich*, einem *Theile* der- « selben aber *ungleich* . . . Besteht B aus den getrennten Theilen B_1 und « B_2, so folgt aus disen Grundvorstellungen, dass B_1 *durch keinerlei* « *Theilung und Bwegung in Deckung zu bringen ist mit* $B_1 + B_2$ ». E questo equivale a dire che si ammette il postulato consueto.

primo luogo tutto ciò che il sig. Gremigni dice per mettere in sodo la necessità di dimostrare la possibilità di rovesciare un diedro, si può ripetere per dimostrare la necessità di ricavare l'una dall'altra la possibilità di rovesciare un segmento e un angolo.

In secondo luogo ripeto che non si può in buona fede asserire che la quistione della fusione della geometria piana colla solida dipenda da questa quistione di postulati, e perciò il dire che per questa dipendenza la fusione in discorso è *un errore bello e buono*, oltre ad essere una sconvenienza verso un morto illustre, è anche una ..... cosa non vera.

Per dimostrare poi che questa fusione non è raccomandabile dal lato didattico, ecco le ragioni positive che porta il sig. Gremigni in opposizione alle molte addotte dai fautori della fusione stessa, e che non mi pare sia qui il caso di ripetere. « È sopratutto quistione d'esperienza, ma in ogni « modo è chiaro che sarà cosa molto più facile dare ad intendere (*sic*) ad « un giovinetto delle nostre scuole liceali successivamente le proprietà del « diedro, dopo che egli avrà ben capite e fatte cognizioni proprie quelle « dell'angolo, anzichè procedere allo studio di questi due enti contempo« raneamente. Son sicuro poi che moltissimi miei colleghi pensano in pro« posito come me; e non è passato molto tempo che uno dei professori « dell'Università di Pisa, amicissimo del De-Paolis, mi riferiva che nella « circostanza di certi esami di abilitazione all'insegnamento, il De-Paolis « stesso si era dichiarato didatticamente contrario alla fusione in discorso ».

Ora, se le parole non hanno mutato significato, per parlare di esperienza bisogna prima quest'esperienza averla fatta, cioè per lasciar decidere all'esperienza quale fra due metodi d'insegnamento sia il migliore, bisogna prima averli, coscienziosamente e senza prevenzioni, provati ambedue; e questo i signori oppositori sistematici non hanno fatto e non vogliono fare, dicendo: i nostri nonni e i nonni dei nostri nonni fino dalla più remota antichità hanno fatto sempre così, e son vissuti pacifici e tranquilli; o perchè dobbiamo proprio noi prenderci la briga di far diversamente, a costo di sciuparci il sonno e l'appetito?

Sarà poi molto chiaro, giacchè il sig. Gremigni lo assicura, che sia più facile *dare ad intendere* ai giovani le proprietà dei diedri due o tre anni dopo di aver fatto studiare le proprietà degli angoli, ma a me pare anche più chiaro che, tenendo i due studi riuniti, si risparmia ai giovani tempo e fatica.

Non dubito che vi sieno molti colleghi che pensano come il sig. Gremigni a proposito della fusione. — Per lo meno vi sono tutti quelli che per pigrizia non son disposti a cambiare nulla delle loro abitudini, e tutti coloro che sono sempre e ad ogni costo *laudatores temporis acti*. Ma vi sono anche altrettanti che la pensano diversamente, e potrei facilmente citare una lunga serie di nomi autorevolissimi e ben noti.

Lasciando però da parte l'opinione di tutti, ognuno capisce quanto sia poco verosimile che si sia dichiarato contrario alla fusione in discorso lo stesso De-Paolis, che fu il primo a proporla in Italia col suo bellissimo libro. — Disgraziatamente egli non può più difendersi da sè, e credo di

compiere un sacro dovere, rimettendo la verità a suo posto. Il professore dell'Università di Pisa, amicissimo del De-Paolis, di cui parla il sig. Gremigni, mi ha scritto in proposito una lettera, della quale (autorizzato da lui) riporto qui la parte sostanziale: « La persona a cui allude il Gremigni « nella sua polemica evidentemente son io, ed ecco come stanno le cose. « Ricordo benissimo di avergli raccontato una volta, che trovandomi a far « parte di una Commissione esaminatrice per la patente d'idoneità all'in- « segnamento insieme col mio caro e compianto Riccardo De-Paolis, ac- « cadde questo fatto. — Un candidato a cui egli domandò di quale libro « di testo si sarebbe servito per insegnar gli Elementi di Geometria nella « scuola tecnica, rispose credendo di entrar nelle sue buone grazie, che a « tutti gli altri avrebbe preferito il suo. — Al che sdegnosamente replicò: « ritengo che farebbe una corbelleria.

« . . . . . ma da questa storia all'asserzione che anco nei gradi più « elevati d'istruzione liceale, il libro sarebbe stato didatticamente inser- « vibile, mi par che ci sia una differenza sostanziale ».

A meglio spiegare l'episodio, che, male interpretato, ha dato luogo ad un deplorevole equivoco, aggiungerò che il compianto De-Paolis ha detto moltissime volte non solo a me, ma anche ai suoi colleghi ed amici dell'Università di Pisa, che riconosceva il suo libro molto difficile, fatto con un indirizzo puramente scientifico, e perciò più adatto a servire di guida agl'insegnanti che agli studenti, ma che però era fermamente convinto che il metodo da lui iniziato fosse il migliore sotto tutti gli aspetti e perciò destinato a trionfare in un avvenire più o meno prossimo.

E qui potrei anche finire, essendo quelle esposte le più gravi osservazioni che io aveva fatte sulla nuova edizione degli Elementi. — Ma pur tralasciando per amore di brevità molte inesattezze che si trovano nell'articolo del sig^r^ Gremigni, non posso fare a meno di rilevarne qualcuna.

Il sig. Gremigni scrisse che alcuni difetti da me rilevati sono imaginari. Per esempio io scrissi: « Si è mai accorto il sig. Gremigni che le propo- « sizioni I, XII, XXII, non possono dirsi rigorosamente dimostrate senza i « teoremi relativi alle intersezioni d'un circolo con una retta a di due cir- « coli fra loro, teoremi che Euclide mette nel III libro? » E il Gremigni di rimando: « Ha mai letto l'osservazione che è alla fine della proposizione « XXII? Se l'avesse letta, ci avrebbe trovato la dimostrazione rigorosa che « desidera. » — Sebbene questa osservazione lasci a desiderare, e non valga per la XII, mi contento che il sig. Gremigni riconosca per lo meno che le proposizioni I e XXII sono giustificate dopo la XXII.

Per un difensore di Euclide non c'è male.

Cerca inoltre il sig. Gremigni di cogliermi in contradizione con me stesso, perchè, mentre ho deplorato in principio della mia recensione che gli Elementi di Euclide abbiano dominato per un quarto di secolo nelle nostre scuole, senza migliorarsi mai, mi sono poi permesso di domandare se la nuova edizione fatta con tante aggiunte e modificazioni è proprio ancora *Gli Elementi di Euclide*, ed aggiunge che chi lo giudicherà con più imparzialità e benevolenza di me, capirà che l'unico suo pensiero è stato di ren-

dere sempre più adatto all'insegnamento un libro che dal 1867 in poi aveva già recato molti vantaggi all'insegnamento secondario.

La contradizione non esiste perchè, mentre credo che si possa agevolare lo studio di un'opera classica come quella di Euclide, per mezzo di copiose note ed aggiunte *ben distinte dal testo*, non credo lecito apportare nel testo modificazioni tali, che un lettore superficiale possa non riconoscere a colpo d'occhio dove finisce l'opera dello scrittore e dove comincia quella del chiosatore.

Riguardo all'opportunità di fare ora una nuova edizione degli elementi mi sia lecito dire in poche parole quello che penso sull'uso di Euclide nelle scuole.

L'obbligo di usare Euclide nei Licei, imposto nel 1867, credo sia stata cosa provvidenziale. « La recisa prescrizione (scrissero Sannia e D'Ovidio (*)) « mirava a ricondurre all'antica purezza la trattazione della Geometria ra- « zionale elementare, che il Legendre e i suoi imitatori avevano offuscata...; « e mirava altresì a spazzar via i tanti libercoli, mal pensati e peggio « scritti da indotti speculatori, che infestavano i nostri licei. Fu come una « operazione chirurgica: fece gridare, ma giovò. Tuttavia gli autorevoli « matematici, che ritornarono in onore gli elementi di Euclide, non nega- « vano che, se ventidue secoli non eran valsi a far porre in oblio quell'aureo « codice della geometria greca, avevano però senza fallo reso necessario « che esso fosse emendato, semplificato ed esteso ».

Ora in 26 anni le cose sono cambiate, e molto. Ormai è entrato nella coscienza di tutti che le proprietà geometriche devono essere insegnate senza alcun sussidio dell'Algebra e dell'Aritmetica; oramai le numerose lacune, che si trovano negli Elementi, sia rispetto all'enunciato dei postulati, sia rispetto alle teorie dell'equivalenza, dei limiti, ecc., sono state messe in luce dalle molte opere accurate pubblicate in questo tempo, e quindi quello che era buono 26 anni fa, non è più buono ora; e non è più possibile migliorare Euclide rimpolpettandolo; bisogna servirsi dei materiali, ma costruire di nuovo.

Ciò è tanto vero che l'obbligo di adottare Euclide come testo è stato soppresso da molti anni, e l'uso di esso va poco a poco diminuendo, tanto che lo stesso sig. Gremigni dice che, quantunque il nome di Euclide fosse associato ai nomi illustri di Betti e Brioschi, si sentiva il bisogno di una nuova edizione. Valgono ancora a dare una vita effimera agli Elementi nelle scuole la forza d'inerzia dell'abitudine, per la quale molti non cambiano volentieri un libro di testo, ed anche i programmi ministeriali, non tanto per il fatto che impongono il metodo Euclideo, quanto perchè si limitano a stabilire che nel tal corso si facciano i tali o tali altri libri di Euclide; e questo per i pigri e per i timidi equivale a imporre gli Elementi. Infatti i libri di Euclide non corrispondono in generale a divisioni organiche della materia, perchè (e questo è uno dei maggiori difetti riconosciuti anche da tutti i fautori di Euclide) le proposizioni si succedono sì in modo

(*) Prefazione alla 6a edizione degli *Elementi di Geometria.*

che ciascuna si possa ricavare logicamente delle precedenti, ma assai di rado in modo che una serie di esse costituisca una trattazione completa di un dato argomento. — Cosicchè chi voglia adottare un altro libro, trova un po' di difficoltà a distribuire la materia nei varii corsi.

Credo perciò che il tentativo del prof. Gremigni di ringiovanire Euclide per l'uso delle scuole equivalga al tentativo di galvanizzare un cadavere, e non ritarderà (se pure non lo affretterà) il giorno in cui fatalmente gli Elementi torneranno ad essere relegati nelle biblioteche, dove staranno benissimo, e dove tutti gli studiosi potranno ammirarli e far loro tanto di cappello. È sperabile che ad affrettare questo giorno cooperino le nuove istruzioni ministeriali, informate a maggiore spirito di libertà.

Mi piace a questo proposito richiamare l'attenzione dei lettori della *Rivista* sopra una dotta ed interessante memoria, pubblicata dal prof. Gino Loria nel *Periodico di matematiche elementari*, nella quale con molta erudizione e molta cognizione di causa è compendiata la storia delle vicende di Euclide in tutto il mondo. — Da essa si rileva che in Francia, Spagna, Portogallo, Danimarca, Russia, Austria-Ungheria e perfino nella patria di Euclide gli Elementi non hanno mai attecchito; che negli Stati Uniti l'uso degli elementi è quasi abbandonato; e che anche in Germania ed in Inghilterra, le due cittadelle di Euclide, si accentua ogni giorno più il movimento che tende a sostituire agli Elementi libri più conformi all'indirizzo moderno degli studî geometrici. E ciò è naturale. Infatti, scrive il giovane e valente geometra, « la geometria non è una lingua morta che si deve studiare nelle « opere di Euclide. — Ostinandosi a far ciò sarebbe quanto suggerire a chi « volesse imparare l'italiano l'unico studio di Ciullo d'Alcamo e fra Jacopone « da Todi ».

E con questo dichiaro che per parte mia la polemica è assolutamente finita, e, senza curarmi delle accuse di parzialità, malevolenza e malignità, mi rimetto serenamente e con piena coscienza al giudizio del pubblico intelligente.

G. Lazzeri.

Livorno, 15 giugno 1893.

ERRATA-CORRIGE

Pag. 113, linea 15

invece di « saranno » *leggi* « potranno essere ».

G. Vivanti.

Su talune erronee “ riflessioni „ del Prof. Arminio Nobile

Osservazioni del Prof. Ernesto Cesàro.

*
* *

. . . . . scola li pazzii, scola cci sunnu
li spropositi, o nostri, o d'autri genti,
ch'appocu appocu un ciriveddu tunnu
lu riducinu quatru e risplendenti;
e chiddi chi 'un si quatranu a sta scola,
nu' li quatra lu ferru nè la mola.
(Giovanni Meli).

Le « riflessioni » fatte dal socio ordinario Nobile, nell'adunanza del 1° aprile 1893, sulla *variazione della latitudine*, son piene di gravi errori, alcuni dei quali rivelano una strana imperizia nell'uso delle formole trigonometriche e degli sviluppi in serie, che pure dovrebbero essere familiari ad ogni più modesto cultore di cose astronomiche; altri provengono da un modo assai superficiale d'interpretare i risultati dei calcoli. Alludo all'interpretazione geometrica di talune formole, e non alle conseguenze di filosofia naturale che l'Autore ha creduto di poter dedurre dalle sue (pur così tenui) ricerche. Su quest'ultimo argomento non intendo insistere, per ora, perchè voglio evitare un campo nel quale debbo ritenere (fintantochè un più attento studio della questione non valga a convincermi del contrario) che la competenza dell'Autore superi di gran lunga la mia.

Nondimeno non so astenermi dall'esprimere il parere che ben altre teorie di Analisi e di Meccanica occorrerebbe, forse, mettere in giuoco per istudiare con serietà gli effetti dello spostamento dell'asse di rotazione della Terra nelle determinazioni di longitudine, e che quando si voglia, per evitare certe difficoltà, ridurre il problema a quel grado di pressochè infantile semplicità che gli attribuisce l'Autore, non si ha più il diritto di trarne deduzioni gravi ed assolute come quella che termina il § 3.

Tuttavia, semplificato ad arbitrio il problema, non è nel modo più semplice che l'Autore lo tratta. Egli sente infatti ad ogni istante il bisogno di ricorrere alle coordinate cartesiane, perfettamente inutili. In particolare è ben facile *leggere*, per così dire, la relazione (1) nel triangolo APP_1. Essa non è che la formola fondamentale della trigonometria sferica

$$\cos AP_1 = \cos AP \cos PP_1 + \operatorname{sen} AP \operatorname{sen} PP_1 \cos \widehat{P},$$

poichè

$$AP = 90^\circ - \varphi\ ,\ \ AP_1 = 90^\circ - \varphi_1\ ,\ \ PP_1 = \varepsilon\ ,\ \ \widehat{P} = 180^\circ - \lambda\ .$$

Quella che l'Autore chiama la « ricavazione » delle sue formole non è dunque, per un occhio abituato ai calcoli trigonometrici, che una semplice *lettura* di note formole sulla superficie della sfera.

Messa poi l'ipotesi che di ε si possano trascurare le potenze superiori alla prima, è inutile enunciare, come se fossero *altre* condizioni cui si assoggetta ε, le uguaglianze $\operatorname{sen}\varepsilon = \varepsilon$, $\cos\varepsilon = 1$. Ciò è matematicamente scorretto in quanto si vengono a presentare come ipotesi distinte (e l'intenzione dell'Autore è resa manifesta dalle parole « ed anche che » della 3ª linea del § 1) tre fatti analitici, ciascuno dei quali vale da solo a determinare gli altri due. Quanto all'aggiunta che quelle potenze sia lecito trascurarle *con tutta sicurezza*, essa è una vana pretesa, perchè ciò non dipende nè dall'Autore, nè dall'angolo ε, per quanto piccolo sia, ma dalle circostanze caratteristiche dei varii problemi in cui l'angolo stesso interviene. E fra breve si vedrà che, alla fine del § 2, l'Autore è caduto in errore appunto per aver fatto troppo a fidanza con la supposta illimitata possibilità di trascurare le potenze superiori di ε.

È anche indispensabile che tali potenze non si trascurino *troppo presto*, come in sostanza fa l'Autore ricavando dalla formola (3) uno sviluppo erroneo di $\lambda - \lambda_1$ secondo le potenze ascendenti di ε. Sebbene tale sviluppo sia completamente inutile per le ulteriori « riflessioni » l'Autore ha tenuto a farlo conoscere; ma nel coefficiente di ε^2 ha scritto $\operatorname{tg}^2\varphi$ per $\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{1}{2}$. E questo errore non è possibile addebitarlo al proto, perchè lo sviluppo è stato dedotto *esattamente* dalla formola (3), quantunque non sia vero che per la sua validità occorra la condizione $\varphi < 90°$, che *non è necessaria* ed *è insufficiente* per la convergenza. L'errore sta invece nell'aver fatto uso della (3), uso non consentito dal carattere approssimativo di questa formola. Se l'Autore fosse partito da ciò che la (3) era, prima che vi si trascurassero le potenze superiori di ε, sarebbe pervenuto allo sviluppo esatto:

$$\lambda - \lambda_1 = \varepsilon \operatorname{tg}\varphi \operatorname{sen}\lambda - \left(\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{1}{2}\right)\varepsilon^2 \operatorname{sen}\lambda\cos\lambda + \ldots\ldots$$

L'Autore si ferma poi a discutere la curva (che egli chiama *speciale*) rappresentata dall'equazione $\cos\lambda + \varepsilon\operatorname{tg}\varphi = 0$. I dettagli della discussione assumono un aspetto singolarmente puerile, appena si osserva che questa equazione, tradotta in coordinate cartesiane, diventa $x + \varepsilon z = 0$. La *curva speciale* del prof. Nobile è dunque un *circolo massimo* della sfera! La grande incertezza che regna nella matematica dell'Autore è poi messa in rilievo dalle ultime parole del § 2, dove egli rasenta la verità, anzi la investe in pieno, senza riuscire ad afferrarla. Del resto, anche in questa circostanza, è inutile adoperare le coordinate cartesiane per vedere che cosa sia la *curva speciale*. Basta osservare che, nell'ipotesi $\cos\lambda + \varepsilon\operatorname{tg}\varphi = 0$, la formola (2) dà $\lambda_1 = 90°$. Questa è appunto l'equazione di quel meridiano del sistema (P_1), che taglia ad angolo retto il meridiano PP_1. Dopo ciò, non solo riesce ingenua la discussione geometrica della formola (4), ma viene in luce anche l'inesattezza di qualche dettaglio. È ovvio, per esempio, che

la *curva speciale* incontra l'equatore sotto un angolo complementare di ε, e non uguale a 270°.

Ora io voglio mostrare che anche queste ultime conclusioni, che pur costituiscono una prima rettifica necessaria di quelle dell'Autore, sono sbagliate. E sono sbagliate al punto che danno come *quasi retto* un angolo *quasi nullo*. Ciò valga ad ammonire tutti quelli che abusano delle quantità *trascurabili*. I gravi errori nei quali s'incorre tralasciandole inconsideratamente lungo i calcoli sono facili ad evitare. Bisogna trascurare *una volta sola* ed *il più tardi possibile*. Nella questione attuale una più accorta discussione, fatta rispettando questo duplice precetto, conduce alla formola

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cos\lambda_1 + \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = 0\,,$$

che va sostituita alla (4). Dunque si può dire soltanto che $\operatorname{tg}\varphi_1 \cos\lambda_1$ è quantità piccolissima, e che però i punti soddisfacenti alla precedente condizione sono vicinissimi ad avere o $\lambda_1 = 90°$ o $\varphi_1 = 0$. Essi costituiscono una *conica sferica*, prossima a degenerare in una coppia ortogonale di circoli massimi. L'Autore considera solamente uno di questi circoli, che nelle vicinanze del polo differisce pochissimo dalla conica; ma nelle vicinanze dell'equatore accade che la conica, scostandosi quasi bruscamente dal detto circolo, si accosta all'altro, ed a tale rapido variare dell'orientazione si deve se essa, che sembrava voler tagliare ad angolo retto l'equatore, finisce in realtà per incontrarlo sotto un angolo piccolissimo.

Anche il calcolo di tale angolo si può agevolmente eseguire senza coordinate cartesiane, perchè si sa, in generale, che l'angolo θ di due linee qualunque $u = 0$, $v = 0$, tracciate sulla superficie sferica, è dato dalla formola

$$\cos\varphi \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{\Delta u \,.\, \Delta v}} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\lambda, \varphi)}\,,$$

nella quale i parametri differenziali di u e v si calcolano facilmente ricordando che

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^2.$$

Nel caso attuale si ha

$$u = \operatorname{tg}\varphi \cos\lambda + \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\;,\quad v = \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varepsilon \cos\lambda\,,$$

e le coordinate d'un punto d'incontro sono $\lambda = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Quindi

$$\Delta u = \frac{1}{2}\;,\quad \Delta v = 1\;,\quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(\lambda, \varphi)} = \varepsilon\;,\quad \theta = \varepsilon\sqrt{2}.$$

Adunque l'angolo trovato (non si sa come) di 270° dall'Autore è invece uguale ad $\varepsilon\sqrt{2}$!

Le « riflessioni » del Prof. Nobile occupano *sette* pagine degli *Atti* (vol. V, serie 2ª, p. 13). Quello che ho detto della *prima pagina e mezza* mi autorizza a tacere delle altre.

*
* *

Mmatula Euclidi a pruvari si sforza
chi tutti l'anguli àvi aviri uguali
ogni triangulu a dui retti afforza;
'ntra sti paisi la ragiuni 'un vali,
e supra tuttu è contrabbannu granni
'na muddichedda minima di sali.
(Giovanni Meli).

Le osservazioni precedenti, prima comunicate confidenzialmente al Prof. Nobile, che non riuscì a persuadersi della loro esattezza, furono poi lette, il 1° Agosto 1893, innanzi ad una delle nostre Accademie, che le respinse (*) ad unanimità. Profitto dell'ospitalità accordatami dalla « Rivista » per replicare brevemente alle varie risposte date a viva voce dal Prof. Nobile su alcuni punti della mia critica:

1° « Lo sviluppo di $\lambda - \lambda_1$ è *tolto di peso* dall'Astronomia del Brünnow ».

Questo non si chiama rispondere. Segnalato l'errore, il prof. Nobile aveva l'obbligo di verificarne l'esistenza, e ciò egli avrebbe potuto fare con lieve fatica derivando l'eguaglianza

$$\cot\lambda_1 = \cos\varepsilon\cot\lambda + \operatorname{sen}\varepsilon\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{sen}\lambda}\,.$$

Avrebbe, forse, ottenuto

$$\frac{d^2\lambda_1}{d\varepsilon^2} = 2\cot\lambda_1\left(\frac{d\lambda_1}{d\varepsilon}\right)^2 + \operatorname{sen}\lambda_1\cos\lambda_1\,,$$

e siccome, per ε tendente a zero, si ha

$$\lim\frac{d\lambda_1}{d\varepsilon} = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{sen}\lambda\,,$$

è pure

$$\frac{1}{2}\lim\frac{d^2\lambda_1}{d\varepsilon^2} = \left(\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\lambda\cos\lambda\,.$$

Tale, cambiato di segno, è il coefficiente di ε^2 nello sviluppo di $\lambda - \lambda_1$. Dunque ha sbagliato Brünnow? No, perchè invano si cercherebbe in tutto il suo trattato la formola che il Prof. Nobile asserisce di averne *tolto di peso*. Lo sviluppo di $\lambda - \lambda_1$ è proprietà esclusiva del Prof. Nobile. Non ha egli esplicitamente dichiarato (nella 11ma linea della pag. 2) di averlo dedotto dalla formola (3)? *Questo* appunto gli era vietato di fare. Del resto come si spiegherebbe che, non dovendo servirsene in tutto il corso delle sue « riflessioni » l'Autore abbia voluto togliere una formola da un libro per il solo gusto di vederla figurare nella sua « Nota »? Quanto alla legittimità dello sviluppo, l'Autore non ha creduto di doversene preoccupare, proba-

(*) Unicamente *per la forma* (Verbali dell'Accademia).

bilmente perchè non si è accorto dell'esistenza di piccolissimi campi di divergenza intorno ai poli. Forse li ha *trascurati* con ε.

2° « I 270° della fine del § 2 non rappresentano l'angolo sotto cui la *curva speciale* incontra l'equatore, sì bene la longitudine del punto d'incontro ».

Questo si chiama cadere da Scilla in Cariddi. Si conceda pure al prof. Nobile di scambiare fra loro due verità di *Monsieur de la Palisse;* ma resta pur sempre in piedi il calcolo eseguito alla fine delle mie osservazioni, dal quale emerge chiaramente che le due curve non hanno in comune due soli punti, alle longitudini $\pm 90°$, come sembra credere il Prof. Nobile, ma ne hanno quattro, vicinissimi ai vertici d'un quadrato, giacchè le loro longitudini, per ε infinitesimo, tendono ad essere $\pm 45°$, $\pm 135°$. Ed anche qui un calcolo elementarissimo consente un rapido controllo delle mie asserzioni. Infatti si ha, sull'equatore,

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{\varepsilon^2}{4} \operatorname{sen} 2\lambda\,,$$

trascurando le potenze di ε, dalla terza in su. Noto, passando, che dalla pretesa formola di Brünnow $\lambda_1 - \lambda$ risulterebbe trascurabile rispetto ad ε^2. Ora per $\lambda = \pm 90°$ si ha, come si poteva prevedere, $\lambda_1 = \lambda$, anche senza trascurar nulla. Il massimo di $\lambda_1 - \lambda$ è, in valore assoluto, $\frac{\varepsilon^2}{4}$, e si presenta quando $\operatorname{sen} 2\lambda = \pm 1$, cioè per $\lambda = \pm 45°$, $\pm 135°$. Invece il prof. Nobile addita agli osservatori come punti nei quali, sull'equatore, deve avverarsi la *massima variazione* di longitudine, precisamente quei due soli punti *nei quali la longitudine non varia!*

3° « Se nel cominciare a discutere l'equazione (4) l'Autore ha parlato d'una *curva speciale*, egli non ha poi tardato a riconoscere che questa curva è un circolo. »

Nego. Le ultime parole del § 2 stanno invece a provare, come ho detto, che le già scarse cognizioni matematiche dell'Autore sono confuse al punto che egli non riesce a rendersi conto delle stesse verità che gli cadono sotto gli occhi. Ad ogni modo, chi gli ha impedito di ritornare su quello che aveva scritto, per farne sparire almeno l'espressione di *curva speciale*? Manda egli forse in tipografia le prime bozze dei suoi calcoli, vietando a sè stesso ogni ulteriore correzione? Se l'affermazione del prof. Nobile fosse sincera, egli avrebbe dunque voluto dimostrare, fra molte altre ingenuità, che se un punto percorre un circolo massimo della sfera, che non sia un meridiano, esso non può avvicinarsi indefinitamente ai poli. In altri termini, generalizzando: *una curva piana non passa per quei punti che stanno fuori del suo piano!* Del resto l'errore principale del prof. Nobile sta appunto nell'aver creduto e sopratutto nel continuare a credere che la curva della massima variazione di longitudine sia un circolo, o qualche cosa che rassomiglia ad un circolo.

4° « All'Autore poco importava la discussione della *curva speciale*.

Egli voleva soltanto indicare ai geodeti la via da tenere per non si sa quali alte speculazioni. »

Non è probabile che i geodeti vogliano seguire i consigli di chi li esorta a fondare le loro osservazioni sopra una base matematica ridicola e falsa. Quanto alla curva speciale, il discuterla non poteva interessare altri che il prof. Nobile, giacchè il pubblico delle nostre scuole conosce abbastanza i circoli massimi e le coniche sferiche. O Geodesia! . . . . .

Or io pongo fine al mio dire per non imitare il prof. Nobile, che specialmente nella 6ª pagina della sua « Nota » sciupa la carta dell'Accademia e la pazienza dei lettori per abbandonarsi a volgarissime esercitazioni di Geometria analitica, indegne dei più elementari periodici di matematica. Pure termino senza speranza alcuna che la mia critica valga a correggere un avversario (stavo per dire scientifico) che *nun àvi drittu, è comu la lasagna, — e cci aviti a concediri pri forza, — chi l'acqua asciuca e chi lu suli vagna.* (*)

Portici, 2 agosto 1893.

Rettificazione
di alcune inavvertenze in un moderno trattato di geodesia.

Nota di Ottavio Zanotti Bianco, Ingegnere.

Scopo del presente lavoro è di correggere la dimostrazione di una proprietà del *geoide* data dal compianto Professore Enrico Pucci nelle pagine 300-4 del volume primo del suo pregevole libro, *Fondamenti di Geodesia.* I ragionamenti svolti rimangono valevoli anche rettificando l'inavvertenza che generò uno sviluppo di calcolo inesatto.

Ne occorre trascrivere parte della trattazione.

« Ci sembra importante di notare che i punti che appartengono al *livello medio del mare* non appartengono però realmente al *geoide* definito come la superficie di equilibrio secondo cui si disporrebbero le acque dei mari supposti in comunicazione e quando non vi fossero cause di continuo disturbo. Una tale considerazione che non ha valore rispetto allo scopo principale dell'altimetria, diviene invece necessaria quando si vogliono comparare degli *zeri mareografici* posti sotto latitudini molto diverse, per dedurne delle conseguenze sulla forma del Geoide. »

« Per mostrare elementarmente la distanza (in altezza) fra un punto appartenente al *livello* medio del mare e il punto corrispondente del Geoide

---

(*) Giovanni Meli, *Satiri* (Lu tempiu di la Fortuna).

e dedurre in pari tempo una formola che dia, con sufficiente approssimazione, il valore di tale distanza, considereremo il Geoide come una sfera di raggio R (lo che non introduce in questo caso nessun errore sensibile nei resultati) e supporremo che la superficie delle acque, deformata a causa dell'attrazione lunisolare, sia un ellissoide di rivoluzione allungato, col suo grand'asse diretto verso il corpo attraente che possiamo ammettere unico. Rappresentando la metà di questo grand'asse con $R + x$ è facile vedere che il piccolo asse è dato con sufficiente approssimazione da $R - 2x$, giacchè, il volume dell'ellissoide dovendo essere eguale a quello della sfera, si ha fra il raggio di questa e i semiassi a, b la condizione

$$a^2 b = R^3$$

da cui si deduce

$$b = \frac{R^3}{a^2} = \frac{R^3}{(R + x)^2} = R\left(1 - 2x \frac{3x^3}{R^2} \ldots\ldots \text{ecc.}\right)$$

mentre, per la piccolezza pel rapporto $\frac{x}{R}$, le seconde potenze di questo possono evidentemente essere trascurate, tanto più che la forma ellissoidica ammessa non è che ipotetica. »

La parte sbagliata comincia colle parole « *è facile vedere che il piccolo asse* ». Notiamo anzitutto che si doveva scrivere *piccolo semi asse*, come appare dalla semplice lettura. Il valore di questo *piccolo semi asse* è $R - \frac{x}{2}$ non $R - 2x$. Infatti se l'ellissoide di rivoluzione che corrisponde alla superficie delle acque perturbate dall'azione lunisolare è allungato verso il corpo attraente, supposto unico, l'asse maggiore passante pel corpo attraente, sarà quello di rotazione; diciamolo $2a$ e chiamiamo b il semi asse minore; il volume dell'ellissoide sarà dato da $\frac{4}{3}\pi ab^2$ e quindi ragionando come nel testo si avrà l'equazione

$$ab^2 = R^3 \tag{1}$$

non quella data

$$a^2 b = R^3$$

Da questa svista rimane inquinato tutto il susseguente sviluppo che noi ripetiamo qui liberato dalle conseguenze di quella.

Dalla nostra equazione (1), si ricava

$$b = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{R + x}} = R^{\frac{3}{2}}\left\{R + x\right\}^{-\frac{1}{2}} = R^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\frac{x}{R^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{8}\frac{x^2}{R^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots\right)$$

$= R\left\{1 - \frac{x}{2}\right\}$; pur trascurando le potenze di $\frac{x}{R}$ superiori alla prima.

Ora riprodurremo lo sviluppo dell'autore ma col giusto valore

$$b = R\left(1 - \frac{x}{2}\right) \tag{2}$$

Tutti i punti che in un dato istante hanno alta marea appartengono ad un meridiano terrestre, e, nella nostra ipotesi, astrazion fatta dal ritardo della marea *(stabilimento del porto)* la forma della intersezione del piano di quel meridiano colla superficie delle acque è in quell'istante un'ellisse che ha per semi assi $R+x$ ed $R-\frac{x}{2}$; se si riferisce codesta curva a un sistema di coordinate polari r, θ col polo al suo centro e coll'asse polare coincidente coll'asse maggiore dell'ellisse, per l'equazione che la rappresenta, si trova senza difficoltà

$$r=\frac{R-\frac{x}{2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}},$$

da cui si deduce:

$$r-R=\frac{Re^2\cos^2\theta}{2}-\frac{x}{2}\left(1+\frac{e^2\cos^2\theta}{2}\right)+.....$$

Per il valore di e^2, trascurando le potenze di $\frac{x}{R}$ superiori alla prima, si ottiene per altro

$$e^2=\frac{(R+x)^2-\left(R-\frac{x}{2}\right)^2}{(R+x)^2}=\frac{3x}{R}+\text{ ecc.}$$

quindi l'espressione precedente diviene

$$r-R=-\frac{x}{2}\left(1-\frac{3}{2}\cos^2\theta\right)+...$$

Per esprimere θ in funzione di quantità note, sia δ la declinazione astronomica del corpo attraente e ψ la latitudine geocentrica corrispondente al punto (r, θ) ed è facile constatare che si ha

$$\theta=\psi-\delta$$

Avremo dunque:

$$r-R=-\frac{x}{2}\left\{1-\frac{3}{2}\cos^2(\psi-\delta)\right\} \qquad (3).$$

Formola molto notevole che ci mostra che per i punti di un meridiano compresi fra certe latitudini, anche nel momento di alta marea, il livello del mare resta al disotto del Geoide, che è una superficie per metà sempre elevata sulle acque.

Nel momento di bassa marea l'intersezione del piano meridiano colla superficie delle acque è un cerchio di raggio $R-\frac{x}{2}$ e la distanza (in altezza) fra un punto del mare dal Geoïde è $-\frac{x}{2}$. Rappresentando dunque con Δ la differenza di livello fra l'alta e la bassa marea in un luogo di latitudine *geocentrica* ψ avremo le relazioni

$$(4) \qquad \Delta=\frac{3}{4}x\cos^2(\varphi-\delta); \quad x=\frac{4\Delta}{3\cos^2(\varphi-\delta)} \qquad (5).$$

Si avverta che la parola *geocentrica*, manca nel testo, ma vi è necessaria.

La (5) ci porge il mezzo di verificare l'esattezza dell'ipotesi fatta sulla forma della superficie del mare deformata dall'attrazione lunisolare; infatti i valori di Δ osservati su coste oceaniche non frastagliate sotto le diverse latitudini in ogni singola fase di marea introdotti successivamente nella (5) dovrebbero dare, se l'ipotesi è buona, uno stesso valore per x.

La distanza (in altezza) H fra il livello medio mareografico ed il Geoide si ottiene subito dalle (3), (4) e (5) osservando che il livello medio si ha togliendo dal livello dell'alta marea la quantità $\frac{\Delta}{2}$, mentre per ridurre il livello dell'alta marea al Geoide si deve togliere dal primo la quantità:

$$-\frac{x}{2}\left\{1-\frac{3}{2}\cos^2(\psi-\delta)\right\}$$

che, a causa della (5), può scriversi

$$\frac{-2\Delta\left\{1-\frac{3}{2}\cos^2(\psi-\delta)\right\}}{3\cos^2(\psi-\delta)}$$

Questa ha la stessa forma di quella data dal prof. Pucci a pagina 303, ma il valore di Δ è diverso; quello esatto è dato dalla nostra formola (4).

Ne conviene proseguire a rettificare lo sviluppo del testo, perchè le conseguenze della svista accennata in principio si estendono fino al fine.

Si ha quindi

$$H=\frac{\Delta}{2}+\frac{2\Delta\left\{1-\frac{3}{2}\cos^2(\psi-\delta)\right\}}{3\cos^2(\psi-\delta)}=-\frac{\Delta}{2}\left\{1-\frac{3\cos^2(\psi-\delta)}{4}\right\}. \qquad (6).$$

Per $\psi-\delta=0$, si ha dunque: $H=\frac{\Delta}{6}$: per $\psi-\delta=90°$, quantunque il valore di $\frac{1}{\cos^2(\psi-\delta)}$ divenga infinito, il valore di H resta indeterminato, giacchè Δ si annulla: infatti nei due punti corrispondenti del Geoide, che sono unici, la marea varia solo col variare della posizione relativa del sole e della luna. Del resto sappiamo che in questo caso si ha $H=\frac{x}{2}$.

In quanto rimane dello sviluppo del prof. Pucci la svista in cui incorse non ha più influenza, ove si avverta di sostituire alle formole cui egli accenna, quelle corrette da noi date nella presente breve nota.

A pag. 214 del volume medesimo (primo) della Geodesia del sig. Pucci, linea 17, invece di *simile e concentrico,* bisogna leggere *simile, similmente disposto e concentrico,* od, il che torna lo stesso, *omotetico e concentrico.*

Ottavio Zanotti Bianco.

N. Jadanza. — *Una difesa delle formole di Simpson, ed alcune formole di quadratura poco note.* (Estratto dal periodico *Il Politecnico,* 1893).

Questo articolo si riferisce alla questione sollevata dall'ing. F. Crotti nella *Rivista di Matematica,* II, pag. 176, e già discussa dal prof. Bardelli, ivi, vol. III, pag. 16 e da altri. L'A. fa vedere i pregi della formola di Simpson rispetto a quella dei trapezii; si occupa in seguito di alcune altre formole di quadratura, cioè di quelle di Eulero (o di Cotes), di Gauss, e di Tchebicheff, e ne fa infine delle interessanti applicazioni numeriche. (P).

E. Carvallo. — *Sur les forces centrales.* Nouvelles Annales de Mathématiques, 1893, pag. 228.

In questa breve nota l'A. applicando la teoria dei vettori, tratta la questione enunciata deducendo dal principio delle aree che l'accelerazione è centrale, e conchiude: « Voilà, parmi tant d'autres, un exemple où la méthode du calcul géometrique peut rendre service à l'enseignement. »

Il passaggio inverso, che è pure assai usato nell'insegnamento, si può esporre come segue.

Siano ρ e φ le coordinate polari d'un punto P del piano. Si avrà

$$P = O + \rho e^{i\varphi} I, \tag{1}$$

ove O è il polo, e I è un vettore, di lunghezza l'unità, diretto secondo l'asse polare. Supposto il punto P mobile, e quindi ρ e φ funzioni del tempo t, derivando la (1) si avrà la velocità

$$P' = (\rho' + \rho \varphi' i) e^{i\varphi} I \tag{2}$$

e, derivando una seconda volta, l'accelerazione

$$P'' = (\rho'' + 2 \rho' \varphi' i - \rho \varphi'^2 + \rho i \varphi'') e^{i\varphi} I \tag{3}$$

Se si vuole che P″ sia parallelo a P — O, cioè a $e^{i\varphi} I$, la quantità entro parentesi dovrà essere reale, e quindi

$$2 \rho' \varphi' + \rho \varphi'' = 0, \tag{4}$$

che integrata dà

$$\rho^2 \varphi' = \text{costante}, \tag{5}$$

che esprime il principio delle aree. Tenendo conto della (4), la (3) diventa:

$$P'' = (\rho'' - \rho \varphi'^2) e^{i\varphi} I. \tag{6}$$

Se si vuole che il valore assoluto di P″ sia una data funzione $f(\rho)$ del raggio vettore, ossia che

$$P'' = f(\rho)\, e^{i\varphi}\, I,$$

dovrà essere

$$\rho'' - \rho\,\varphi'^2 = f(\rho) \qquad (7).$$

Le equazioni differenziali (5) e (7), che non contengono più vettori, si trattano ora come in tutti i libri di meccanica. (P).

I numeri negativi.

Nota di C. Burali-Forti in Torino.

In un recente articolo inserito nei *Nouvelles Annales des mathematiques* (fascicoli di aprile e maggio 1893) il sig. M. Fouché si occupa dell'introduzione dei numeri negativi, facendo uso nelle sue ricerche di un concetto che in sostanza era già stato adoperato dal Prof. F. Castellano ([1]). Avevo dovuto anche io, qualche tempo fa, occuparmi di tale argomento, e ritengo non inutile esporre qui alcune osservazioni che credo possano completare i lavori del sig. Castellano e del sig. Fouché.

Riguardo ai vari modi adoperati per introdurre i numeri negativi mi limiterò ad alcune osservazioni generali.

Si possono introdurre prima i numeri intieri negativi, poi i fratti negativi, poi finalmente i numeri irrazionali negativi. Questo metodo fu già esposto dal sig. G. Peano nelle due note inserite in questa rivista (Vol. 1°, 1891, pag. 87-101 e pag. 256-266). Il numero intero negativo è qui ottenuto invertendo una speciale corrispondenza della quale l'A. si è servito per definire l'operazione $a + b$.

Si possono poi introdurre i numeri reali positivi e negativi considerando, come ha fatto il sig. Bettazzi ([2]) (pag. 89), una corrispondenza metrica in una classe continua a due sensi.

Si introducono, anche, i numeri interi negativi, definendo (così si dice) una nuova unità 1′ (unità negativa) mediante la relazione $1 + 1' = 0$ ([3]).

([1]) *Elementi di Algebra.* Torino, Bocca, 1891.

([2]) *Teoria delle grandezze.* Pisa, E. Spoerri, 1890.

([3]) Bettazzi, l. c., pag. 165 — G. M. Testi. Algebra elementare. Vol. II del *Corso di matematiche.* Livorno, Giusti, 1892 (pag. 16 e seg.) — S. Pincherle. *Analisi algebrica.* Manuali Hoepli, 1893 (pag. 36).

Questa pretesa definizione non ha la forma delle definizioni matematiche; vale a dire non ha nel primo membro il solo segno 1', e nel secondo un complesso di segni avente significato già noto. Di più si potrebbe osservare che qui si tratta di definire due segni, il segno + e il segno 1'.

Finalmente si possono introdurre i numeri negativi reali definendo essi e le operazioni + e $\times$, in modo che sieno soddisfatte le condizioni caratteristiche delle relazioni e operazioni corrispondenti già note per i numeri positivi. Questo è il metodo seguito dai sigg. Castellano e Fouché (l. c.) e che seguirò io pure in questa nota, osservando volta per volta quali sono le condizioni deficienti o sovrabbondanti indicate dai sigg. Castellano e Fouché nei citati lavori.

§ 1. Definizioni [1].

1. $a \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . -a \varepsilon -\mathrm{Q}$
2. $-\mathrm{Q} = \overline{x \varepsilon} (a \varepsilon \mathrm{Q} . x = -a . - =_a \Lambda)$
3. $\mathrm{Q} \cap -\mathrm{Q} = \Lambda$
4. $\mathrm{q} = \mathrm{Q} \cup -\mathrm{Q} \cup \iota 0$

(Def.)

Osservazioni.

[1]. Scriviamo $-\mathrm{Q}$, al posto di *numero reale negativo.*

Per analogia il segno Q, lo leggeremo *numero reale positivo.*

Essendo (P1), a un numero reale positivo, con $-a$ indichiamo un numero reale negativo. Ammettiamo cioè che essendo a un individuo della classe Q, la coppia di segni $-a$ indichi un individuo della classe $-\mathrm{Q}$.

[2]. Ammettiamo che la classe $-\mathrm{Q}$ (P2) sia costituita da individui tali che essendo x uno di questi si possa sempre trovare un individuo a di Q, per il quale si abbia che $x = -a$, cioè che x *è identico* a $-a$. È evidente che tale definizione è necessaria poichè la classe $-\mathrm{Q}$ potrebbe definirsi in modo da contenere tutti gli $\overline{x \varepsilon} (a \varepsilon \mathrm{Q} . x = -a . - =_a \Lambda)$ e altri individui ancora, senza che per questo divenisse assurda la P1.

---

(1) Per le notazioni di cui facciamo uso in questa nota, si veda questa Rivista, vol. III, pag. 1 e seg.; vol. I, pag. 1 e seg.; e le due note già citate del Prof. Peano, anche per ciò che riguarda la teoria generale dei numeri reali.

[3]. Escludiamo che le classi Q e — Q, abbiano individui a comune, ammettiamo cioè che un numero reale non possa essere ad un tempo negativo e positivo.

Le P2 e 3 non sono citate dai sigg. Castellano e Fouché.

[4]. Il segno q si legge *numero reale*. La classe q contiene dunque i numeri positivi, i negativi e lo *zero*.

Dalla P4 si ha

$$(\alpha) \qquad a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset . \, a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \cup a \,\varepsilon\, -\mathrm{Q} \cup a = 0$$

e in questa, a causa della P3, possiamo sostituire al segno $\cup$ (vel) il segno $\circ$ (aut) (vedi Formulario pubblicato dalla *Rivista di Matematica*, I § 3 P24-30) e allora si ha

$$(\beta) \qquad a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset . \, a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \circ a \,\varepsilon\, -\mathrm{Q} \circ a = 0 \,.$$

La P (α), dice che dei tre casi $a \,\varepsilon\, \mathrm{Q}$; $a \,\varepsilon\, -\mathrm{Q}$; $a = 0$, deve verificarsene uno, ma non esclude che possano verificarsene due o tre ad un tempo; la P (β) dice che uno solo dei tre casi deve verificarsi.

§ 2. Eguaglianza.

1. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset : -a = -b \,.=.\, a = b \,.$ (Def.
2. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, a = b \,.\, \supset . \, a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \cup a, b \,\varepsilon\, -\mathrm{Q} \cup a, b \,\varepsilon\, \iota 0 \,.$

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset :$

*3. $a = a$

*4. $a = b \,.=.\, b = a$

*5. $a = b \,.\, b = c \,.\, \supset . \, a = c \,.$

Osservazioni.

[1]. Essendo a un numero reale positivo, possiamo convenire di dire che a è il *valore assoluto* del numero negativo $-a$; allora la P1 può enunciarsi così « Dire che due numeri negativi sono eguali equivale a dire che sono eguali i loro valori assoluti ». Questa definizione è pure stata data dal sig. Fouché; il sig. Castellano non ha definito i numeri negativi eguali, ritenendo compreso il concetto di eguaglianza nel concetto di identità ed ammettendo a priori il principio della sostituzione (l. c., pag. 4, nº 11).

[2]. Dalla proposizione primitiva $u \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, a = b \,.\, b \,\varepsilon\, u \,.\, \supset . \, a \,\varepsilon\, u$ ammessa in generale per le classi (*Formulario* I. § 4 P10), abbiamo

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a = b \,.\, \supset . \, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.$$

Da questa si ha (*Formulario* I. § 2 P1)

$$a, b \,\varepsilon\, q \,.\, a \,\varepsilon\, Q \,.\, b \,-\varepsilon\, Q \,.\, \supset \,.\, a -= b \,.$$

A causa della P4 del § 1, l'insieme delle condizioni $b \,\varepsilon\, q \,.\, b -\varepsilon\, Q$ equivale a $b \,\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0)$; la condizione $a \,\varepsilon\, q$ è contenuta nella condizione $a \,\varepsilon\, Q$; dunque la precedente proposizione può scriversi

$$(\alpha) \qquad a \,\varepsilon\, Q \,.\, b \,\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0) \,.\, \supset \,.\, a -= b \,.$$

Analogamente si ha

$$(\alpha^1) \qquad a \,\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0) \,.\, b \,\varepsilon\, Q \,.\, \supset \,.\, a -= b \,.$$

Da (α) e (α^1), e da *Formulario* I. § 2 P17 si ha la proposizione

$$(\beta) \quad [a \,\varepsilon\, Q \,.\, b \,\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0)] \cup [a \,\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0) \,.\, b \,\varepsilon\, Q] \,.\, \supset \,.\, a -= b \,.$$

Ponendo nel primo membro di questa i valori (P4 . § 1)

$$Q = q \cap -(-Q \cup \iota 0); \; -Q \cup \iota 0 = q \cap -Q$$

abbiamo

$$a, b \,\varepsilon\, q \,.\, [a -\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0) \,.\, b -\varepsilon\, Q] \cup [a -\varepsilon\, Q \,.\, b -\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0)] \,.\, \supset \,.\, a -= b .$$

Da questa, e da *Formulario* I. § 2 P1, 7, 8, si ha

$$a, b \,\varepsilon\, q \,.\, a = b \,.\, \supset \,.\, [a \,\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0) \cup b \,\varepsilon\, Q] \, [a \,\varepsilon\, Q \cup b \,\varepsilon\, (-Q \cup \iota 0)] \,.$$

Sviluppando il prodotto logico delle due somme logiche del secondo membro, ricordando la P3 del § 1 e ricordando che $Q \cap \iota 0 = \Lambda$, abbiamo

$$a, b \,\varepsilon\, q \,.\, a = b \,.\, \supset \,.\, a, b \,\varepsilon\, Q \cup a, b \,\varepsilon\, -Q \cup a, b \,\varepsilon\, \iota 0$$

che è la P2 di questo paragrafo.

La (β) esprime che « se i numeri a e b sono l'uno positivo, e l'altro negativo o nullo, allora a non è uguale a b » e per dimostrare tale proposizione è necessaria la P3 del § 1.

La P2 esprime invece che « se due numeri sono eguali, allora essi sono entrambi positivi, o entrambi negativi o entrambi nulli » e per dimostrare tale proposizione è necessaria la P3 del § 1.

La P2 non è stata enunciata dal sig. Fouché, sebbene di essa si serva implicitamente quando dice (l. c., pag. 171) che « L'égalité ainsi définie des nombres algébriques jouit évidemment de la propriété fondamentale ». Infatti per dimostrare le P4 e 5 di questa nota occorre considerare i tre casi $a, b \,\varepsilon\, Q$; $a, b \,\varepsilon\, -Q$; $a, b \,\varepsilon\, \iota 0$, e la P2 (unitamente alla β) dimostra che non vi sono altri casi da considerare.

[3. 4. 5.] Le P3, 4, 5 segnate con asterisco sono le proprietà carat-

teristiche dell'eguaglianza. Il sig. Fouché ritiene la sola P5 (enunciata però così: $a = c \,.\, b = c \,.\, \supset \,.\, a = b$) come caratteristica dell'eguaglianza. Essa però non è sufficiente [1].

§ 3. Somma.

$$
\left.\begin{array}{ll}
1. & a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset \,.\, (-a) + (-b) = -(a+b) \\
2. & \qquad a \geqq b \,.\, \supset \,.\, a + (-b) = a - b \\
3. & \qquad a < b \,.\, \supset \,. \qquad\qquad\; = -(b-a) \\
4. & \qquad a \leqq b \,.\, \supset \,.\, (-a) + b = b - a \\
5. & \qquad a > b \,.\, \supset \,. \qquad\qquad\; = -(a-b) \\
6. & a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, a + 0 = 0 + a = a
\end{array}\right\} \text{(Def.)}
$$

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset :$

*7. $a + b \,\varepsilon\, \mathrm{q}$

*8. $a = b \,.\, \supset \,.\, a + c = b + c$

*9. $a + b = b + a$

*10. $a + (b + c) = (a + b) + c$

*11. $a \,\varepsilon\, (b + \mathrm{q})$

*12. $a - \varepsilon\, (a + (\mathrm{q} \cap - \iota 0))$

Osservazioni.

[1. 2. 3. 4. 5. 6.] Essendo a, b numeri reali chiameremo *somma* di a con b, ciò che è indicato dal complesso dei segni $a + b$. Contenendo la classe q le classi Q, — Q e lo zero, dovremo definire

la somma di un numero negativo con uno negativo (P1)
» » » positivo » » (P2, 3)
» » » negativo » positivo (P4, 5)

la somma di un numero reale con zero e di zero con un numero reale (P6).

Le P1-6 sono vere definizioni poichè il complesso dei segni $a + b$ non aveva precedentemente ricevuto significato.

Le medesime definizioni sono date dal sig. Fouché (l. c. pag. 171). Il sig. Castellano aggiunge la definizione $a + (-(b + c)) = (a + (-b)) + (-c)$ che è conseguenza delle precedenti (P10).

[7. 8. 9. 10.] Le P7-10, segnate con asterisco, danno le proprietà caratteristiche della somma e si dimostrano facilmente (vedi p. e. Fouché

---

[1] Vedi questa Rivista, vol. II, pag. 113 (E. De-Amicis). Pag. 161 (Vailati).

l. c.). Il sig. Fouché dà come proprietà caratteristiche della somma le seguenti

$$(1)\quad a + 0 = a$$
$$(2)\quad a + b = b + a$$
$$(3)\quad a + b + c = a + c + b \qquad \text{(l. c. pag. 169)}$$

ove $a + b + c$ deve ritenersi identico ad $(a + b) + c$. Ora queste condizioni non sono sufficienti, poichè da esse *solamente* non può dedursi la proprietà *associativa* della somma cioè la nostra P10. Infatti: siano ancora a, b, c, individui di q; chiamiamo eguali due individui di q quando hanno egual valore assoluto (p. e. $3 = 3$, $3 = -3$, $-3 = -3$); e l'operazione $+$ sia l'ordinaria sottrazione. In tale ipotesi, le condizioni dell'eguaglianza sono verificate, le P (1), (2), (3) del sig. Fouché sono vere, ma la P10 non è vera (p. es. $3 - (7 - 5) -= (3 - 7) - 5$). Ciò avviene perchè per dedurre la P10 dalle (1), (2), (3) del sig. Fouché occorre far uso della P8 che nelle ipotesi da noi fatte non è vera (infatti p. e. $-3 = 3$ e si dovrebbe avere che $-3 - 7 = 3 - 7$, cioè $-10 = -4$, che è assurdo) (1).

[11. 12.] Definendo i segni $>$ e $<$ come si è già fatto per i numeri reali positivi

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset : a > b \,. = .\, a \,\varepsilon\, b + \mathrm{Q}$$
$$.\, \supset : a < b \,. = .\, b > a$$

allora la P11 può scriversi

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, a = b \cup a > b \cup a < b \,.$$

Senza entrare in troppi particolari per ciò che riguarda le P7-12 rimando il lettore alla mia nota « Sulla teoria delle grandezze » inserita in questa Rivista (vol. III pag. 76) e alla parte IV del formulario.

§ 4. Differenza.

1. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, a - b = \mathrm{q} \cap \overline{x \,\varepsilon}\, (a = b + x)$ (Def.)
2. $.\, \supset .\, a - b \,\varepsilon\, \mathrm{q}$
3. $a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, 0 - (-a) = a$

---

(1) Se restando fisse le prime due ipotesi ora fatte supponiamo che l'operazione $+$ sia l'ordinaria addizione in luogo della sottrazione, allora le P9 e 10 sono vere ed è falsa la P8 e quindi questa non è conseguenza della proprietà commutativa ed associativa della somma. Il sig. S. Pincherle (l. c., pag. 22) ammette come proprietà caratteristiche della somma le P7, 9, 10: l'osservazione ora fatta prova che anche queste non sono sufficienti.

4. $a \varepsilon Q . \supset . -(-a) = a$ (Def.)
5. $-(-Q) = Q$
6. $-q = q$.

Osservazioni.

[1]. Con $a - b$ indichiamo la differenza fra a e b, e ammettiamo (P1) che essa sia la classe dei numeri reali x tali che $a = b + x$.

[2]. Si dimostra facilmente che la differenza di due numeri reali è un numero reale.

[3]. Ogni numero positivo a può essere considerato come la differenza fra 0 e il numero negativo $-a$.

Conveniamo allora di indicare con $-(-a)$ il numero positivo a. Diamo così un significato al complesso dei segni $-a$ quando a è un numero reale qualunque.

[5. 6]. Se a è un numero reale, $-a$ indica un numero reale negativo se a è positivo; indica il valore assoluto di a se a è negativo.

Con le definizioni date fin qui, l'algoritmo algebrico riguardante le operazioni $+$ e $-$ è completamente stabilito.

§ 5. Prodotto.

1. $a, b \varepsilon Q . \supset . (-a)(-b) = ab$
2. $. \supset . a(-b) = -(ab)$
3. $. \supset . (-a)b = -(ab)$
4. $a \varepsilon q . \supset . a \times 0 = 0 \times a = 0$

(Def.) [1–4]

$a, b, c \varepsilon q . \supset :$

*5. $ab \varepsilon q$
*6. $a = b . \supset . ac = bc$
*7. $ab = ba$
*8. $a(bc) = (ab)c$
*9. $(a + b)c = ac + bc$

$a \varepsilon (q \frown - \iota 0) . \supset :$

10. $/a = q \frown \overline{x \varepsilon} (ax = 1)$ (Def.)
11. $/a \varepsilon (q \frown - \iota 0)$

$a \varepsilon q . b \varepsilon (q \frown - \iota 0) . \supset :$

12. $(-a)/(-b) = a/b$
13. $a/(-b) = -(a/b)$
14. $(-a)/b = -(a/b)$

Osservazioni.

Essendo a, b numeri reali, chiamiamo *prodotto* di a per b ciò che è indicato dal complesso di segni $a \times b$ ossia ab.

Per le P1-4 possono ripetersi le osservazioni già fatte per la somma.

Le P5-9 insieme alla P4 dànno le proprietà caratteristiche del prodotto. Anche in questo caso quelle date dal sig. Fouché (l. c. p. 170) non sono sufficienti e ciò si dimostra come si è già fatto per la somma.

Con la P10 definiamo il reciproco di un numero reale diverso da zero.

Le P1-3, 12-14 esprimono le note regole dei segni dei prodotti e dei quozienti (1).

Arezzo, agosto 1893. Burali-Forti Cesare.

---

(1) Era già composto questo articolo quando ebbi occasione di leggere nei *Nouvelles Annales* (l. c., fascicolo di giugno) l'articolo del sig. L. Lévy « Quelques observations..... pag. 225 » riguardanti l'articolo già da me citato ed esaminato del sig. Fouché. Credo conveniente fare qualche osservazione anche sull'articolo del sig. Lévy.

1° Egli dice (l. c., pag. 227) che crede *preferibile* sostituire alla proposizione (3) (questa nota § 3) del sig. Fouché, l'ordinaria proprietà associativa (P10, § 2); ed aggiunge «..... qui lui *équivaut* d'ailleurs ». Se le proposizioni a e b si chiamano equivalenti quando da a si deduce b e da b si deduce a, ciò che dice il sig. Lévy non è esatto, come ho dimostrato nel § 2.

2° Egli dice (l. c., pag. 227) « Enfin il est *nécessaire*, pour définire..... la soustraction, de dire: si $a+b=a+b'$, il en résulte $b=b'$ ». Nella mia nota « Sulla teoria delle Grandezze » (l. c., pag. 86) ho dimostrato che la proposizione enunciata dal sig. Lévy è conseguenza delle P7, 8, 9, 10, 11, 12 di questa nota, e di più che è conseguenza *necessaria* della P12. Ciò che dice, dunque, il sig. Lévy è *necessario* solo quando le proprietà ammesse per i numeri positivi verifichino solo le P7-11.

3° Nell'ultima parte della sua nota, intitolata « Définition des quantités négatives ou positives », il sig. Lévy definisce il numero negativo $-a$ dicendo che esso è il binomio $0-a$. Ora il complesso di segni $0-a$, per a diverso da zero, non può aver ricevuto un significato nella teoria dei numeri positivi, e quindi esso stesso, non che definire i numeri negativi, ha bisogno di esser definito. Le relazioni che dice quindi (pag. 228) *esser facile di verificare*, sono altrettante definizioni vere e proprie, nelle quali manca, per la 2ª e 3ª, la condizione $a \geqq b$.

(Torino, ottobre 1893).

Sull'equazione di 3° grado

di F. Giudice.

Equazione differenziale soddisfatta dalle radici d'un'equazione algebrica. Siano funzioni d'una stessa variabile i coefficienti dell'equazione

1) $$y^n + f_2 y^{n-2} + f_3 y^{n-3} + \dots + f_{n-1} y + f_n = 0$$

che supporremo generale, od almeno tale che siano linearmente indipendenti $n-1$ delle sue n radici $y_1, y_2, \cdots, y_n$: sarà per ciò diverso da zero il determinante

$$D = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_{n-1} \\ y''_1 & y''_2 & \cdots & y''_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Invece il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ y' & y'_1 & \cdots & y'_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

s'annulla per aver due verticali identiche, se y ha uno dei valori $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$, e si annulla anche se è $y = y_n$ per essere $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$. Ora è:

$$\Delta . D = \begin{vmatrix} y & y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y' & y'_1 & \cdots & y'_{n-1} & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n-1)} & y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & y'_1 & \cdots & y'_{n-1} & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

S'eseguisca questo prodotto per orizzontali e nel risultato, che oltre la variabile y e sue derivate conterrà soltanto funzioni simmetriche di tutte le radici ed y_n, si ponga y in luogo di y_n, indicando y_n una qualsiasi delle n radici: poi dagli elementi dell'ultima verticale si tolgano gli omologhi della prima. Si riconoscerà così che tutte le radici della 1) soddisfano l'equazione differenziale

$$2)\quad \begin{vmatrix} y & s_{0,1} & \cdots & s_{0,n-2} & s_{0,n-1} \\ y' & s_{1,1} & \cdots & s_{1,n-2} & s_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{n-2)} & s_{n-2,1} & \cdots & s_{n-2,n-2} & s_{n-2,n-1} \\ y^{(n-1)} & s_{n-1,1} & \cdots & s_{n-1,n-2} & s_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0$$

dove s'è fatto

$$s_{\mu,\nu} = y_1^{(\mu)} y_1^{(\nu)} + y_2^{(\mu)} y_2^{(\nu)} + \ldots + y_n^{(\mu)} y_n^{(\nu)}.$$

Adunque: *Le radici d'un'equazione algebrica di grado n, se $n-1$ d'esse siano linearmente indipendenti, soddisfano un'equazione differenziale lineare omogenea dell'ordine $n-1$, i coefficienti della quale sono formati con quelli dell'equazione algebrica e derivate dei medesimi.*

Si conoscono teoremi che possono facilitare il calcolo dei coefficienti della 2): per essa s'è riconosciuto che certe classi d'equazioni algebriche sono risolubili per serie ipergeometriche. Mediante tali serie furono anche risolte le equazioni generali di 5° e 6° grado (*); ma ciò senza utile pratico perchè s'è supposto che tali equazioni siano prima semplificate mediante la trasformazione di Bring. Noi ora ci occuperemo dell'equazione cubica: e, per procedere nel modo più elementare possibile, calcoleremo direttamente la relativa equazione differenziale e ne dedurremo, col metodo dei coefficienti indeterminati, gli sviluppi in serie delle tre radici, i quali si potranno utilizzare anche in pratica.

Equazione cubica. Se nell'equazione cubica, generale,

$$3)\qquad y^3 + 3\,\mathrm{H}\,y + x = 0$$

si considera H come costante ed x come variabile indipendente, derivando s'ottiene

$$3\,(y^2 + \mathrm{H})\,y' + 1 = 0$$

Moltiplicando per y ed eliminando y^3 per mezzo della 3), s'ottiene

$$6\,\mathrm{H}\,yy' = y - 3\,xy'$$

Moltiplicando per y' l'equazione che s'ottiene derivando un'altra volta la penultima, e semplificando il prodotto per mezzo della stessa penultima, s'ottiene

$$y'' = 6\,yy'^3\,.$$

Eliminando y dalla 3) per mezzo della penultima equazione, s'ottiene:

$$27\,(x^2 + 4\,\mathrm{H}^3)\,y'^3 - 9\,\mathrm{H}\,y' + 1 = 0\,.$$

(*) V. p. es. D. Besso: Sull'equazione del quinto grado. R. Acc. dei Lincei: 1883-84.

Moltiplicando questa per $2y$ e sostituendovi poi i valori dati dalle precedenti per $6 H y y'$ ed y'', si ottiene:

4) $$9(x^2 + 4 H^3) y'' + 9 x y' - y = 0 .$$

Questa è l'equazione differenziale, che è soddisfatta dalle radici della 3).

Pongasi ora

5) $$y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$$

Determiniamo i coefficienti k_n col metodo dei coefficienti indeterminati, e mediante la 4): i risultati a cui perverremo saranno valevoli, se per gli ottenuti valori convergerà assolutamente la serie $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$.

L'applicazione della 4) alla 5) dà:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} [36 H^3 (n+2)(n+1) k_{n+2} + (9 n^2 - 1) k_n] x^n = 0$$

per cui deve essere

6) $$\frac{k_{n+2}}{k_n} = - \frac{9 n^2 - 1}{36 H^3 (n+1)(n+2)}$$

Da questa se è mod $4 H^3 \gtrless x^2$, si deduce

$$\lim_{n=\infty} \frac{k_n x^n}{k_{n+2} x^{n+2}} = - \frac{4 H^3}{x^2}$$

e se è mod $4 H^3 = x^2$, si deduce

$$\lim_{n=\infty} n \left(\text{mod} \frac{k_n x_n}{k_{n+2} x^{n+2}} - 1 \right) = 3 .$$

La penultima relazione mostra che la serie $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$ è assolutamente convergente se è mod $4 H^3 > x^2$ ed è divergente se è mod $4 H^3 < x^2$: l'ultima poi mostra che la serie è assolutamente convergente anche se è mod $4 H^3 = x^2$. Lo sviluppo 5) è dunque certamente valevole se la 3) è nel *casus irreductibilis*.

I coefficienti k_n debbono soddisfare alla 6), la quale dà

$$k_{2n+2} = \frac{(1-36)(1-36 \cdot 4) \dots (1 - 36 n^2)}{(2n+2)!} \cdot \frac{k_0}{(36 H^3)^{n+1}}$$

$$k_{2n+1} = \binom{3n}{n} \cdot \frac{(-1)^n k_1}{(2n+1)(27 H^3)^n}$$

e, per una nota proprietà dei coefficienti binomiali, che comunemente è data per numeri interi, ma è valevole per numeri qualsiansi (*), è ancora

(*) V. p. es. G. Novi: Analisi algebrica: Firenze 1863: pag. 145. R. Baltzer: Algebra tradotta da L. Cremona: Genova 1875: pag. 120.

$$k_{2n+2} = \frac{\binom{n+\frac{1}{6}}{2n+2}}{1-6(n+1)} \cdot \frac{k_0}{H^{3n+3}} .$$

Inoltre la 3) dà immediatamente

$$k_0 = (y)_{x=0} = -\sqrt{-3\,H}\,, 0\,, \sqrt{-3\,H}$$

e la prima derivata della 3) dà:

$$k_1 = (y')_{x=0} = \frac{1}{6\,H}\,, -\frac{1}{3\,H}\,, \frac{1}{6\,H} .$$

Indicando con y_1, y_2 ed y_3 le radici della 3), se sia mod $4\,H^3 \geqq x^2$, sarà quindi

$$7)\begin{cases} y_1 = -\sqrt{-3\,H}\,.\left[1+\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\frac{\binom{n+\frac{1}{6}}{2\,n+2}}{1-6(n+1)}\left(\frac{x^2}{H^3}\right)^{n+1}\right]-\frac{y_2}{2}\,. \\ y_2 = \frac{-x}{3\,H}\left[1+\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}\frac{\binom{3\,n}{n}}{2\,n+1}\cdot\left(\frac{-x^2}{27\,H^3}\right)^{n}\right]. \\ y_3 = -y_1 - y_2\,. \end{cases}$$

Genova, Ottobre 1893.

A. GARBASSO

La teoria di Maxwell dell'elettricità e della luce.

(Conferenze fatte all'Università di Torino).

Le idee più recenti sulla teoria dell'elettricità e del magnetismo, che tolgono origine dalle esperienze e dalle vedute teoriche di Faraday hanno già trovato parecchi espositori.

Senza parlare dei lavori originali di Maxwell (1) e di Helmholtz (2), fatti necessariamente senza preoccupazione didattica, nè dei trattati del

(1) J. C. MAXWELL, *A treatise on electricity and magnetism* (Oxford, Clarendon Press, 1873, 2 vol.).

(2) H. HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* (Borchardt's Journal, LXXII, 57. Wiss. Abh. I, 545).

Tumlirz [1] e del Poincaré [2], che il primo è plasmato sulla memoria d'Helmholtz « Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper », e il secondo cade in quello stesso peccato di molteplicità che è stato rimproverato tante volte alla grande opera del Maxwell: abbiamo tre esposizioni complete della teoria e sono quelle di Hertz [3], di Cohn [4] e di Boltzmann [5].

Vi è fra i lavori dei primi due e quello del terzo una differenza capitale.

Hertz e Cohn hanno assunto, per definizione, l'espressione dell'energia e le equazioni del campo elettro-magnetico, deducendone con definizioni e convenzioni opportune le altre leggi note; la legge di Coulomb, per esempio, la legge di Biot e Savart e così via.

Boltzmann invece si è tenuto più stretto al testo di Maxwell, movendo come ha fatto dalle equazioni di Lagrange e dalle proprietà dei policicli.

Ora mi sembra incontestabile che se le equazioni del campo, tanto più nella forma loro data da Hertz, sono di una grande semplicità e di una chiarezza grande per chi conosce già la teoria ed è abituato ad intendere il linguaggio particolare delle formole, esse non presentino gli stessi caratteri per un principiante: quindi pare che, quantunque la teoria nella forma datale da Cohn e particolarmente da Hertz costituisca un edifizio logico di grande bellezza, non sia punto conveniente di metterla così senz'altro nelle mani di chi cerca di formarsi per la prima volta un concetto delle idee del Maxwell.

Resta il procedimento seguìto dal Boltzmann, ma anche per questo è necessaria nel discente una coltura matematica più che mediocre e una certa facoltà d'astrazione.

È vero che, abbandonando le equazioni di Lagrange si viene a trascurare quello che è parso ad alcuno *il nocciolo proprio* [6] della teoria del Maxwell, ma è permesso di dubitare della verità di questa

---

[1] O. Tumlirz, *Die elektromagnetische Theorie des Lichtes* (Leipzig, B. G. Teubner, 1883).

[2] H. Poincaré, *Electricité et optique* (Paris, G. Carré, 1890-91, 2 vol.).

[3] H. Hertz, *Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper* (Wied. Ann. XL, p. 577). — H. Hertz, *Ueber d. G. d. E. f. bewegte Körper* (Wied. Ann. xli, p. 369).

[4] E. Cohn, *Zur Systematik der Elektricitätslehre* (Wied. Ann. XL, p. 625).

[5] L. Boltzmann, *Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes* [I u. II Theil.] (Leipzig, J. A. Barth, 1891-93).

[6] H. Ebert, *Versuch einer Erweiterung der Maxwell'schen Theorie* (Wied. Ann. XLVIII, p. 1).

affermazione, anzi se si pensa che l'essenziale non può essere una questione di metodo ma di risultato, si è piuttosto inclinati ad accogliere quell'altra sentenza che « la teoria del Maxwell è il sistema delle equazioni di Maxwell » (1).

Un'altra ragione ancora mi ha consigliato ad abbandonare l'esposizione del Boltzmann: mi sembra che la teoria del Maxwell non presenti quel suo carattere di suggestività se non quando la si vede innestata sul tronco delle teorie classiche dell'elettricità; quando in una parola si presenta non come una innovazione, ma come un compimento. È solo allora che, secondo la bella immagine di Hertz, essa appare come « una arcata gigantesca gettata attraverso l'ignoto per riunire due verità conosciute » (2).

In conseguenza mi sono proposto di dedurre le equazioni di Hertz dalle leggi fondamentali dell'elettricità e del magnetismo, e di far vedere come esse prevedano una perturbazione dotata di tutte quelle proprietà geometriche e meccaniche che spettano a quel moto che costituisce la luce.

In ciò che segue riassumo le quattro conferenze che ho tenuto su questo argomento all'Università di Torino, nella Scuola di Magistero diretta dal chiar.mo prof. Naccari.

§ 1.

Le leggi sperimentali dell'elettricità e del magnetismo, a cui dovremo ricorrere, sono le seguenti:

1) La legge di Coulomb secondo la quale la forza che s'esercita sopra un piccolo corpo elettrizzato vicinissimo ad un conduttore è proporzionale alla densità della carica sul conduttore medesimo,

2) La legge di Coulomb, per il caso delle attrazioni e repulsioni elettro-statiche:

[1] $$f = \frac{ee'}{\varepsilon r^2},$$

3) La legge di Coulomb, per il caso delle attrazioni e repulsioni magnetiche:

[2] $$\varphi = \frac{mm'}{\mu r^2},$$

---

(1) H. Hertz, *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft*, I, 23 (Leipzig, J. A. Barth, 1892).

(2) H. Hertz, *Ueber die Beziehungen zwischen Licht und Elektricität*, p. 14 (Bonn, E. Strauss, 1889).

4) La legge di Biot e Savart:

[3] $$F = \frac{2Aim}{r}.$$

In queste equazioni le quantità e ed i sono date in misura elettrostatica, le quantità m in misura elettro-magnetica.

ε e μ sono due numeri che dipendono dalla natura del mezzo (per noi dielettrico, isotropo ed omogeneo) in cui si studiano i fenomeni.

Per convenzione ε è uguale ad uno per quel mezzo in cui si suppone fatta la determinazione dell'unità elettro-statica di quantità di elettricità.

Parimenti μ è uguale ad uno per quel mezzo in cui si suppone fatta la determinazione dell'unità elettro-magnetica di quantità di magnetismo.

Per noi il mezzo in cui si verificano le condizioni

$$\varepsilon = \mu = 1,$$

è il vuoto o, come si suol dire, l'etere libero.

Ad ε si dà il nome di *costante dielettrica*, a μ quello di *costante magnetica*.

La quantità A è « il rapporto fra l'unità elettro-statica e l'unità elettro-magnetica di quantità di elettricità ».

La teoria indica che le dimensioni di A sono $L^{-1}T$, vale a dire che A è il reciproco di una velocità.

Quanto ai valori particolari di ε e μ nei differenti mezzi e alla grandezza di A l'esperienza dimostra che:

a) Per i mezzi veramente dielettrici ε è uguale al quadrato dell'indice di rifrazione per un raggio luminoso di lunghezza d'onda infinita.

b) Per la maggior parte dei mezzi trasparenti μ è sensibilmente uguale all'unità.

c) A è molto prossimamente uguale al reciproco della velocità della luce nel vuoto. Per quest'ultima velocità Cornu e Foucault hanno trovato rispettivamente $300,4 \,.\, 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ e $298,2 \,.\, 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, cioè in media

$$299,3 \,.\, 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

Del rapporto 1 : A citerò solo la determinazione più recente, quella di Abraham (1), che ha dato

(1) H. Abraham, *Sur une nouvelle détermination du rapport* v *entre les unités* C.G.S *électromagnétiques et électrostatiques.* [Ann. de ch. et de phys. (6), XXVII, 433, 1892].

$$1 : A = 299 , 2 . 10^8 \frac{cm}{sec}$$

Se la luce si considera come un fenomeno di indole elastica i fatti indicati alle lettere *a*) e *c*) appaiono come concordanze casuali, inesplicabili: nella teoria elettro-magnetica della luce sono una conseguenza necessaria delle ipotesi fondamentali.

§ 2.

Forza elettrica (in misura elettro-statica) in un dato punto di un mezzo è la forza che si eserciterebbe in quel punto sopra un piccolo corpo recante l'unità elettrostatica di elettricità positiva.

Le sue dimensioni sono $M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$.

L'esperienza mostra che l'esistenza di una forza elettrica in un punto dello spazio implica l'esistenza di una forza elettrica in ogni punto circostante.

Forza magnetica (in misura elettro-magnetica) in un dato punto di un mezzo è la forza che si eserciterebbe in quel punto sopra un piccolo corpo recante l'unità elettro-magnetica di magnetismo nord.

Le sue dimensioni sono $M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$.

L'esperienza mostra che l'esistenza di una forza magnetica in un punto dello spazio implica l'esistenza di una forza magnetica in ogni punto circostante.

L'esperienza dimostra altresì che, in generale l'esistenza in un dato punto di una forza elettrica importa l'esistenza nello stesso punto di una forza magnetica.

Campo elettro-magnetico è uno spazio in ogni punto del quale esistono forze elettriche e magnetiche.

La teoria del Maxwell si propone di trovare le equazioni che legano la forza elettrica alla magnetica per un punto qualunque di un campo elettro-magnetico.

Indicherò sempre la forza elettrica con $\mathfrak{E}$, le sue componenti con X . Y . Z; similmente indichèro con $\mathfrak{M}$ la forza magnetica, con L . M . N le sue componenti.

§ 3.

Si sa, ed è una nozione che risale al Mossotti, che è possibile rendere conto del modo di comportarsi dei coibenti sottoposti alle azioni elettriche quando si considerino come costituiti da piccole masse conduttrici separate da tramezzi sottilissimi perfettamente isolanti.

In un coibente sottoposto a perturbazioni elettriche le particelle con-

duttrici di cui risulta sono tutte cariche, in ciascuna cioè si trovano due quantità uguali di elettricità positiva e negativa risultanti dalla decomposizione parziale del fluido neutro; si esprime questo dicendo che il dielettrico è *polarizzato.*

Da questo punto di vista i coibenti e i conduttori differiscono solo in ciò che, in questi ultimi anche i tramezzi sono di sostanza conduttrice: quindi la polarizzazione non può sussistere nell'interno, ma si ha una carica soltanto alla superficie.

È evidente che il comportamento di un coibente rimane lo stesso qualunque sia la legge con cui si immaginano condotti i tramezzi isolanti nella massa conduttrice: siccome nel seguito riferiremo il mezzo in cui studiamo i fenomeni a tre assi ortogonali $x \,.\, y \,.\, z$ (1), supporremo sempre, per semplicità di calcolo, che il dielettrico risulti di tante cellette infinitamente piccole, parallelepipede, con gli spigoli secondo gli assi coordinati.

Consideriamo la celletta di coordinate $x \,.\, y \,.\, z$, al tempo t sopra una delle faccie normali all'asse x vi sarà una quantità di elettricità positiva

$$f\, dy\, dz\,,$$

sull'altra una quantità d'elettricità negativa

$$-f\, dy\, dz\,,$$

f è appunto ciò che si chiama la « *componente della polarizzazione dielettrica, secondo* x *e per il tempo* t, *nel punto* $x \,.\, y \,.\, z$ ».

Similmente si definiscono due grandezze g ed h relative agli assi y e z.

Quanto alla relazione che fa dipendere la forza dalla polarizzazione in seno dielettrico segue da una osservazione fatta più su che deve essere quella stessa che lega la forza alla densità alla superficie del conduttore, vale a dire una relazione di proporzionalità.

Il coefficiente di proporzionalità poi basta determinarlo in un caso particolare, e noi scegliamo quello di una sfera conduttrice, isolata, lontana da ogni altro conduttore, immersa in un coibente la cui costante dielettrica è ε, avente raggio r e una carica totale e.

In tale caso la densità, δ è determinata dalla condizione

[1] $$4\,\pi\, r^2\, \delta = e\,,$$

e la forza è data da

---

(1) Gli assi sono diretti in modo tale che un osservatore coi piedi nell'origine e il capo sopra la parte positiva dell'asse z abbia alla destra la parte positiva dell'asse y, quando guarda verso la parte positiva dell'asse x.

[2] $$\boldsymbol{E}=\frac{e}{\varepsilon\, r^2},$$

eliminando e fra [1] e [2] s'ottiene:

[3] $$\delta=\frac{\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}.$$

Secondo quanto precede, tenendo conto della [3] bisognerà scrivere:

[4] $$\begin{cases} f=\dfrac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{X}, \\ g=\dfrac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{Y}, \\ h=\dfrac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{Z}. \end{cases}$$

La somiglianza dei fenomeni del magnetismo con quelli dell'elettricità statica, somiglianza che ha la sua ragione nell'identità di forma della legge fondamentale, porta a definire, conformemente alle $f.g.h$ tre quantità $\alpha.\beta.\gamma$ come « *componenti della polarizzazione magnetica* ».

Di più si ammette che sia:

[5] $$\begin{cases} \alpha=\dfrac{\mu}{4\pi}\mathrm{L}, \\ \beta=\dfrac{\mu}{4\pi}\mathrm{M}, \\ \gamma=\dfrac{\mu}{4\pi}\mathrm{N}. \end{cases}$$

Le equazioni [4] e [5] si possono riguardare come rappresentanti la prima ipotesi della teoria del Maxwell.

§ 1.

Le quantità $f.g.h$ si debbono considerare come funzioni del tempo; producendosi delle nuove decomposizioni di fluido neutro nell'elemento $x.y.z$ le elettricità libere che ne risultano continueranno ad accumularsi sulle faccie, così p. e. la quantità $f\,dy\,dz$ di elettricità positiva che stava nell'istante t su una delle faccie normali ad x, alla fine del tempo $t+dt$ sarà divenuta:

$$[f+\frac{\partial f}{\partial t}dt]\,dy\,dz\,;$$

$\dfrac{\partial f}{\partial t}$ è dunque « la quantità di elettricità positiva che passa nell'unità di tempo attraverso a una sezione di area uno, normale nel punto $x.y.z$ all'asse delle x ».

Significati analoghi hanno $\frac{\partial g}{\partial t}$ e $\frac{\partial h}{\partial t}$.

Porremo:

$$[1] \quad \begin{cases} u = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}, \\ v = \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial Y}{\partial t}, \\ w = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial Z}{\partial t}, \end{cases}$$

e diremo che $u . v . w$ sono « *le componenti della corrente di polarizzazione dielettrica al tempo t nel punto x . y . z* ».

Le correnti la cui azione magnetica si rappresenta con la legge di Biot e Savart si intende che siano lineari cioè tali che le dimensioni trasversali dei conduttori che le trasmettono siano piccolissime rispetto alle altre lunghezze che si hanno a considerare nel fenomeno.

Quando non fosse così si potrebbe sempre intendere la sezione del conduttore divisa in elementi, quindi la corrente in altrettante correnti elementari: ad ognuna di queste la legge di Biot e Savart sarebbe applicabile.

Intesa la legge fondamentale dell'elettro-magnetismo in questo modo la seconda ipotesi della teoria di Maxwell si può enunciare così « ammettiamo che le correnti di polarizzazione dielettrica diano origine a forze magnetiche, rette dalla legge di Biot e Savart ».

In un piano sia tracciato un contorno chiuso e su esso si immagini che possa muoversi l'unità elettromagnetica di magnetismo nord; di più una corrente di intensità i traversi normalmente il piano stesso: produrrà in ogni punto del contorno una forza magnetica.

Si faccia descrivere all'unità di magnetismo l'intero contorno, segue immediatamente dalla legge di Biot e Savart che:

« il lavoro compiuto in tale movimento dalla forza magnetica è nullo se la corrente taglia il piano fuori dell'area racchiusa dal contorno; è uguale a $4\pi A i$ nel caso contrario purchè il moto segna nel senso stesso in cui la forza magnetica tenderebbe a spostare l'unità di magnetismo ».

Di più è evidente che:

« è sempre nullo il lavoro della forza magnetica dovuta a una corrente quando l'unità di magnetismo si muove in un modo qualunque in un piano che contiene la corrente ».

Ciò posto per il punto P $(x . y . z)$ del mezzo dielettrico si conducano tre assi $\xi \eta \zeta$ paralleli a quelli delle coordinate, nel piano $\xi \eta$ si descriva un rettangolo elementare ABCD con l'intersezione delle diagonali in

P, i lati secondo ξ ed η, di lunghezze dx e dy. Le lettere A . B . C . D sono distribuite in modo che si incontrano nell'ordine alfabetico seguendo il contorno secondo il senso in cui trasporterebbe su esso un polo magnetico nord una corrente diretta secondo le ζ positive; la direzione del lato AB è quella delle ξ positive. In ogni punto del contorno ABCD esiste una forza magnetica dovuta alle correnti di polarizzazione e di conduzione [1] che sono nel campo: ora queste correnti sono di quattro specie:

α) le correnti parallele al piano $\xi\,\eta$ ma fuori di esso;

β) le correnti che sono nel piano $\xi\,\eta$;

γ) le correnti normali al piano $\xi\,\eta$, che lo tagliano fuori del contorno ABCD;

δ) la corrente (di polarizzazione) normale al piano $\xi\,\eta$ che passa entro ABCD.

Ne segue che la forza magnetica totale si può considerare come la risultante di quattro, il lavoro della risultante sarà la somma dei lavori delle componenti.

Ora il lavoro delle forze dovute alle correnti α e γ è nullo per il primo dei teoremi ricordati dianzi; parimenti è nullo il lavoro della forza dovuta alle correnti β per il terzo teorema; dunque: « facendo descrivere all'unità di magnetismo l'intero contorno ABCD il lavoro della forza magnetica totale risulta in definitiva uguale a quello che compirebbe da sola la forza dovuta alla corrente di polarizzazione che traversa l'elemento ABCD ».

Questa corrente ha l'intensità $w\,dx\,dy$, dunque (se si muove l'unità di magnetismo nel senso A.B.C.D) il lavoro della forza magnetica nell'intera rivoluzione è

$$4\,\pi\,\mathrm{A}\,w\,dx\,dy.$$

Del medesimo lavoro possiamo dare un'espressione in funzione delle componenti della forza magnetica totale.

Lungo il tratto BC lavora la sola componente che è secondo y, di grandezza

$$\mathrm{M}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\frac{dx}{2},$$

il lavoro è dunque:

$$-\left(\mathrm{M}+\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy$$

Similmente il lavoro lungo CD è:

---

[1] Escludiamo ora ed in seguito la presenza nel campo di calamite permanenti.

$$-\left(L - \frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx ,$$

lungo DA:

$$\left(M - \frac{\partial M}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy ,$$

lungo AB:

$$\left(L + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dx ,$$

e però il lavoro totale è:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) dx\, dy .$$

Uguagliando questo valore del lavoro a quello trovato prima si ottiene:

$$4\pi A w = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} .$$

Ma per le equazioni [1] § 4.

$$w = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} ,$$

dunque:

$$A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} .$$

Ripetendo le stesse considerazioni per elementi posti nei piani $\eta\zeta$ e $\zeta\xi$ si otterrebbero due equazioni analoghe: le diamo qui sotto, riscrivendo quella testè ottenuta:

[2]
$$\left\{\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} , \\ A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial 2} , \\ A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} . \end{aligned}\right.$$

§ 5.

Perchè in uno spazio preventivamente in quiete si producano delle polarizzazioni dielettriche e magnetiche è necessario che le forze elettriche e magnetiche, qualunque sia la loro origine, compiano un certo lavoro, all'elemento di questo lavoro corrisponderà un incremento (1) infinitamente piccolo dell'energia potenziale del campo.

---

(1) Un vero incremento (positivo) trattandosi di forze esterne.

Consideriamo dapprima il caso delle forze elettriche; su una delle faccie dell'elemento $x \,.\, y \,.\, z$ normali all'asse x starà una quantità d'elettricità positiva $f\,dy\,dz$: una deformazione elementare del sistema corrisponde ad un incremento $d\,(f\,dy\,dz)$ di tale quantità.

Quindi il lavoro per ciò che riguarda X è misurato da

$$\mathrm{X}\,d\,(f\,dy\,dz) = \mathrm{X}\,dx\,dy\,dz\,d\,f = \mathrm{X}\,d\,f\,dv.$$

Un calcolo analogo ripetuto per Y e Z ci porterebbe a conchiudere che le forze per quanto riguarda dv compiono un lavoro

$$(\mathrm{X}\,d\,f + \mathrm{Y}\,d\,g + \mathrm{Z}\,d\,h)\,dv;$$

il lavoro compiuto nell'intero campo è dunque:

$$\iiint (\mathrm{X}\,d\,f + \mathrm{Y}\,d\,g + \mathrm{Z}\,d\,h)\,dv.$$

Ora, per le equazioni della polarizzazione dielettrica:

$$d\,f = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,d\,\mathrm{X}$$

$$d\,g = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,d\,\mathrm{Y}$$

$$d\,h = \frac{\varepsilon}{4\pi}\,d\,\mathrm{Z}$$

dunque il lavoro diventa

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}\,d\iiint(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2)\,dv;$$

e se si indica con $\mathrm{W_e}$ l'*energia elettrica* che il campo possiede si dovrà scrivere:

$$d\,\mathrm{W_e} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\,d\iiint(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2\ \mathrm{Z}^2)\,dv;$$

o, integrando e osservando che $\mathrm{W_e}$ è nulla da principio:

$$\mathrm{W_e} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\iiint(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2)\,dv.$$

In modo affatto identico si troverebbe che l'*energia magnetica*, $\mathrm{W_m}$, che il sistema possiede è data da:

$$\mathrm{W_m} = \frac{\mu}{8\pi}\iiint(\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)\,dv.$$

Un campo elettromagnetico contiene dunque una quantità d'*energia elettromagnetica:*

$$\mathrm{W_{em}} = \mathrm{W_e} + \mathrm{W_m} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\iiint \boldsymbol{E}^2\,dv + \frac{\mu}{8\pi}\iiint \boldsymbol{M}^2 dv. \qquad [1]$$

La terza ipotesi della teoria del Maxwell consiste nell'ammettere che « l'energia elettromagnetica di un campo racchiuso da una super-

ficie sulla quale le forze elettriche e magnetiche sono costantemente nulle è costante », cioè che in tale ipotesi

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{em} = 0 .$$

In causa della [1] si dovrà scrivere:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\left[\varepsilon\left(X\frac{\partial X}{\partial t}+Y\frac{\partial Y}{\partial t}+Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)+\mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial t}+N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right]dv=0.$$

Per mezzo delle [2] § 4 si possono eliminare $\frac{\partial X}{\partial t} . \frac{\partial Y}{\partial t} . \frac{\partial Z}{\partial t}$, e si ottiene:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\left\{\frac{1}{A}\left[X\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+Z\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\right]+\mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial t}+N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right\}dv=0 .$$

Nella ipotesi enunciata innanzi questa equazione è equivalente all'altra:

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\left[\frac{1}{A}\left(N\frac{\partial X}{\partial y}-M\frac{\partial X}{\partial z}+L\frac{\partial Y}{\partial z}-N\frac{\partial Y}{\partial x}\right.\right.$$
$$\left.\left.+M\frac{\partial Z}{\partial x}-L\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+\mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial t}+N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\right]dv=0$$

ossia:

$$\frac{1}{4\pi A}\iiint\left[L\left(A\mu\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+M\left(A\mu\frac{\partial M}{\partial t}-\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+N\left(A\mu\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial Y}{dx}+\frac{\partial X}{dy}\right)\right]dv=0 .$$

L'equazione si verifica se si ammette che sia:

$$[2]\qquad\left\{\begin{aligned}A\mu\frac{\partial L}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\\ A\mu\frac{\partial M}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\\ A\mu\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y};\end{aligned}\right.$$

e noi supporremo che sia così.

Le equazioni [2] § 4 e le [2] § 5 sono dovute ad Hertz [1].

---

[1] H. Hertz. Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwellschen electrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik. (Wied. Ann. XXIII, p. 84).

§ 6.

Esiste per l'energia di un campo elettromagnetico un'equazione analoga a quelle che vanno sotto il nome di principio di Hamilton e principio della minima azione nella dinamica ordinaria: si può dimostrare cioè la relazione

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{W_{em}}\, dt = 0 ,$$

quando si suppongano nulle le variazioni ai limiti.

Per vedere questo si scriva:

$$[1] \qquad \begin{aligned} x_1 &= \mathrm{A}\,\varepsilon \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} & \qquad l_1 &= \mathrm{A}\,\mu \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} \\ x_2 &= \mathrm{A}\,\varepsilon \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} & l_2 &= \mathrm{A}\,\mu \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} \\ x_3 &= \mathrm{A}\,\varepsilon \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} & l_3 &= \mathrm{A}\,\mu \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial t} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} \end{aligned}$$

sarà, per le equazioni di Hertz:

$$x_1 = x_2 = x_3 = l_1 = l_2 = l_3 = 0 ;$$

di più si introducano sei funzioni $X . Y . Z . L . M . N$ delle coordinate e del tempo, che ci riserviamo di determinare.

Facciamo le variazioni di queste funzioni: moltiplichiamo la prima delle [1] per δX, la seconda per δY ..... la sesta per δN; sommiamo membro a membro, moltiplichiamo per dt e integriamo fra t_0 e t_1, otterremo:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv \Big[& \mathrm{A}\,\varepsilon \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t} \delta X + \mathrm{A}\,\varepsilon \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t} \delta Y + \ldots + \mathrm{A}\,\mu \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial t} \delta N \\ & - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} \delta X - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} \delta Y - \quad \ldots\ldots \quad - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} \delta N \\ & + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} \delta X + \frac{\partial \mathrm{L}}{d z} \delta Y + \quad \ldots\ldots \quad + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} \delta N \Big] = 0 . \end{aligned}$$

Ora è evidente che si può scrivere:

$$A \varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} \delta X = A \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (X \delta X) - A \varepsilon X \frac{\partial}{\partial t} (\delta X)$$

e che 5 eguaglianze analoghe si potrebbero formare considerando i termini in $\frac{\partial Y}{\partial t} \dots \frac{\partial N}{\partial t}$, si ha dunque:

$$\Big[\iiint dv \, (A \varepsilon X \delta X + A \varepsilon Y \delta Y + \dots + A \mu N \delta N) \Big]_{t_0}^{t_1}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv \Big[A \varepsilon X \delta . \frac{\partial X}{\partial t} + A \varepsilon Y \delta . \frac{\partial Y}{\partial t} + \dots + A \mu N \delta . \frac{\partial Z}{\partial t}$$

$$+ \frac{\partial M}{\partial z} \delta X + \frac{\partial N}{\partial x} \delta Y + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{\partial Y}{\partial x} \delta N$$

$$- \frac{\partial N}{\partial y} \delta X - \frac{\partial L}{\partial z} \delta Y - \quad . \quad . \quad . \quad . \quad - \frac{\partial X}{\partial y} \delta N \Big] = 0 .$$

Ora si osservi, in modo simile a quanto si è fatto più su, che:

$$\frac{\partial M}{\partial z} \delta X = - M \delta . \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (M \delta X)$$

11 equazioni analoghe si potrebbero scrivere, sicchè, sostituendo, si ottiene:

$$\Big[\iiint dv \, (A \varepsilon X \delta X + A \varepsilon Y \delta Y + \dots + A \mu N \delta N) \Big]_{t_0}^{t_1}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv \Big[A \varepsilon X \delta . \frac{\partial X}{\partial t} + A \varepsilon Y \delta . \frac{\partial Y}{\partial t} + \dots + A \mu N \delta . \frac{\partial Z}{\partial t}$$

$$- M \delta . \frac{\partial X}{\partial z} - N \delta . \frac{\partial Y}{\partial x} - \dots - Y \delta . \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (M \delta X) + \frac{\partial}{\partial x} (N \delta Y) + \dots + \frac{\partial}{\partial x} (Y \delta N)$$

$$+ N \delta . \frac{\partial X}{\partial y} + L \delta . \frac{\partial Y}{\partial z} + \dots + X \delta . \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} (N \delta X) - \frac{\partial}{\partial z} (L \delta Y) - \dots - \frac{\partial}{\partial y} (X \delta N) \Big] = 0 .$$

Se si ammette che X . Y ... N siano nulle sulla superficie che racchiude il campo si possono cancellare i 12 termini dell'integrale che sono derivate parziali rispetto alle coordinate.

Ordinando ciò che resta rispetto ad X . Y ... N si trova:

$$
\begin{aligned}
(*)\qquad & \Big[\iiint dv\,(\mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{X}\,\delta X + \mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{Y}\,\delta Y + \ldots + \mathrm{A}\,\mu\,\mathrm{Z}\,\delta Z)\Big]_{t_0}^{t_1} \\
& - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv \Big[\mathrm{X}\,\delta\,.\Big(\mathrm{A}\,\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial y}\Big) \\
& \qquad + \mathrm{Y}\,\delta\,.\Big(\mathrm{A}\,\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial z}\Big) \\
& \qquad + \ldots\ldots \\
& \qquad + \mathrm{N}\,\delta\,.\Big(\mathrm{A}\,\mu\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\Big)\Big] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Le $X\,.\,Y \ldots N$ sono ancora in nostro arbitrio, le assoggetteremo alle equazioni seguenti

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{A}\,\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{X} \\
& \mathrm{A}\,\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathrm{Y} \\
& \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
& \mathrm{A}\,\mu\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\mu}{4\pi}\mathrm{Z}\,.
\end{aligned}
$$

Ciò posto l'equazione (*) diventa:

$$
\begin{aligned}
& \Big[\iiint dv\,(\mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{X}\,\delta X + \mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{Y}\,\delta Y + \ldots + \mathrm{A}\,\mu\,\mathrm{Z}\,\delta Z)\Big]_{t_0}^{t_1} \\
& + \delta\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv\Big[\frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2) + \frac{\mu}{8\pi}(\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)\Big] = 0\,;
\end{aligned}
$$

se le variazioni ai limiti sono nulle la parte integrata rispetto al tempo si annulla da sè, quindi bisogna che sia

$$
\delta\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint dv\Big[\frac{\varepsilon}{8\pi}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2) + \frac{\mu}{8\pi}(\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)\Big] = 0
$$

vale a dire

$$
\delta\int_{t_1}^{t_0} \mathrm{W}_{\mathrm{em}}\,dt = 0\,,
$$

cio che si voleva dimostrare.

Questo teorema si deve al prof. Vito Volterra [1].

---

[1] Vito Volterra. Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica. [Nuovo Cimento. (3). XXIX. 147].

§ 7.

Dalle equazioni d'Hertz:

$$A\,\varepsilon\,\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y} \qquad\qquad A\,\mu\,\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}$$

. . . .

si deducono subito due conseguenze importanti:

a) in primo luogo poichè le X . Y . Z . L . M . N hanno tutte le stesse dimensioni, l'omogeneità dei due membri esige che A sia il reciproco di una velocità, dunque « il rapporto fra l'unità elettromagnetica e l'unità elettrostatica di quantità d'elettricità è una velocità », come s'era annunziato;

b) di più le equazioni essendo lineari ed omogenee le perturbazioni che esse prevedono sono « capaci di interferire », appunto come succede delle perturbazioni che costituiscono la luce.

I due sistemi si corrispondono esattamente in tutto salvochè nei segni dei secondi membri; è facile vedere che questa differenza nei segni risponde a qualche cosa di reale.

Si immagini un sostegno circolare ed uno rettilineo, normale al piano del primo nel centro; sul sostegno rettilineo si possa muovere un corpo *e* carico d'elettricità positiva, sul circolare un polo magnetico nord, *m*. Se *e* si trasporta sul suo sostegno in un certo senso, *m* si muoverà a sua volta in un verso che è dato della legge d'Ampère.

Si supponga adesso che il corpo elettrizzato positivo *e*, sia sul cerchio, il polo magnetico nord, *m*, sulla retta; si sposti *m* nel senso in cui prima si era mosso *e*, la legge di Ampère combinata con quella di Lenz ci dice che *e* percorrerà il cerchio nel verso opposto a quello in cui andava *m* nella prima esperienza.

Le correnti di polarizzazione dielettrica sono definite dalle relazioni

$$u=\frac{\partial f}{\partial t} \qquad v=\frac{\partial g}{\partial t} \qquad w=\frac{\partial h}{\partial t},$$

similmente si possono definire, come *correnti di polarizzazione magnetica* tre quantità $\varphi\,.\,\chi\,.\,\psi$ per mezzo delle uguaglianze:

$$\varphi=\frac{\partial \alpha}{\partial t} \qquad \chi=\frac{\partial \beta}{\partial t} \qquad \psi=\frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Date queste notazioni le equazioni d'Hertz si possono scrivere:

$$4\pi A u = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \qquad 4\pi A \varphi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$$

$$4\pi A v = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \qquad 4\pi A \chi = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$4\pi A w = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \qquad 4\pi A \psi = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

allora, ricordando un teorema ben noto di Stokes, si enunciano a parole nel modo seguente:

« Se in un campo elettromagnetico si conduce una superficie S finita e continua, interamente limitata da una curva *s*, in ogni istante:

a) l'integrale della corrente di spostamento dielettrico preso su S e moltiplicato per $4\pi A$ è uguale all'integrale della forza magnetica lungo *s*;

b) l'integrale della corrente di spostamento magnetico preso su S e moltiplicato per $4\pi A$ è uguale all'integrale della forza elettrica lungo *s* ».

§ 8.

Dalle equazioni d'Hertz si deducono immediatamente le due

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0,$$

se ad un dato istante X . Y ... N sono nulle in ogni punto del campo si avrà sempre:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0;$$

tali equazioni sono dette di *trasversalità*, vedremo il perchè di questa denominazione.

§ 9.

Le perturbazioni che costituiscono la luce sono certamente di carattere periodico, è quindi interessante di studiare le proprietà delle perturbazioni periodiche che soddisfano alle equazioni della teoria del Maxwell.

Si ponga:

$$\sigma = \pi_1 x + \pi_2 y + \pi_3 z .$$

$$\omega = \sigma - \frac{t}{A\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

e si faccia inoltre:

$$[*] \qquad \begin{aligned} X &= e_1 \sqrt{\mu} \sin\omega, & L &= m_1 \sqrt{\varepsilon} \sin\omega, \\ Y &= e_2 \sqrt{\mu} \sin\omega, & M &= m_2 \sqrt{\varepsilon} \sin\omega, \\ Z &= e_3 \sqrt{\mu} \sin\omega, & N &= m_3 \sqrt{\varepsilon} \sin\omega, \end{aligned}$$

Le quantità $\pi_1 . \pi_2 . \pi_3$ sono i tre coseni di direzione di una medesima retta *(direzione di propagazione)*, $e_1 . e_2 . e_3$ sono i coseni della forza elettrica, $m_1 . m_2 . m_3$ i coseni della forza magnetica; noi consideriamo i nove coseni $\pi_1 . \pi_2 . \pi_3 . e_1 . e_2 . e_3 . m_1 . m_2 . m_3$ come costanti.

Si sostituiscano i valori (*) nelle equazioni di trasversalità e in quelle d'Hertz: le prime danno

$$(**) \qquad \begin{aligned} e_1 \pi_1 + e_2 \pi_2 + e_3 \pi_3 &= 0 \\ m_1 \pi_1 + m_2 \pi_2 + m_3 \pi_3 &= 0 , \end{aligned}$$

cioè « la forza elettrica e la forza magnetica sono normali alla direzione di propagazione ».

Quanto alle equazioni d'Hertz esse pongono fra le $\pi_1 . \pi_2 . \pi_3 . e_1 . e_2 . e_3 . m_1 . m_2 . m_3$ sei relazioni che, date le (**), sono soddisfatte identicamente quando sia ancora

$$e_1 m_1 + e_2 m_2 + e_3 m_3 = 0$$

dunque « la forza elettrica è perpendicolare alla forza magnetica ».

Per un dato valore del tempo hanno una medesima condizione elettromagnetica i punti per cui

$$\sigma = \text{costante},$$

si ha dunque « un sistema d'onde piane normali alla direzione di propagazione ».

Dipendentemente dal tempo si trovano in uguali condizioni i punti per cui

$$\omega = \sigma - \frac{t}{A\sqrt{\varepsilon\mu}} = \text{costante},$$

derivando rispetto a t s'ottiene:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

cioè « le cose succedono come se le onde piane elettromagnetiche si propagassero secondo la direzione di propagazione, con velocità uniforme $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ».

La velocità V_0 delle onde elettromagnetiche nel vuoto s'ottiene ponendo $\varepsilon = \mu = 1$, dunque

$$V_0 = \frac{1}{A}$$

è però « la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è quella stessa della luce ».

Per un altro mezzo si ha sensibilmente

$$V = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon}},$$

si può definire come indice di rifrazione, N, dei raggi elettromagnetici per un dato mezzo il rapporto

$$\frac{V_0}{V} = \frac{\frac{1}{A}}{\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon}}} = \sqrt{\varepsilon},$$

allora

$$N^2 = \varepsilon$$

cioè « la velocità nelle onde elettromagnetiche è in ogni mezzo quella stessa della luce ».

Si potrebbe continuare questo studio e il risultato sarebbe che « la perturbazione elettromagnetica definita dalle uguaglianze (*) ha tutte le proprietà di un raggio di luce polarizzata rettilinea ».

§ 10.

Dal riconoscere questo fatto all'ammettere che *la luce è un fenomeno elettromagnetico* non v'è che un passo, ma per avere il diritto di farlo bisogna prima dare delle ipotesi e delle conseguenze principali della teoria una verifica sperimentale; è ciò che è stato fatto in questi ultimi tempi, per opera specialmente di Enrico Herz.

La più importante ipotesi della teoria è quella che consiste nell'ammettere l'esistenza delle correnti di polarizzazione dielettrica e nel supporre la loro azione elettrodinamica uguale a quella delle correnti che si producono per conduzione nei conduttori: Hertz ha provato che l'una e l'altra cosa è vera.

La teoria conduce a conchiudere che « masse d'elettricità in moto esercitano forze magnetiche », e Rowland ha mostrato che un disco elettrizzato in rapido movimento ha un'azione sull'ago magnetico.

William Thomson aveva indicato fino dal 1853 la possibilità di ottenere in conduttori di forma conveniente delle correnti sinussoidali: ma una corrente sinussoidale deve dare origine in ogni punto dello spazio ad una forza magnetica e quindi ad una forza elettrica pure sinussoidale: reciprocamente l'esistenza in un punto dello spazio d'una forza elettrica periodica produrrà in ogni circuito in presenza una corrente periodica.

L'azione del primo circuito sul secondo, giusta le idee di Maxwell, non sarà istantanea, ma si propagherà « come un raggio di luce ».

Hertz ha provato che è veramente così; egli ha ottenuto dei *raggi di forza elettrica* polarizzati in un piano capaci di riflettersi e rifrangersi appunto come i raggi delle vibrazioni luminose, egli ha trovato che la riflessione segue secondo la legge d'Euclide, la rifrazione secondo la legge di Des Cartes; ha misurato l'indice di rifrazione con un prisma d'asfalto: era prossimamente quello che la teoria richiedeva.

Hertz poteva conchiudere a buon diritto che egli aveva sperimentato sopra un raggio di luce di grande lunghezza d'onda (66 cm.).

Blondlot ripetendo le esperienze d'Hertz ha dimostrato che la velocità delle onde elettromagnetiche nell'aria « è quella della luce », come vuole la teoria (1).

---

(1) Blondlot ha misurato veramente la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche trasmesse da un filo conduttore, ma fu dimostrato da Sarasin e de la Rive che quella velocità è la stessa che la velocità delle onde nell'aria.

Così il ponte che riunisce il dominio dell'elettricità a quello dell'ottica è valicato, il cammino ridiventa facile.

Le vedute di Maxwell vengono a gettare una luce inaspettata sul problema della costituzione della materia.

Un circuito suscettibile di corrente oscillante possiede un periodo di vibrazione che dipende dalla sua forma e dalla sua grandezza: dà quindi luogo ad onde di lunghezza determinata.

Sappiamo che i gas incandescenti danno uno spettro di poche linee brillanti, dunque è ragionevole ammettere che le loro molecole agiscono « come circuiti elettrici adatti alle onde luminose ».

Calcolando in base a questa ipotesi le dimensioni delle molecole si trovano dei numeri dell'ordine di quelli trovati per vie affatto differenti.

L'esperienza prova che uno strato di circuiti o, come si dice, di *risonatori*, riflette le onde elettromagnetiche: questo fatto dà ragione del meccanismo della riflessione della luce e costituisce ad un tempo una verifica diretta del principio di Huyghens.

L'esperienza dimostra che uno strato di risonatori assorbe le onde che è capace d'emettere e ciò costituisce una prova della legge di Kirchhoff e mostra come si formino gli spettri d'assorbimento.

L'esperienza attesta che se due risonatori sono tenuti vicini la corrente oscillante è smorzata in entrambi: ma correnti smorzate, secondo le ricerche di Sarasin e de la Rive danno origine a radiazione multipla: questo spiega perchè gli spettri dei liquidi e dei solidi siano continui.

Da questo punto di vista anche l'occhio è un apparato elettrico, i tre sistemi di fibre d'Helmholtz sono tre sistemi di risonatori.

Nelle sue prime esperienze il Blondlot calcolava il periodo di vibrazione dei risonatori con una formola di Thomson, vi era dunque ancora nella sua ricerca un presupposto teorico.

In una nuova serie di esperienze non ancora pubblicate ma delle quali il prof. Blondlot mi ha cortesemente informato, egli ha rifatto la misura con un metodo indipendente da ogni teoria; il risultato ottenuto è soddisfacente, la media dei numeri trovati per la velocità delle onde lungo un filo di rame è

$$303{,}0 \, . \, 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \, .$$

Sugli insegnamenti di matematica superiore nelle Università italiane

di E. Pascal *a Pavia.*

Quistioni sul genere di quelle che io imprendo ora a trattare, non sono affatto nuove in questi tempi in Italia; solo che generalmente la cosiddetta quistione universitaria viene trattata e considerata da un punto di vista assai più ampio. Io qui mi propongo uno scopo più modesto; io voglio trattare solo degli insegnamenti di matematica.

Sembrerà in ogni modo grande ardimento il mio, l'intraprendere una discussione nella quale io non posso avere nessuna autorità, e uomini consumati nella vita degli studii e dell'insegnamento la potrebbero trattare con una competenza di gran lunga maggiore; ma mi conforta il pensiero che le idee che io qui sosterrò sono accettate più o meno da una gran parte dei miei colleghi.

Certo non mancheranno dei lettori che, abituati per lunga serie di anni a veder le cose sempre stabilite in una certa maniera, hanno acquistato il pregiudizio di considerare come essenziali nella natura degli studii certi ordinamenti e certe disposizioni, di cui invece potrebbe farsi a meno.

In tutte le cose è così: non sempre abbiamo avuto l'occasione di pensare su certi argomenti, e siamo sempre stati inclinati ad accettare senza discutere quello che abbiamo trovato; e appena sentiamo dire qualcosa che si scosti dall'ordinario, la prima idea che ci viene è di ripulsa; ma molte volte poi succede, e ciascuno lo avrà provato per conto proprio, che, pensandoci meglio, ci accorgiamo che la ripulsa dipende più da pregiudizii che abbiamo inconscientemente acquistati e accettati sulla natura di quell'oggetto, che non da un profondo esame o da una minuta critica che abbiamo forse altre volte avuto occasione di fare su di esso.



Lascio da parte l'ordinamento degli studii matematici nei primi due anni di corso universitario. In questi due anni, il corso è fatto in comune da giovani che vorranno poi percorrere la carriera della scienza pura, e da quelli che vorranno poi diventare ingegneri.

Io voglio occuparmi solo dei primi. Essi, prima di tutto, son pochi; ed è bene che sia così. Il paese ha bisogno di molti ingegneri, ma non ha bisogno di molti matematici. Sino a pochi anni fa, il numero dei giovani che si davano alla matematica pura in Italia e in Germania era cresciuto notevolmente; io non voglio spiegare per qual ragione avvenne questo fenomeno, ma il fatto è certo, e le statistiche lo provano.

Vi fu una produzione di laureati in matematica, superiore al bisogno. In Germania dei giovani dovettero andare a trovar posto in America; in Italia ad ogni concorso per scuole secondarie si presenta un centinaio di giovani quasi tutti mediocri, ma tutti laureati.

Per parte mia, l'ho già detto, credo che in tempi normali, in un ben armonizzato equilibrio delle forze intellettuali del paese, il numero dei cultori di scienze astratte deve esser piccolo.

Quando questo numero cresce è segno che la società non è nello stato normale, è sintomo che la società è in un modo o in un altro travagliata da mali; negli anni che seguono a grandi calamità pubbliche, o in tempi di grandi e prolungate crisi economiche, il numero dei cultori e appassionati di scienze astratte cresce rapidamente.

Io parlo naturalmente della gran massa dei mediocri, e non di quei pochissimi che eccellono. Questi son sempre in un numero tale che non dipende affatto nè dalla molteplicità delle scuole, nè dalle condizioni della società. Per eccellere in quelle discipline così astratte, occorrono tante e così squisite qualità di intelletto che non si possono costruire se già non ci sono.

Io parlo dunque di quelli dei quali può dirsi solo che sono laureati in matematica e null'altro, ed essi debbono essere solo tanti per quanti il paese ne richiede.

Aumentarne il numero è come distrarre tanti giovani da professioni in cui avrebbero potuto rendersi più utili alla società per condurli ad oziare in campi in cui mai nulla di utile produrranno.

Quindi p. es. è stato un male l'accrescimento di tante nuove facoltà matematiche; perchè esse a nulla serviranno se si tratterà di produrre un altro vero matematico dippiù; sono invece una lusinga e un incentivo potente per creare tanti nuovi laureati dippiù.

Lusinga pei giovani cui si offre un'occasione più facile per darsi a studii elevati ai quali li spinge, per natura, fallace vaghezza di novità e di astrazioni, e che credono che in ogni modo ci sarà sempre tempo per passar poi a studii più pratici, senza sapere che quando nei lunghi anni giovanili il loro cervello si è adattato a pensare in un modo, non sempre sarà poi agevole ridargli quella elasticità che ha perduta.

Ed infine, bisogna pur dirlo, lusinga da parte dei professori, che essendo lì, credono naturalmente loro nobile dovere il far degli scolari.

***

Presentemente nel secondo biennio di matematica, oltre l'insegnamento di meccanica razionale che lo considererei piuttosto come un complemento degli insegnamenti del 1° biennio, si impartiscono in generale i seguenti altri insegnamenti.

1° Geometria superiore; 2° Meccanica superiore; 3° Astronomia; 4° Analisi superiore; 5° Geodesia; 6° Fisica matematica.

Ora io non mi oppongo a chi voglia sostenermi semplicemente che in *alcune* delle grandi Università italiane questi insegnamenti ci stanno bene, ed è bene mantenerli.

Ma quello di cui mi lamento è questo, che si sia svisato il concetto vero per correr dietro ad un concetto falso e artificiale; che si sia creduto che non possa esistere una facoltà matematica senza che l'insegnamento sia suddiviso in quella speciale maniera e con quelle proporzioni.

In altri termini si immagina oggidì la formazione di una facoltà di studii superiori, pressochè come la formazione di un Ginnasio, che per fondarsi ha bisogno necessariamente dell'insegnante di lingua latina, di quello di lingua italiana, di quello di storia e così via discorrendo; quando il legislatore vuole stabilire una scuola secondaria, egli prima stabilisce gli insegnamenti che vi si debbono dare, e poi nomina gli insegnanti.

Ora non è da questo medesimo punto di vista che bisogna considerare un ordinamento di studii superiori; io per questi farei precisamente il cammino inverso; cioè prima nominerei gli insegnanti scegliendoli fra i sommi del paese, e poi domanderei loro quali corsi vogliano sviluppare.

Questo che dico per gli studii di matematica superiore, potrebbe ripetersi per tanti altri degli insegnamenti universitarii, e propriamente per tutti quelli insegnamenti di carattere speciale; così p. es. intendo che in una facoltà di lettere non possa mancare il professore di lingua latina; ma non intendo affatto che, non essendoci in vista un gran geografo o un grande archeologo si voglia fabbricare alla meglio un professore di geografia o di archeologia solo per parere di non mancarne; e così comprendo che in una facoltà medica sia indispensabile l'insegnante di anatomia, ma non capirei affatto che una tal facoltà si ostinasse a chiedere la nomina di un professore di istologia quando non vi fosse un istologo di gran merito che potesse aspirare a quel posto.

Insomma io sostengo che per insegnamenti speciali ed elevati, bisogna creare i posti per gli uomini e non gli uomini per i posti, altrimenti si fa servire la scienza a fini, cui essa non era destinata.

A partecipare però ad idee così larghe, certamente si oppongono molti interessi e di varia natura. Prima di tutto quell'amore di simmetria, da cui sembrano in ispecial modo dominati gli italiani, cosicchè se un ordinamento è fatto in una certa maniera in un luogo, pare che in altro luogo non possa farsi che nella stessa maniera.

Quando a Pisa si fondò e fiorì la scuola normale, ai professori delle Università italiane parve strano che a Pisa fosse una cosa che non vi era altrove; e non si dettero pace fino a quando ciascuna Università non ebbe la sua brava scuola normale o di magistero tutte tagliate sullo stesso modello.

Commisto a questo sentimento di simmetria, che dipenderà forse dalla conformazione speciale del cervello italiano, c'e n'è un altro che dipende da altra ragione, ed è quell'egoismo regionale, da cui par tanto difficile liberarsi.

Si ragiona così: nella tale Università c'è quel tale insegnamento; dunque perchè non deve esserci anche nella nostra Università? ragionamento che non sarebbe dannoso, se non ne andasse di mezzo la dignità della scienza.

Ognuno sa in che modo son venuti su e si son venuti allargando tanti di questi insegnamenti speciali. Essi son sorti prima in qualche Università perchè c'era una persona eminente in quella speciale disciplina; sparita la persona, la cattedra è rimasta, che invece non dovea rimanere. Rimasta la cattedra, è restato svisato il concetto, certamente elevato mediante cui essa era stata creata, e di qui poi al porne una simile in ciascuna delle altre Università c'è stato un passo solo.

Poco più di una ventina di anni fa, i corsi di analisi e geometria superiore, e fisica matematica non c'erano che in tre o quattro Università, ed ora invece non c'è nessuna di quelle minuscole per quanto pareggiate Università che non abbia i suoi bravi insegnamenti d'analisi superiore, geometria superiore e fisica matematica. Mi ricordo di un giovine valoroso che fu inviato a insegnare una disciplina elevata in una di quelle Università pareggiate, e che stette per alcuni anni senza avere scolari, e ora non so se ne abbia.

Ma parliamoci schietti: Con che coscienza si può sostenere che in Italia possano trovarsi tanti astronomi, tanti cultori di geometria superiore, tanti di analisi superiore, tanti fisici matematici, ecc. per quante sono le numerose Università italiane?

Ma mi si domanderà: E allora, se non suppliamo in qualunque modo ai posti vacanti, come diamo la laurea?

E io rispondo, prima di tutto, che non vedo la ragione per la quale una ventina di Università italiane debbano essere tutte autorizzate a dare la laurea in matematica, cioè una laurea che bisognerebbe mantenere ad un livello molto alto, e che invece molte volte cade ad un livello molto basso.

Certo sarebbe una bella cosa che si potessero trovare in Italia una ventina di fisici matematici, e una ventina di geometri e analisti di valore riconosciuto, ma quando questo non è possibile, quando questo desiderio eccede la potenzialità del Paese perchè ostinarsi, con offesa al decoro della scienza e con danno stesso dei giovani?

A noi parrebbe di scadere nel concetto degli altri, se con tutta lealtà riconoscessimo che il nostro Paese non può darci tutto quello che chiediamo. Piuttosto che riconoscere questo noi abbassiamo il concetto elevato da cui eravamo partiti, e cerchiamo poi di persuadere noi stessi che non ci siamo abbassati affatto e che siamo quelli stessi di prima.

Se muore o lascia l'insegnamento un grande maestro, la prima idea che ci viene è quella di porre a concorso il suo posto, senza farci altre domande e senza guardarci attorno. Al concorso si presenterà forse (come è successo qualche volta, trattandosi di insegnamenti assai speciali) una sola persona e di valore discutibile; ebbene la Commissione proporrà al ministro, come eleggibile, quell'unico concorrente. E non era meglio lasciare vacante il posto, e aspettare che si formi quello specialista che possa degnamente occuparlo?



Oggidì si discorre molto di una possibile soppressione degli esami speciali e della istituzione di esami di Stato. Ora, senza inoltrarmi in una quistione così complessa riguardante tutto l'intero ordinamento universitario, a me pare però fuor di dubbio che nel caso di quella speciale laurea che è la laurea in matematica, questa innovazione si potrebbe e dovrebbe fare.

Esaminiamo prima di tutto quali sono i giovani che sono iscritti al secondo biennio per la laurea in matematica.

Si sa che al primo anno delle scuole di Applicazione, non si è, per legge, ammessi senza aver prima ottenuta la cosidetta licenza, mentre, anche senza di questa, si può essere iscritti al 3° anno di matematica (*).

(*) Nella Facoltà di scienze della Università di Torino, come gentilmente mi comunica il mio egregio amico prof. Peano, il regolamento per l'iscrizione al 3° anno di matematica, è stato interpretato da alcuni anni con maggior rigore.

Nelle scuole di Applicazione in cui quel regolamento è applicato con coscienza, ne risulta l'esclusione di parecchi giovani che sono, per conseguenza, i più negligenti o i più tardi d'ingegno fra i loro compagni. Molti di questi giovani si iscrivono allora al 3° anno di matematica sia colla speranza di potere prima o poi tornare alle scuole di applicazione senza perdere anni di corso, sia colla determinazione di mutar carriera.

Ora, a parte qualche nobile eccezione, io mi appello a tutti i miei colleghi per sapere con lealtà da essi, se un tal rifiuto delle scuole di applicazione possa reputarsi l'ideale d'uno studente di scienza pura. Eppure tutti sanno che sono gli studenti di tal genere che formano molte volte la maggioranza della studentesca del 2° biennio di matematica. Ma io questi studenti li metterò fuori causa, perchè nessuno penserà che le scuole di matematica sieno istituite per essi.

Tutti gli altri giovani e che considererò come i veri studenti, sono in generale quei pochi che hanno mostrato speciali tendenze per gli studii astratti, e che son venuti man mano acquistando un vero amore per essi. Ma son così pochi che non si capisce proprio la ragione per la quale in tutta Italia si debbano mantenere tante facoltà matematiche per tanti pochi giovani, che riuniti invece meglio fra loro, potrebbero progredir meglio negli studii.

Che il vero studente di matematica sia in generale amante della scienza, per quanto, s'intende, lo può essere un giovine, non è una mia fantasia, ma un fatto, perchè tutti sanno che c'è una differenza grandissima fra la massa di tutti gli studenti, e quei pochi di scienza pura.

Per quelli, gli studii in generale sono un peso di cui farebbero a meno, ma vi sono obbligati dalle loro famiglie, questi invece cedendo agli ideali della loro giovinezza ed affascinati dal miraggio della scienza, il più delle volte fanno quelli studii contro la volontà dei loro parenti che vorrebbero indurli a studii più lucrativi; quelli sanno che ottenuto in qualunque modo il diploma entreranno in un mondo dove in generale la loro fortuna non dipenderà dalla robustezza degli studii da loro fatti, ma dalla loro avvedutezza e da tutte quelle altre doti che nella scuola non si acquistano, questi invece sanno bene che la carriera da loro scelta è una carriera di abnegazione e che non aprirà loro l'adito a grandi fortune, e che se qualche modesta fortuna potranno aspettarsi dal mondo, questa dipenderà quasi tutta dalla precisione delle prime idee da loro acquistate nella scuola; quelli infine per esser troppi sono troppo lontani dai loro maestri e ne risentono troppo poco l'influenza, questi invece sono più o meno a contatto coi loro maestri, li amano dippiù, e assai più facilmente sono docili ai loro consigli.

Io credo perciò che se si sopprimesse l'obbligo degli esami nel se-

condo biennio di matematica, e si mantenesse solo un esame di laurea ben fatto, non si avrebbe nessun contraccolpo nella severità degli studii.

È infondato affatto il timore che i giovani non andrebbero più alle lezioni; chè anzi ci andrebbero con più amore.

Fra i miei scolari di matematica superiore ve ne sono sempre alcuni che non dovranno sostenere l'esame, e ciascuno dei miei colleghi delle altre Università potrà certamente attestare altrettanto per conto proprio. Tutti sanno che non c'è quasi nessun studente in matematica pura che non assista ad altri corsi oltre quelli di obbligo, ed è raro il caso di chi si presenta all'esame di laurea dopo solo i quattro anni regolamentari di corso.

In Germania il sistema che vige è proprio quello di cui parlo io.

Ma parliamoci francamente. Che cosa è quest'esame di matematica superiore?

Il professore di geometria superiore p. es. in un anno svilupperà un corso su di una speciale teoria. Egli andrà a leggere le Memorie di questo e quello autore, le coordinerà fra loro, ne mostrerà le lacune, mostrerà ai giovani la relazione che per avventura quelle ricerche geometriche potranno avere con ricerche analitiche e così via discorrendo. Insomma egli si proporrà di condurre i giovani sino alle ultime porte della scienza in quello speciale argomento che ha scelto per tema del suo corso. Ed è su questo che volete fare l'esame? E dopo che il giovine ha superato l'esame su quella speciale parte della geometria superiore, potrete dire che il giovine conosce la geometria superiore?

Questo incubo dell'esame genera tanti mali. Lo stesso professore, a detrimento della coltura dei giovani, non dà tutta quell'estensione che potrebbe dare al suo corso, perchè capisce che non è possibile che quello che a lui è costato anni di fatica per mettere assieme, i giovani lo possano poi tener tutto presente in un giorno.

D'altra parte è impossibile evitare nei giovani una certa reazione contro tutta quella roba cacciata a forza in tante pallottole nel loro cervello, che va naturalmente a danno dell'entusiasmo e dell'amore che essi potrebbero acquistare per la scienza, per modo che succede spesso un fatto che è sintomatico ed è che i giovani che cominciano a compor dei lavori, non ne scelgono il tema fra le discipline cui hanno dovuto assistere per obbligo e per sostenerci su l'esame, ma per lo più fra quelli cui hanno assistito per proprio genio, liberamente.

Per parte mia posso dire che negli anni dei miei studii, i corsi cui assistetti per obbligo mi lasciarono un peso, un'uggia, da cui neanche adesso, dopo tanti anni, ho potuto liberarmi e gli altri, che pure eran dati dagli stessi maestri, cui assistetti per mia libera elezione, furon quelli che mi fecero acquistare amore per la matematica.

Ho detto già che il metodo attuale è a detrimento della vera coltura dei giovani, e ci insisto.

A me pare che un corso di matematica superiore debba avere un obbiettivo completamente diverso dal corso p. es. di calcolo infinitesimale o di geometria analitica.

Qui si tratta di sgrossare, dirò così, il cervello dei giovani e renderlo atto alle concezioni matematiche, e innestargli lo spirito di quei metodi classici che durano da secoli e che nel fondo sono immutabili, e che variamente modificati, sono quelli stessi che si applicheranno poi in tutte le parti della matematica superiore; lì invece si tratta di condurre il giovine a esaminare gli indirizzi che la scienza ha preso negli ultimi tempi, e che domani forse cangerà; qui si conduce il giovine alla risoluzione di problemi che da secoli, son sempre quelli e che hanno applicazioni pratiche; lì invece si espongono e risolvono problemi che sono importanti oggi, e che ieri forse non esistevano, e che domani forse avranno perduta importanza per cederla ad altri, e che in ogni modo non hanno che un valore puramente ideale.

Io paragonerei l'opera del maestro nel secondo caso a quella dello scultore che sgrossa il marmo per crearne una statua, e nel primo caso la paragonerei all'opera dell'artista che dal marmo, già sgrossato, ne trae un'opera d'arte.

La prima operazione sul marmo la può fare anche chi sia appena edotto delle regole fondamentali dell'arte, ma la seconda operazione non la può fare che lo scultore di genio; la prima operazione è sempre la stessa sia che quel marmo è destinato a raffigurare una Venere Capitolina, sia che è destinato a divenire una modesta statua da giardino.

Fra le due specie d'insegnamenti c'è dunque proprio una differenza di sostanza. Nelle Università tedesche quasi sempre i professori espongono solo dei corsi di matematiche superiori, e gli insegnamenti fondamentali, che noi chiameremmo di primo biennio, son tenuti dai liberi docenti.

Se dunque differenza c'è, è naturale che non sieno trattati nella stessa maniera i due insegnamenti, e quindi gli esami mantenuti negli uni, possono essere soppressi negli altri, perchè così il richiede lo spirito e lo scopo di questi, senza di che la coltura dei giovani, ristretta in tante pallottole classificate e numerate, non potrà mai da noi acquistare quella larghezza e quell'elasticità che ha altrove.



E non è neanche poi fuor di luogo un'altra considerazione.

L'ordinamento attuale è di nocumento alla coltura dei giovani per un altro lato di molto rilievo.

Tutti sanno che a svolgere con larghezza e con intenti moderni una qualunque teoria di matematica superiore non può bastare un anno solo. L'insegnante si trova davanti a giovani che appena conoscono le nozioni fondamentali della geometria analitica e del calcolo, e quindi egli per svolgere un corso superiore, deve cominciare molto addietro, e svolgere quasi completamente teorie che sono da molte decine di anni già stabilite nella scienza. Ma il più delle volte per svolgere quelle teorie se ne trascorre l'intero anno, e si è obbligati ad interrompere il corso nel momento appunto in cui si stava per raggiungere la meta, e senza aver quindi potuto condurre i giovani sino alle ultime porte della scienza.

Il rimedio migliore a tale inconveniente sarebbe che il professore potesse nell'altro anno ricominciare il corso proprio al punto in cui lo ha interrotto l'anno precedente, come fanno appunto molti dei professori delle Università tedesche. Ma invece questo da noi non si può fare perchè l'uditorio nell'altro anno è quasi tutto cangiato; i giovani, seguito che hanno per un anno quel corso e superato quell'esame scappano da quel maestro per andare a seguire altro corso forse meno proficuo, e per apparecchiarsi a sostenere altri esami; il risentire per un altro anno il medesimo maestro, è cosa che dal punto di vista dei nostri regolamenti non porta alcun utile ai giovani, e se uno o due giovani hanno l'abnegazione e la diligenza di farlo, non si può pretendere da tutti la stessa abnegazione.

Ognuno che per poco ci pensi, o che ci abbia già pensato, vede la gravità di questo inconveniente.

Un corso di matematica superiore da noi non può in generale avere tutta quella larghezza di sviluppo di cui ha bisogno; esso è troppo serrato fra le angustie del regolamento, degli esami, e della ristrettezza dell'anno scolastico, e il maestro che vuole svolgere largamente una teoria, costretto com'è di cominciare dai primissimi risultati non ha il tempo di giungere sino agli ultimi.



Stabilita la libertà degli studii, resta anche completamente inutile quella arbitraria divisione dell'insegnamento di matematica superiore in tante cattedre distinte.

Ogni professore potrebbe avere il titolo di professore di *matematica superiore*, come già si è incominciato a fare in alcune Università.

Ridotte le facoltà di matematiche, potrebbero riunirsi in un minor numero di centri i migliori cultori delle matematiche; ma dovrebbe anche smettersi l'idea che il loro numero in ciascuna Università debba essere stabilito *a priori*.

Io non vedo il danno che ne risulterebbe, se in un luogo ce ne fossero quattro, e in un altro cinque; il loro numero può variare di tempi in tempi; esso deve risultare come conseguenza di tante cose, fra cui, prima di tutto, dalla potenzialità del Paese. Noi non possiamo venire a patti colla Provvidenza e chiedere che, morto un matematico di grido, ce ne mandi subito un altro.

Ho detto che quella divisione dell'insegnamento superiore in quelle sei cattedre è arbitraria e artificiale, e non mi darà torto infatti chi è appena informato dei nuovi indirizzi che negli ultimi anni hanno preso le matematiche; una distinzione netta fra geometria e analisi non può più farsi senza render monche l'una e l'altra; i problemi della fisica matematica e della meccanica si trovano intimamente legati con quelli della teoria delle funzioni analitiche, e così di seguito.

Il presente ordinamento dunque non è neanche conforme alle esigenze ultime della scienza, e io ho fede che verrà tempo in cui esso sarà mutato.

Milano, autunno del 1893.

Deduzione del postulato del segmento da quello dell'angolo

di S. Sbrana *a Pistoia.*

In tutti i moderni trattati di Geometria elementare si trovano enunciati, dopo quelli del movimento, della retta e del piano, i due postulati seguenti:

Ogni segmento è rovesciabile, cioè, i suoi due estremi possono prendere contemporaneamente l'uno il posto dell'altro.

Ogni angolo è rovesciabile, cioè, i suoi due lati possono prendere contemporaneamente l'uno il posto dell'altro.

Scopo della presente nota è di dimostrare che la 1ª di queste due proposizioni non è indipendente dalla 2ª, come s'è ritenuto finora, ma ne è logica conseguenza [1].

---

[1] Un tentativo di dimostrare la stessa cosa si trova nella 6ª ed. (1888) degli eccellenti Elementi del prof. Faifofer, e precisamente in una nota alla pag. 28, che dice: « Fondandosi sul postulato dell'angolo si può dimo-« strare quello del segmento per ogni segmento che abbia le estremità sui « lati d'un angolo e a egual distanza dal vertice. »

Per fare questa deduzione, mi valgo, oltre che delle nozioni fondamentali che precedono in tutti i testi i due postulati surriferiti, anche delle seguenti prime nozioni sul cerchio:

Definizione. Quando un piano scorre su se stesso rotando attorno un suo punto A, ogni altro suo punto B descrive un *cerchio.*

Cor. Ogni retta del piano che passa per A incontra il cerchio in due punti e due soli.

Postulato. Il cerchio è una linea *completa*, tale cioè, che *divide* il piano in due parti; la parte limitata, che contiene i punti *interni*, è percorsa dal segmento AB; e quella indefinita, che contiene i punti *esterni*, è percorsa dal prolungamento di esso che è dalla parte dell'estremo B.

Cor. Ogni linea del piano che passa per un punto di AB, escluso B, e per un punto di detto prolungamento, ha col cerchio un punto almeno in comune.

Queste prime nozioni non sono diverse da quelle che s'incontrano in tutti i buoni testi; in esse non entra affatto il concetto di segmenti eguali e differenti, concetto che deve essere stabilito e utilizzato soltanto dopo di aver dimostrata la proprietà del segmento, della quale appunto ci occupiamo, e che andiamo, senz'altro, a dedurre da quella dell'angolo.

Sia AB un segmento arbitrario. Rotando prima attorno ad A e poi attorno a B esso descrive le superficie di due cerchi, i quali incontrano i prolungamenti della sua posizione iniziale in due punti, l'uno esterno a un cerchio e l'altro all'altro; questi due cerchi hanno dunque un punto in comune C, fuori della retta dei loro centri.

Si tirino i segmenti AC e BC; poichè AC e AB, conservando l'estremo A in comune, sono sovrapponibili, se si rovescia l'angolo BAC, il punto B va in C e C in B e perciò anche il segmento BC

Trattandosi qui soltanto d'una classe speciale di segmenti, l'osservazione non ha alcun valore, come ha mostrato di riconoscerlo l'autore stesso col sopprimere questa nota dalle edizioni successive. E invero di classi speciali è facile il costruirne di estesissime, tanto di segmenti che di angoli, pei quali le due proposizioni in questione, non dipendano affatto l'una dall'altra, ma discendano direttamente dai postulati della retta e del piano. Esempi: Si fissino sopra una retta due punti ad arbitrio A e B, e poi con una rotazione attorno ad A si facciano scambiare di posto i due raggi; il punto B andrà in un punto C, che nella rotazione inversa torna in B; il segmento BC è dunque rovesciabile. Analogamente, preso un angolo qualunque ABC, una mezza rotazione del suo piano attorno ad AB porta BC in BD, che nella rotazione inversa torna in BC: l'angolo ABD è dunque rovesciabile.

viene a essere rovesciato: ma BC e AB sono sovrapponibili, dunque anche il segmento dato AB è rovesciabile.

Dopo ciò, le prossime nuove edizioni dei nostri buoni trattati di Geometria potranno contenere un postulato di meno.

Pistoia, gennaio 1893.

S. Sbrana.

RECENSIONI

Dottor M. Chini. — *Esercizi di calcolo infinitesimale.* — Livorno, tip. di Raffaele Giusti.

È un buon libro che l'autore dichiara di aver pubblicato perchè possa riuscire di qualche vantaggio a coloro che intraprendono lo studio di questa parte della matematica. Lo scopo è raggiunto, perchè gli esercizi sono scelti con intelligenza e criterio, sviluppati con semplicità e chiarezza, e la lettura di questo libro gioverà certamente agli studenti di calcolo.

Nella prima parte « *Calcolo differenziale* » gli esercizi vertono sugli infinitesimi dei vari ordini, massimi e minimi, derivate n^e, sviluppi in serie, applicazioni geometriche alle curve piane, gobbe ed alle superfici. — Nella seconda parte « *Calcolo integrale* » vi sono esercizi di integrali di funzioni razionali, irrazionali, trascendenti, e le applicazioni geometriche. — Nella terza parte « *Equazioni differenziali* » si integrano equazioni di 1° e di 2° ordine, ed alcune di ordine superiore.

Dalla lettura del libro ho rilevato alcuni punti, e sono pochi, in cui l'opera dell'autore mi è parsa meno perfetta per semplicità e chiarezza, e sono i seguenti:

Pag. 3 - Es. 7. Le coordinate di due punti sono dedotte sotto la forma:

$$P_1\left(3+\sqrt{2}, \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right), \quad P_2\left(3-\sqrt{2}, \frac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)$$

e sarebbe stato meglio porre $P_1(3+\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$, $P_2(3-\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$.

Pag. 26 - Es. 41. Il $\lim\left(1+\frac{r}{100\,n}\right)^{nt}=e^{\frac{rt}{100}}$ per $n=\infty$, è dedotto col metodo delle derivate, ma era bene osservare che lo stesso limite si otteneva molto facilmente riducendo l'espressione al tipo $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}$.

Pag. 30 - Es. 46. Per ottenere $D^{(n)}$ arc tang x, l'autore pone

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}\right)$$

e poi deriva $(n-1)$ volta. Il calcolo risulta più semplice ponendo

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right]$$

Nella ricerca degli asintoti il metodo seguito è quello di determinare $a=\lim\frac{y}{x}$ e $b=\lim(y-ax)$ per $x=\infty$ nella equazione $y=ax+b$. L'autore avrebbe fatto bene di applicare a qualche esempio anche l'altro metodo più moderno (¹) dello sviluppo di $y=ax+b+\ldots$ secondo le potenze discendenti di x.

Pag. 124 - Es. 189. « $\int\frac{f(x)\,dx}{(x^2+px+q)^n}$ con $f(x)$ di grado inferiore a $2n$ e $p^2<4q$ è sempre decomponibile in due parti ecc. ... » Si può supporre p^2 non uguale a $4q$.

Pag. 195 - Es. 140. Si usa la dicitura « fattori primi reali ed altri immaginari » invece di fattori lineari. È molto meglio nel caso accennato parlare di fattori primi di 1° e 2° grado.

Pag. 144 - Es. 166. Si vuole $\int\frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx}{1-3\operatorname{sen}^3 x}$ ed è detto: « Essendo l'integrale proposto dalla forma $\int f(\operatorname{sen} x,\ \cos x)\,dx$ ecc., si ponga $\operatorname{sen} x=z$ ». Ora agli allievi si deve insegnare che $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ dove f è segno di funzione razionale in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, si calcola (come è detto dopo) ponendo $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x=z$; e ciò per evitare l'introduzione di irrazionali. Nel caso speciale si pone $\operatorname{sen} x=z$ perchè l'integrale proposto è delle forma

$$\int f(\operatorname{sen} x)\,d\operatorname{sen} x\,.$$

Mancano esercizi sulla derivazione degli integrali.

Questi pochi punti che mi paiono meno perfetti, non infirmano la bontà del libro. Esso riuscirà di non lieve aiuto ai giovani che studiano il Calcolo per la prima volta.

Torino, ottobre 1893. F. CASTELLANO.

(¹) PEANO, *Lezioni di analisi infinitesimale*, vol. 1°, 1893. Lo stesso metodo è indicato nel Trattato di calcolo del Serret.

G. Garbieri — *Teoria e applicazioni dei determinanti.* — Reggio nell'Emilia, 1893. (Prezzo L. 6).

È uscita recentemente la 2ª edizione della Teoria dei determinanti del chiar. prof. Garbieri « interamente rifatta sulle lezioni date nelle Università di Padova e Genova »: è un libro di 100 pagine in 8° grande. L'autore espone le proprietà fondamentali dei determinanti, basandosi sulle prime proposizioni relative alle inversioni ed alle permutazioni. Ne fa applicazione ai sistemi di n equazioni lineari con n incognite. Si occupa dei determinanti reciproci e delle matrici nulle. Fa alcune applicazioni geometriche. Discute i sistemi di equazioni lineari, omogenee e non omogenee. Relativamente ad un sistema n-k volte indeterminato osserva che « *La scelta delle* n-k *incognite, che si possono lasciare arbitrarie non ha nessun' influenza sulle soluzioni: così pure la scelta del sistema risolvente* » (1). Si occupa dell'eliminazione di un'incognita comune a due equazioni. In un capitolo intitolato « Generalizzazione di teoremi sui determinanti » dà le prime proprietà dei determinanti simmetrici ed emisimmetrici, lo sviluppo d'un determinante secondo i minori compresi in matrice formata di sue linee parallele, il teorema generale di moltiplicazione delle matrici, quello relativo al valore d'un minore del determinante reciproco di un determinante dato. Dà poi lo sviluppo di un determinante secondo gli elementi di due linee perpendicolari fra loro; considera la forma quadratica aggiunta d'una forma quadratica di determinante nullo. S'occupa della scomposizione di un determinante in determinanti a diagonali vuote, e dello sviluppo secondo le potenze di una parte comune a tutti gli elementi principali. Consacra l'ultimo capitolo ai determinanti funzionali.

Il chiar. prof. Garbieri è conosciutissimo anche come valente scrittore di libri didattici per cui non mi fermo a mettere in evidenza la chiarezza e la semplicità con cui sono esposti i diversi argomenti trattati nel libro di cui ho detto brevemente.

F. Giudice.

---

(1) Per la dimostrazione di questo teorema e di altri che completano le proprietà dei sistemi d'equazioni lineari rimanda ad una sua memoria. Per pura ragione storica, osservo che il teorema qui riprodotto fu anch'esso enunciato e dimostrato la prima volta, almeno in forma esplicita, nella mia pubblicazione citata favorovolmente dal prof. Garbieri nella memoria accennata: V. F. Giudice: *Sulle equazioni simultanee.* Rivista di matematica elementare, Novara, 1883. Vi si trova quindi anche la nozione di sistema risolvente; vi manca quella di caratteristica, che semplifica qualche enunciato. V. A. Capelli: *Rivista di Mat.*, 1892, pag. 54. — V. G. Garbieri: *Giornale di Mat.*, 1892, pag. 43.

A. Ziwet — *An elementary treatise on theoretical mechanics.* Part I. *Kinematics.* — New Jork, Macmillan, 1893, pag. VIII + 181.

Il titolo stesso spiega la natura e l'indole del libro, destinato agli studenti dei collegi e Università d'America. Il libro è diviso in due capitoli. Il I è intitolato: Geometria del moto. Vi sono studiati i moti di traslazione, di rotazione, il moto piano, il moto attorno ad un punto, ed il moto generale d'un corpo rigido nello spazio.

Le traslazioni si rappresentano mediante *vettori*, su cui si definiscono le ordinarie operazioni geometriche. Le rotazioni, specialmente infinitesime, vengono rappresentate mediante *rotori* (rotors) (*).

Nel capitolo II, Cinematica, si comincia colla misura del tempo, e si passa ai concetti di velocità e di accelerazione, prima pel moto rettilineo, poi pel moto nel piano, e infine pel moto nello spazio. Fra i moti piani sono studiati gli armonici e la loro composizione, il moto pendolare, il moto dei pianeti, il moto d'una figura piana nel proprio piano, i poligoni snodati, ecc. Nello spazio si studia dapprima il moto d'un punto, e poi quello d'un corpo rigido.

Tutto il libro è scritto con molta chiarezza e con tutta quell'arte che esige la didattica; le varie teorie sono accompagnate da numerosi esempi colle loro risposte. Sicchè siamo certi che esso sarà di utile giovamento agli studenti ai quali è destinato, ma potrà essere anche una utile guida ai nostri insegnanti.

È ancora a notarsi il lusso tipografico con cui il libro è stampato, e al quale pur troppo noi siamo poco abituati. (P.).

(*) Questi enti sono identici a quelli che nelle mie Lezioni di Analisi chiamai p^2.

Sul Formulario di Matematica.

Nota. Preghiamo vivamente i lettori di inviarci tutte quelle aggiunte e correzioni che possono farsi sia al *Formulario* che alle *Note storiche.*

CORREZIONI ED AGGIUNTE.

[1] I §2 si aggiunga:

25'. $a \supset b \cup c \,.=.\, a - b \supset c$ $\qquad \left[\binom{-b}{b} \text{P25} = \text{P25}'\right]$

28'. $ac \supset b \,.\, a \supset b \cup c \,.\supset.\, a \supset b$

36. $a \supset c \,.\cup.\, b \supset c \,.\supset.\, ab \supset c$

37. $c \supset a \,.\cup.\, c \supset b \,.\supset.\, c \supset a \cup b.$

[2] I §3 si corregga la P28 come segue:

28. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

[3] II §2 si aggiunga:

42'. $a/b = c/d \,.=.\, ad = bc\,.$

[4] II §3 P12 si corregga come segue:

$\text{mod}\,(a^m) = (\text{mod}\, a)^m.$

[5] II §3 P14 si corregga:

$a \,\varepsilon -\mathrm{Q} \,.\supset.$ ecc.

[6] II §4 si aggiunga:

66. $a^3 + b^3 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

67. $a^4 + b^4 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

[7] II §5 P27 invece di $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ si legga $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

[8] II §9 P17 si corregga:

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.$ ecc. (P.)

[9] II §1 P56 invece di $p-1+\mathrm{Z}_{q-p}$ si legga $p-1+\mathrm{Z}_{q+1-p}$ (F. Giudice)

Note storiche alla parte II del Formulario.

§ 2.

6. EUCLIDES, VII, 16:

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ

8, 46. EUCLIDES, II, 1. — ID. V, 1, 2.

18-20. DIOPHANTUS, *Arith.* I, 9:

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. Λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν.

36. EUCLIDES, V, 16. — 37. ID. 18. — 39. ID. 12. — 40. ID. 22. — 41. ID. 23. — 42. ID. 24. — 42'. ID. VII, 19.

§ 3.

7. EUCLIDES, IX, 11. — 8. ID. VIII, 13; IX, 3, 9. — 9. ID. VIII, 11, 12; IX, 4.

§ 4.

4. EUCLIDES, II, 4:

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

6. EUCLIDES, II, 9.

7. EUCLIDES, II, 5.

47. DIOPHANTUS, *Arith.* III, 22. — 48. ID. II. 8, 9.

51. LAGRANGE, *Démonstration d'un théorème d'Arithmétique* (Nouv. Mém. de Berlin, 1770, pag. 133).

52. EULER, *Demonstratio theoremi Fermatiani* (Novi Comm. Petrop. 1760, p. 53-54).

66, 67. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae,* pag. 269.

§ 5.

24. EUCLIDES, V, 25.

§ 6.

21. EUCLIDES, X, 42. — 22, 23. ID. X, 54-59, 91-96.

§ 7.

21-31. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, et expeditissimi explicatio.* Authore et Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, etc. Scoto. Edinburgi, ex officina Andreæ Hart, Bibliopólæ CIↃ.DC.XIV.

Pag. 20.

Ex his praelibatis judicent eruditi quantum emolumenti adferent illis logarithmi: quandoquidem per eorum additionem multiplicatio, per substractionem divisio, per bipartitionem extractio quadrata, per tripartitionem cubica, et per alias faciles prostaphaereses omnia graviora calculi opera evitantur.

$$\left[\log \text{nep}\, x = -10^7 \log_e \left(\frac{x}{10^7}\right)\right]$$

§ 8.

6. DIOPHANTUS, I, 1. — 7. ID. I, 2, 4. — 8. ID. I, 16. — 9. ID. I, 18, 19.

23. EUCLIDES, II, 5, 6. Cfr. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Libro I, pag. 44, 45.

LEONARDO PISANO, de filiis Bonaccii, *Liber abbaci*, 1202. (Publicato da B. Boncompagni, pag. 497).

(Si) volueris invenire quantitatem census $[x^2]$, *qui cum datis radicibus* $[+px]$ *equetur numero dato* $[=-q]$, *sic facias: accipe quadratum medietatis radicum* $[p^2/4]$, *et adde eum super numerum datum* $[p^2/4-q]$; *et eius, quod pervenerit, radicem accipe* $[\sqrt{p^2/4-q}]$; *de qua numerum medietatis radicum tolle* $[\sqrt{p^2/4-q}-p/2]$; *et quod remanserit erit radix quesiti census.*

24. EUCLIDES, VI, 28, 29.

25. DIOPH. I, 30. — 26. ID. I, 31, 33. — 27. ID. I, 32.

28. BACHET, *Commentaria in Diophantum,* I, 33, quaestio 1ª.

§ 9.

7. CAUCHY, *Analyse algébr.*, c. 7 (1821).

§ 10.

1-2. EUCLIDES.

3. NEWTON, *Epistola ad D. Henricum Oldenburg,* 13 junii 1676.

5, 14. PYTHAGORAS (V. M. CANTOR, *Geschichte der Mathematik*, I, 135).

6. ARCHIMEDES, *Spiral.* 10.

7. NICOMACUS, *Arith.* II, 20.

8, 9. FERMAT. JAC. BERNOULLI, *Ars conjectandi*, p. 27.

10-12. FERMAT, *Oeuvres*, I, 341.

10. ARIABHATTAS, 21.

Note sioriche alla parte III del Formulario.

§ 1.

29. EUCLIDES, VIII, 6, 7, 14-17, 22-25.

§ 3.

6-7. EUCLIDES, VII, 1-2.

9. EUCLIDES, VII, 2:

. . . ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

13. EUCLIDES, VII, 3. — 16. ID. VII, 25, 27; VIII, 2, 3. — 17. ID. VII, 20-21. — 19. ID. VII, 23, 24. — 19'. ID. VII, 26.

§ 4.

5. EUCLIDES, VII, 34. — 8, 9. ID. VII, 35. — 11. ID. VII, 36, 37.

§ 5.

4. EUCLIDES, VII, 31-32. — 6. ID. VII, 29. — 9. ID. VII, 30. — 10. ID. IX, 12. — 11. ID. IX, 13.

12. FERMAT, *Opera Math.*, Tolosae 1679. — EULER, *Comm. Petrop.*, t. 8, p. 143, 1736; *N. C. Petrop.* t. 8, p. 70.

13. WILSON; V. WARING, *Med. Alg.* 1782, p. 380; LAGRANGE, *Berlin, Mém.* 1771; EULER, *Opusc. anal.* t. I, p. 329; *Petrop.* 1783.

15, 16. EUCLIDES, IX, 20.

17, 18. LEGENDRE, *Théorie des nombres*, prop. XX.

LISTA BIBLIOGRAFICA DELLA TEORIA DEGLI AGGREGATI

di G. Vivanti *in Mantova* (*).

I. G. Cantor. *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* Math. Ann., T. 5, 1872, p. 123-132. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 336-348.

II. G. Cantor. *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.* Journ. für Math., T. 77, 1874, p. 258-272. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 305-310.

III. G. Cantor. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journ. für Math., T. 84, 1877, p. 242-258. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 311-328.

IV. U. Dini. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali,* Pisa 1878. Deutsche Uebersetzung von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig 1892.

V. J. Thomae. *Sätze aus der Functionentheorie.* Nachr. von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1878, p. 466-468.

VI. J. Lüroth. *Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen auf einander.* Sitzungsberichte der phys.-med. Societät zu Erlangen, T. 10, 1878, p. 190-195.

VII. G. Cantor. *Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten.* Nachr. von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1879, p. 127-135.

VIII. G. Cantor. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten,* I. Math. Ann., T. 15, 1879, p. 1-7. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 349-356.

IX. E. Netto. *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journ. für Math., T. 86, 1879, p. 263-268.

X. G. Cantor. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten,* II Math. Ann, T. 17, 1880, p. 355-358. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 357-360.

XI. G. Cantor. *Id.,* III. Math. Ann., T. 20, 1882, p. 113-121. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 361-371.

XII. G. Cantor. *Id.,* IV. Math. Ann., T. 21, 1882, p. 51-58. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 372-380.

XIII. G. Mittag-Leffler. *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable.* Comptes rendus des séances de l'Ac. des Sc. de Paris, T. 94, 1882, p. 414-416, 511-514, 713-715, 781-783, 938-941, 1040-1042, 1105-1108, 1163-1166; T. 95, 1882, p. 335-336.

(*) Questa teoria costituisce la parte VI del *Formulario,* in corso di stampa.

XIV. P. du Bois-Reymond. *Die allgemeine Functionentheorie*, 1, Tübingen 1882. Tr. fr. di G. Milhaud e A. Girot, Paris 1887.

XV. W. Veltmann. *Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function*. Zeitschr. für Math. und Ph., T. 27, 1882, p. 176-179.

XVI. W. Veltmann. *Die Fourier'sche Reihe*. Zeitschr. für Math. und. Ph., T. 27, 1882, p. 193-235.

XVII. W. Veltmann. *Zur Theorie der Punktmengen*. Zeitschr. für Math. und Ph., T. 27, 1882, p. 313-314,

XVIII. G. Cantor. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, V. Math. Ann., T. 21, 1883, p. 545-596. Pubblicato anche a parte sotto il titolo: *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre,* Leipzig 1883. Estratto in francese: Acta Math., T. 2, 1883, p. 381-408.

XIX. G. Cantor. *Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à* n *dimensions. Première communication*. Acta Math., T. 2, 1883, p. 409-414.

XX. I. Bendixson. *Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points*. Acta Math., T. 2, 1883, p. 415-429.

XXI. I. Bendixson. *Några studier öfver oändliga punktmängder*. Ofvers. af. vet. akad. förhandlingar (Stockholm), T. 40, 1883, n° 2, p. 31-35.

XXII. M. Guichard. *Théorie des points singuliers essentiels*. Ann. sc. de l'éc. norm. sup., S. II, T. 12, 1883, p. 301-394.

XXIII. G. Cantor. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, VI. Math. Ann., T. 23, 1884, p. 453-488.

XXIV. G. Mittag-Leffler. *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante*. Acta Math., T. 4, 1884, p. 1-79.

XXV. G. Cantor. *De la puissance des ensembles parfaits de points*. Acta Math., T. 4, 1884, p. 381-392.

XXVI. E. Phragmén. *Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre*. Acta Math., T. 5, 1884, p. 47-48.

XXVII. E. Phragmén. *En ny sats inom teorien för punktmängder*. Ofvers. af vet. ak. förh. (Stockholm), T. 41, 1884, n° 1, p. 121-124.

XXVIII. L. Scheeffer. *Allgemeine Untersuchungen überRectification der Curven*. Acta Math. T. 5, 1884, p. 49-82.

XXIX. L. Scheeffer. *Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen*. Acta Math., T. 5, 1884, p. 183-194, 279-296.

XXX. I. Bendixson. *Sur la puissance des ensembles parfaits de points*. Bihang till vet. ak. handlingar (Stockholm), T. 9, 1884, n° 6.

XXXI. I. Bendixson. *Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles*. Bihang till vet. ak. handlingar (Stockholm), T. 9, 1884, n° 7.

XXXII. P. Tannery. *Note sur la théorie des ensembles*. Bull. de la soc. math. de France, T. 12, 1884, p. 90-96.

XXXIII. G. Ascoli. *Le curve limite di una varietà data di curve*. Mem. dell'Acc. dei Lincei, Serie III, T. 18, 1884, p. 521-586.

XXXIV. O. Stolz. *Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth.* Math. Ann., T. 23, 1884, p. 152-156.

XXXV. A. Harnack. *Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige.* Math. Ann., T. 23, 1884, p. 285-288.

XXXVI. M. Lerch. *Prispevek k nauce o mnozinach bodu v rovine.* Sitzungsb. d. böhmischen Ges. der Wiss. (Prag), 1884, p. 176-178.

XXXVII. E. Phragmén. *Ueber die Begrenzungen von Continua.* Acta Math., T. 7, 1885, p. 43-48.

XXXVIII. G. Cantor. *Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume* G_n. Acta Math., T. 7, 1885, p. 105-124.

XXXIX. A. Harnack. *Ueber den Inhalt von Punktmengen.* Math. Ann., T. 25, 1885, p. 241-250.

XL. C. Gutberlet. *Das Problem des Unendlichen.* Zeitschr. für Philosophie (Halle), T. 88, 1885, p. 179-223.

XLI. F. Meyer. *Elemente der Arithmetik und Algebra*, Halle 1885.

XLII. B. Kerry. *Ueber G. Cantor 's Mannigfaltigkeitsuntersuchungen.* Vierteljahrssch. für wissenschaftliche Philosophie, T. 9, 1885, p. 191-232.

XLIII. P. Tannery. *Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor.* Revue philosophique, octobre 1885.

XLIV. G. Eneström. *Om G. Cantor 's uppsats: Ueber die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen.* Ofvers. af vet. ak. förh., T. 42, 1885, n° 10, p. 69-70.

XLV. G. Cantor. *Ueber die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen.* Bihang till vet. akad. handlingar T. 11, 1886, n° 19. Il principio di questo scritto fu riprodotto in Zeitschr. für Phil., T. 88, 1886, p. 224-233, e in Natur und Offenbarung (Münster), T. 32, 1886, p. 46-49. La fine fu pubblicata a parte sotto il titolo: *Zur Frage des actualen Unendlichen.*

XLVI. M. Lerch. *O soustavách bodu a jich vyznamu v analysi.* Casopis pro pestovani mathem. (Praga), T. 15, 1886, p. 211.

XLVII. O. Biermann. *Theorie der analytischen Functionen*, Leipzig 1887.

XLVIII. G. Loria. *La definizione dello spazio a* n *dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor.* Giorn. di mat., T. 25, 1887, p. 97-108.

XLIX. G. Cantor. *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.* Zeitschr. für Phil., T. 91 e 92, 1887.

L. K. Beckman. *Om dimensionsbegreppet och dess betydelse för matematiken*, Upsala, 1888.

LI. H. Schwarz. *Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen*, Halle 1888.

LII. R. Bettazzi. *Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari.* Annali di mat., Serie II, T. 16, 1888, p. 49-60.

LIII. R. Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1888.

LIV. G. Ascoli. *Riassunto della mia memoria: « Le curve limite di una varietà data di curve », ed osservazioni critiche alla medesima.*

Rendiconti dell'Ist. Lomb., Serie II, T. 21, 1888, p. 226-239, 257-265, 294-300, 365-371.

LV. G. Vivanti. *Fondamenti della teoria dei tipi ordinati.* Ann. di mat., Serie II, T. 17, 1889, p. 1-35.

LVI. C. Arzelà. *Funzioni di linee.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, Serie IV, T. 5, 1889, 1° sem., p. 342-348.

LVII. G. Peano. *Arithmetices principia, nova methodo exposita,* Torino 1889.

LVIII. R. de Paolis. *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi.* Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Serie III, T. 3, 1890.

LIX. G. Peano. *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane.* Math. Ann., T. 36, 1890, p. 157-160.

LX. G. Peano. *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.* Math. Ann., T. 37, 1890, p. 182-228.

LXI. D. Hilbert. *Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flachenstück.* Naturf. Ges. Bremen, 1890, p. 11-12; Math. Ann., T. 38, 1891, p. 459-460.

LXII. S. Dickstein. *Pojeçia i metody matematyki,* I, Warszawa 1891.

LXIII. G. Veronese. *Fondamenti di geometria,* Padova 1891.

LXIV. G. Vivanti. *Notice historique sur la théorie des ensembles.* Bibliotheca mathem., T. 6, 1892, p. 9-25.

LXV. L. Milesi. *Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni.* Rivista di Matematica, T. 2, 1892, p. 103-106.

LXVI. G. Cantor. *Ueber eine elementare Frage der Mannnigfaltigkeitslehre.* Jahresbericht d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung, T. 1, 1892, p. 75-78. Tr. it. di G. Vivanti in Riv. di mat., T. 2, 1892, p. 165-167.

LXVII. E. Amigues. *La théorie des ensembles et les nombres incommensurables.* Ann. de la Fac. des Sc. de Marseille, T. 2, 1892, p. 33-43.

LXVIII. F. Giudice. *Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di G. Cantor.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. 1, 1892, p. 161-164.

LXIX. C. Jordan. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 11 éd., T. I,* Paris 1892-93.

LXX. G. Peano. *Lezioni di analisi infinitesimale,* Torino 1893.

Fine del Volume III

RIVISTA

DI

MATEMATICA

EDITA

DA

G. PEANO

Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

Volume IV

TORINO

FRATELLI BOCCA

LIBRAI DI S. M.

1894

INDICE

Pag.

Esercizi di fisica matematica (V. Volterra) 1

La géométrie des masses (C. Stephanos) 15

A difesa della seconda edizione degli « Elementi d'Euclide ». Altra risposta al prof. Lazzeri (M. Gremigni). 17

A proposito della nota « Rettificazione di alcune inavvertenze in un moderno trattato di geodesia » (O. Zanotti-Bianco) . . 21

Sulle derivate apparenti (G. Ascoli) 22

Ernesto Cesàro, *Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale* (F. Giudice) 25

Giulio Vivanti, *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica* (G. Loria) 28

Sulla parte V del Formulario « Teoria dei gruppi di punti » (G. Peano) 33

Trasformazione d'ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli (M. Pieri) 40

Un'osservazione intorno alle formole per l'addizione degli archi nella Trigonometria del Serret (S. Catania) 43

Risoluzione della Questione IV (M. Canonica) 46

Sui fondamenti della Geometria (G. Peano) 51

Giuseppe Battaglini, Cenno necrologico (E. Pascal) 91

Sugli insiemi continui e sugli insiemi connessi (E. Maccaferri) . 97

Lettera di E. Catalan 105

Catalogue of the University of Texas for 1893-4 (G. Vailati) . . 106

Sulle permutazioni relative ad una data (G. Musso) 109

Un precursore della Logica Matematica (G. Peano) 120

Pensiero matematico moderno, Conferenza del prof. Simone Newcomb (O. Zanotti-Bianco) 121

Sulla parte VI del Formulario (G. Vivanti) 135

Prof. A. Sterza, *Aritmetica razionale per il Ginnasio superiore* (G. Vivanti) 141

C. Burali-Forti, *Logica Matematica* (G. Vailati) 143

Sulla definizione d'equivalenza in Geometria (S. Sbrana) . . . 147

Appunti di Aritmetica (I. Zignago) 151

Pag.
Association française pour l'avancement des Sciences - Congrès de Caen 1894 159
Sulla Parte VII del Formulario (R. Bettazzi) 161
Sulla Parte VIII del Formulario (F. Giudice) 163
Hermann Grassmanns, *Gesammelte mathematische und physicalische Werke* (G. Peano) 167
Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga (Gino Fano) 170
Intorno ad alcune identità algebriche (E. Sadun) 189

RIVISTA DI MATEMATICA
Vol. IV. — 1894

ESERCIZI DI FISICA MATEMATICA

del Prof. VITO VOLTERRA

Mi permetto di presentare ai lettori di questa Rivista alcune note sopra varii punti delle teorie fisico-matematiche. Questi articoli non hanno lo scopo di offrire sia risultati originali, sia ricerche condotte con metodi originali. Come il loro titolo lo denota essi hanno un fine molto più modesto, quale è quello di presentare alcune semplici applicazioni delle teorie che ordinariamente si svolgono in un corso di fisica matematica; ed è perciò che spero abbiano da riescire non inutili per chi cerchi delle esercitazioni sopra argomenti uditi nelle scuole.

I

Sulle funzioni potenziali.

1. Nella teoria del potenziale si dimostra che, se in un dato campo, ove non esistono masse, le tre derivate della funzione potenziale sono nulle, esse si conservano sempre nulle finchè non si attraversano delle superficie o degli spazii ove sono distribuite delle masse. Il teorema sussiste, tanto se il *campo* dato è una porzione qualunque dello spazio, quanto se esso è un pezzo di superficie così piccola come si vuole.

Questo teorema conduce alla conseguenza che, quando sopra un elemento di superficie si conosce il valore della funzione potenziale e della sua derivata rispetto alla normale alla superficie, la funzione stessa è determinata in tutta la parte dello spazio i cui punti possono collegarsi mediante una linea continua colla superficie, senza incontrare masse. Mediante una ben nota formula dovuta al Poisson si risolve il problema della costruzione effettiva della funzione potenziale quando si suppongono noti i valori di essa e della sua derivata rispetto alla normale nei punti di un pezzo di piano tanto piccolo quanto si vuole.

Questa notevole formula stabilisce un legame fra ogni funzione potenziale ed una funzione di *due* variabili complesse. Indipendentemente da questo resultato il Mehler (*) ed il Beltrami (**) hanno mostrato che i *potenziali simmetrici* possono connettersi colle funzioni di una variabile complessa, per mezzo di una formula la quale, senza ricorrere a sviluppi in serie (***), risolve il problema di costruire una funzione potenziale simmetrica quando se ne conosce il valore lungo una porzione dell'asse di simmetria.

I due resultati hanno relazione molto intima fra loro. Il ravvicinarli e farli dipendere in modo molto semplice dalle formule sul potenziale dell'ellissoide, che di solito si espongono in ogni corso sulla teoria del potenziale, credo che sia cosa non del tutto inutile, tanto più che la formula di Poisson suole ordinariamente ricavarsi dall'integrale generale dell'equazione del suono, ed in un corso sulla teoria del potenziale può riescire comodo di ottenerla invece direttamente valendosi soltanto di resultati già stabiliti nella detta teoria.

2. Partendo dalla funzione potenziale di un'ellissoide di rivoluzione intorno all'asse maggiore, e supponendo che due degli assi tendano a zero, si trova la funzione potenziale di una retta sotto la forma

$$V = \pi a \int_{\lambda_1}^{\infty} \mathrm{f}\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{a^2 + \lambda}},$$

in cui $2a$ rappresenta la lunghezza della retta, x, y, z le coordinate del *punto potenziato,* riferite alla retta presa come asse z ed a due altre x e y ortogonali, supponendo l'origine nel punto di mezzo della retta stessa. Fra la densità in un punto della retta e la funzione f passa la relazione

$$\rho(z) = \pi \mathrm{f}\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right). \tag{1}$$

λ è la radice positiva dell'equazione

$$H = 1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda} = 0.$$

(*) *Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern.* Math. Ann. XVIII Bd.

(**) *Sulle funzioni associate e specialmente di quelle della calotta sferica.* Mem. Acc. di Bologna, S. IV, T. IV.

(***) Vedi THOMSON und TAIT. *Handbuch der Theoretischen Phisik.* I Bd., II Th., § 546.

In modo analogo la funzione potenziale di un disco circolare di raggio b giacente nel piano $x\,y$ col centro nell'origine può mettersi sotto la forma

$$V_1 = \pi b^2 \int_{\lambda_2}^{\infty} \varphi \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\sqrt{\lambda}},$$

ove fra la densità $\rho_1(s)$ del disco in un punto distante dal centro di $z = b\sqrt{1 - s}$ e la funzione φ passa la relazione

$$\rho_1(s) = \int_0^s \frac{\varphi'(\mu)}{\sqrt{s - \mu}}\, d\mu + \frac{\varphi(0)}{\sqrt{s}} \tag{2 a}$$

la cui relazione inversa è

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^s \frac{\rho_1(\mu)\, d\mu}{\sqrt{s - \mu}}. \tag{2 b}$$

λ_2 è la radice positiva dell'equazione

$$H_2 = 1 - \frac{x^2 + y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\lambda} = 0 \ (*).$$

Ora V diventa eguale a V_1 prendendo

$$i\,b = a \qquad , \qquad \varphi(s) = -\frac{1}{a}\, f(s).$$

Infatti avremo

$$V_1 = -\pi a^2 \int_{\lambda_2}^{\infty} -\frac{1}{a}\, f\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{(-a^2 + \lambda)\sqrt{\lambda}}$$

e cambiando in questa formola λ in $a^2 + \lambda$ si ottiene

$$V_1 = \pi a \int_{\lambda_1}^{\infty} f\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{a^2 + \lambda}} = V. \tag{3}$$

Dalle (2) segue

$$\rho_1(s) = -\frac{1}{a} \int_0^s \frac{f'(\mu)\, d\mu}{\sqrt{s - \mu}} - \frac{1}{a} \frac{f(0)}{\sqrt{s}}$$

e dalla (1)

$$f(\mu) = \frac{1}{\pi}\, \rho\left(a\sqrt{1 - \mu}\right)$$

$$f'(\mu) = -\frac{a}{2\pi\sqrt{1 - \mu}}\, \rho'\left(a\sqrt{1 - \mu}\right);$$

(*) Vedi Betti, *Teoria delle Forze Newtoniane*, pag. 85 e seguenti.

quindi

$$(4a) \qquad \rho_1(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \frac{\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right)}{\sqrt{s-\mu}\,\sqrt{1-\mu}}\,d\mu - \frac{1}{a\mu}\frac{\rho(a)}{\sqrt{s}}\,.$$

Dalla (2*b*) si deduce poi la relazione inversa alla presente.

$$(4b) \qquad \rho(s) = -a\int_0^{1-\frac{s^2}{a^2}} \frac{\rho_1(\mu)\,d\mu}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}-\mu}}$$

Osserviamo che, come la funzione

$$\frac{m}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

rappresenta la funzione potenziale di un punto di massa m e di coordinate x_1, y_1, z_1, così potremo dire che

$$\frac{m}{\sqrt{[x-(x_1+i\,x_2)]^2+[y-(y_1+i\,y_2)]^2+[z-(z_1+i\,z_2)]^2}}$$

è la funzione potenziale di una massa m concentrata nel punto immaginario dello spazio avente le coordinate $x_1+i\,x_2$, $y_1+i\,y_2$, $z_1+i\,z_2$.

Ciò premesso le formule (3), (4*a*), (4*b*) conducono alla seguente proposizione:

Teorema 1*a*. *Abbiansi tre assi* x, y, z *ortogonali, ed una massa distribuita sull'asse* z *dal punto* $-a$ *al punto* a *colla densità* $\rho(z)$ *(essendo* $\rho(z)=\rho(-z)$ *). La funzione potenziale di una tale massa è uguale a quella di una massa distribuita nei punti immaginarii del piano* $x\,y$ *di coordinate*

$$x = i\,r\cos\theta \quad , \quad y = i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0)$$

colla densità superficiale

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \frac{\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right)}{\sqrt{s-\mu}\,\sqrt{1-\mu}}\,d\mu - \frac{1}{a\pi}\frac{\rho(a)}{\sqrt{s}}$$

essendo

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2}\,.$$

Teorema 1*b*. *Abbiasi una massa distribuita nei punti del cerchio di raggio b situato nel piano $x\,y$ col centro nell'origine, colla densità superficiale $\rho_1(r)$. Questo disco avrà la stessa funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z di coordinate*

$$i\,z \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità

$$\rho = -\,i\,b \int_0^s \frac{\rho_1(\mu)\,d\,\mu}{\sqrt{s-\mu}}$$

essendo

$$s = 1 - \frac{z^2}{b^2}.$$

In particolare, prendendo successivamente le densità ρ e ρ_1 costanti ed eguali a K, i teoremi precedenti divengono:

Teorema 2*a*. *La funzione potenziale di una massa di densità costante K distribuita sull'asse z dal punto $-a$ al punto a è uguale alla funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii del piano $x\,y$ di coordinate*

$$x = i\,r\cos\theta \quad , \quad y = i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0)\ ,$$

colla densità superficiale

$$\rho_1 = -\,\frac{K}{\pi\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Teorema 2*b*. *La funzione potenziale di un disco omogeneo di densità K di raggio b situato nel piano $x\,y$ col centro nell'origine, è uguale alla funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z di coordinate*

$$i\,z \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità lineare

$$\rho = -\,2\,i\,K\sqrt{b^2-z^2}\,.$$

Un'altra conseguenza del teorema 1*a* è la seguente.

Teorema 3*a*. *La funzione potenziale di due punti di masse $+1$ e -1 situati sull'asse z alle distanze rispettive $+a$ e $-a$ dall'origine, è eguale alla funzione potenziale di un doppio strato distribuito nei punti immaginari del piano $x\,y$ di coordinate*

$$x = i\,r\cos\theta \quad , \quad y = i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0)$$

col momento

$$\mu = -\,\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Supponiamo infatti dapprima distribuito sull'asse z dal punto $-a$ al punto a una massa omogenea M_1 di densità $-K$. Essa avrà la stessa funzione potenziale della massa M_1' di densità superficiale

$$\rho_1 = \frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}$$

distribuita nei punti di coordinate

$$x = i\,r\cos\theta \quad , \quad y = i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad z = 0 \qquad (a \geqq r \geqq 0)\,.$$

Distribuiamo poi sull'asse z una massa M_2 della densità $+K$ dal punto $-a+\varepsilon$ al punto $a+\varepsilon$. Ad essa corrisponderà una massa M_2' distribuita nei punti di coordinate

$$x = i\,r\cos\theta \quad , \quad y = i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad z = \varepsilon \qquad (a \geqq r \geqq 0)$$

colla densità superficiale

$$\rho_2 = -\frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}\,.$$

Prendiamo l'insieme delle due masse M_1 e M_2 e facciamo tendere ε a zero, mentre $K\varepsilon$ si conserva eguale ad 1. Otterremo al limite sull'asse z due punti di masse $+1$ e -1 alle distanze $+a$ e $-a$ dall'origine. Prendendo invece l'insieme delle due masse M_1' e M_2' al limite si otterrà un doppio strato di momento

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}\,.$$

Il teorema resta quindi dimostrato.

In modo del tutto analogo partendo dal teorema ($2b$) relativo al disco omogeneo e passando da esso al caso di un anello circolare si trova il teorema seguente:

Teorema $3b$. *Un anello circolare di densità eguale ad* 1 *situato nel piano $x\,y$ col centro nell'origine ha la stessa funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z*

$$i\,z \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità

$$-\frac{2\,i\,b}{\sqrt{b^2 - z^2}}\,.$$

3. Premessi questi teoremi, denotiamo per semplicità con m la massa distribuita sull'asse z secondo l'ipotesi fatta nel teorema $2a$ e con m_1' la massa equivalente distribuita nei punti immaginarii del piano $x\,y$ e analogamente indichiamo con m_2 l'insieme dei due punti materiali considerati nel teorema $3a$ e con m_2' il doppio strato equivalente distribuito nei punti immaginarii del piano $x\,y$. Abbiasi un sistema qualunque di masse che supporremo esterne al segmento dell'asse compreso fra $z = -a$ e $z = +a$. Sia V la funzione potenziale delle masse m. Pel teorema di Gauss il potenziale P_1 di m su m_1 sarà eguale al potenziale di m su m_1'. Ora il potenziale di m su m_1 si calcola immediatamente e si trova

$$P_1 = K \int_{-a}^{a} V(0, 0, z)\, dz .$$

Per avere il potenziale su m_1' bisognerà prendere la V nei punti del piano $x\,y$ cioè $V(x, y, 0)$ e prolungarla per i valori complessi di x e di y. Otterremo così la funzione di due variabili complesse

$$V(x + i\xi, y + i\zeta, 0) \tag{5}$$

tale, che

$$V(x + i\xi, x + i\zeta, 0)_{\xi=0,\zeta=0} = V(x, y, 0) .$$

La (5) dà i valori della funzione potenziale delle masse m nei punti immaginarii del piano x, y; quindi otterremo immediatamente:

$$P_1 = -\frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\,\frac{i\,r \,.\, i\,d\,r}{\sqrt{a^2 - r^2}} =$$

$$= \frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\,\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2 - r^2}} .$$

Eguagliando i due valori trovati per P_1 si ha

$$\int_{-a}^{a} V(0, 0, z)\, dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\,\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2 - r^2}} ,$$

e derivando i due membri rispetto ad a

$$V(0,0,a) + V(0,0,-a) =$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{d}{da}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\,\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2 - r^2}} .$$

In modo analogo prendiamo successivamente il potenziale P_2 delle masse m su m_2 e m_2', tenendo conto del modo con cui vanno calcolati i potenziali sui doppi strati otterremo

$$P_2 = V(0,0,a) - V(0,0,-a),$$

$$(6) \qquad P_2 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{i\,r\,.\,i\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

ove V'_z rappresenta la derivata parziale di V rapporto a z; funzione che dovremo supporre prolungata anch'essa per i valori complessi delle variabili x ed y.

Eguagliando fra loro i due valori trovati per P_2, abbiamo

$$(7) \qquad V(0,0,a) + V(0,0,-a) =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Dalle (6) e (7) segue

$$V(0,0,a) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{da}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}} +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(i\,r\cos\theta, i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Cambiando l'origine nel piano x, y e ponendo z in luogo di a la formula precedente dà luogo all'altra

$$(A) \qquad V(x,y,z) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z V(x+i\,r\cos\theta, y+i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{z^2-r^2}}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z V'_z(x+i\,r\cos\theta, y+i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)\frac{r\,d\,r}{\sqrt{z^2-r^2}},$$

la quale è valida ammettendo che la parallela all'asse z che dal punto $x, y, -z$ va al punto x, y, z sia esterna alle masse m.

Questa formula (*) scioglie evidentemente la questione di determinare una funzione potenziale $V(x, y, z)$ quando si conosce sopra un pezzo di piano σ esterno allo spazio occupato dalle masse, il suo valore e quello della sua derivata rispetto alla normale al piano σ. La soluzione si otterrà prendendo gli assi x, y, z in modo che il pezzo di piano σ appartenga al piano x, y. Bisognerà quindi considerare le funzioni note $V(x, y, 0)$, $V'_z(x, y, 0)$ e prolungarle pei valori complessi delle variabili x e y; finalmente si applicherà la formula (A). In tal modo si determineranno i valori di $V(x, y, z)$ nella porzione del cilindro S simmetrico rispetto al piano xy, avente per base σ entro il quale non capitano masse: ma una volta determinata la V entro S si potrà prendere un pezzo di piano arbitrario σ' contenuto in S. In esso conosceremo il valore di V e della derivata rispetto alla normale, quindi potremo ripetere per σ' le stesse operazioni già eseguite per σ e così procedendo di seguito potremo prolungare la funzione potenziale V finchè sarà possibile.

Come abbiamo detto fin da principio la formula (A) stabilisce un legame fra le funzioni potenziali e le funzioni di *due* variabili complesse. Il teorema a cui si perviene mediante tale osservazione è il seguente.

Teorema 4. *Siano* $F(\zeta_1, \zeta_2)$ *e* $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$ *due funzioni arbitrarie delle variabili complesse* ζ_1 *e* ζ_2 *reali per i valori reali di* ζ_1 *e* ζ_2.

Sia σ *un campo tale che per tutti i valori reali di* x *e* y *interni a* σ *le funzioni*

$$F(\zeta_1, \zeta_2 \mid x, y) \quad , \quad \Phi(\zeta_1, \zeta_2 \mid x, y)$$

si comportano regolarmente ed oltre a ciò i raggi di convergenza dei detti elementi siano sempre superiori ad R. *In tale ipotesi, posto*

$$\zeta_1 = x + i r \cos\theta \quad , \quad \zeta_2 = y + i r \operatorname{sen}\theta,$$

la funzione

(A') $$V(x, y, z) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z F(x + i r\cos\theta, y + i r \operatorname{sen}\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \Phi(x + i r\cos\theta, y + i r \operatorname{sen}\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

gode delle seguenti proprietà:

(*) La formula (A) è la formula data da Poisson nel § (8) della sua Memoria *Sur les équations aux différences partielles.* Mem. de l'Acad. des Sciences, T. III.

1°) *entro il cilindro* S *simmetrico rispetto al piano* $x\,y$ *avente per base* σ *e per altezza* 2R *è reale finita e continua insieme alle sue derivate ;*

2°) *entro* S *soddisfa l'equazione differenziale*

$$\Delta^2 V = 0$$

3°) *sul pezzo di piano* σ *si ha*

$$V(x, y, 0) = F(x, y) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = \Phi(x, y).$$

Per dimostrare direttamente questo teorema, cominciamo dal considerare la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z F(x + i\,r\cos\theta, y + i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}.$$

Per mezzo di una integrazione per parti, avremo

$$f(x,y,z) = z\,F(x,y) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\sqrt{z^2 - r^2}\,dr$$

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial z} = F(x, y) + \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}.$$

Da questa formula segue

$$\frac{\partial^2 f}{dz^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} +$$
$$\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{dz}\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}.$$

Mediante l'integrazione per parti rispetto a θ, si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2}\mathrm{sen}^2\,\theta + 2\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta_1\,\partial\zeta_2}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\cos^2\theta\right)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

e mediante integrazione per parti rispetto ad r

$$\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} =$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \text{arco sen}\,\frac{r}{z}\right]_0^z -$$

$$\int_0^z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} \cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2} \operatorname{sen}^2\theta\right) \text{arco sen}\,\frac{r}{z}\, dz\,.$$

onde

$$\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{dz}\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2}\operatorname{sen}^2\theta - 2\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\cos^2\theta\right)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2-r^2}}$$

quindi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\right)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}\,.$$

Ora

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varsigma \int_0^z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\right)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}\,,$$

dunque

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0\,.$$

Analogamente ponendo

$$(8') \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varsigma \int_0^z \Phi\left(x + ir\cos\varsigma, y + ir\operatorname{sen}\varsigma\right)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}\,,$$

avremo

$$(9') \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \Phi(x, y) + \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varsigma \int_0^z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_1} i\cos\varsigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_2} i\operatorname{sen}\varsigma\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$(11') \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\,.$$

Dalla (A') segue

$$V(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} + \varphi$$

quindi

$$\Delta^2 V = 0$$

e a cagione delle (9) e (8')

$$V(x, y, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} + \varphi_{z=0} = F(x,y).$$

Dalle (10) e (9') si ha poi

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=0} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \Phi(x, y).$$

È facile finalmente riconoscere che V è reale. Infatti dalla (A') segue che mutando θ in $\theta + \pi$, V non deve mutare, e questo cambiamento equivale a mutare nella (A') stessa, i in $-i$.

4. Procediamo per i potenziali simmetrici, in modo analogo a quello che abbiamo tenuto precedentemente nel caso dei potenziali generali. Chiamiamo m_1 la massa distribuita nell'anello secondo il teorema $3b$, ed m_1' la massa equivalente distribuita nei punti immaginarii dell'asse z. Il potenziale sopra m_1 di un sistema di masse m distribuite simmetricamente rispetto all'asse z, sarà eguale al potenziale di m sopra m_1'.

Denotiamo con $V(r, z)$ la funzione potenziale della massa m. Il potenziale di m sopra m_1 sarà

$$2\pi b V(b, 0)$$

ed il potenziale sopra m_1' si otterrà prolungando i valori di $V(r, z)$ per valori immaginarii di z, ed avremo

$$-\int_{-b}^{b} V(0, iz) \frac{2ib}{\sqrt{b^2 - z^2}} i\, dz$$

quindi eguagliando questi due valori del potenziale risulterà

$$V(b, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{b} V(0, iz) \frac{dz}{\sqrt{b^2 - z^2}}$$

da cui si deduce immediatamente

$$(12) \qquad V(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} V(0, z + is) \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}.$$

Separando in $V(0, z + is)$ la parte reale dalla parte immaginaria, si otterrà

$$V(0, z + is) = v(z, s) + i\,w(z.s) = f(z + is)$$

d'onde

$$\text{(B)} \qquad V(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^r v(z, s)\frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}.$$

Questa formula dà una relazione fra una funzione potenziale simmetrica $V(r, z)$ e la parte reale della funzione di variabile complessa che è reale sull'asse reale z ed assume su questo gli stessi valori di $V(r, z)$ per $r = 0$. La formula precedente si può invertire e si otterrà

$$\text{(B}_1\text{)} \qquad v(z, \varepsilon) = \frac{d}{dr}\int_0^r \frac{V(t, z)}{\sqrt{r^2 - t^2}}\,t\,dt.$$

Passiamo a considerare la funzione associata alla funzione $v(r, z)$ e cerchiamo di esprimerla mediante la funzione di variabile complessa $f(z + is)$. A tal fine immaginiamo due dischi omogenei di densità $-K$ e K e di raggio b normali all'asse z i cui centri sono sopra questo asse ed hanno le coordinate z e $z + h$. Il potenziale delle masse m sopra questi due dischi sarà dato da

$$2\pi\int_0^b K\,r\,V(r, z + h)\,dr + 2\pi\int_0^b - K\,r\,V(r, z)\,dr =$$

$$2\pi\int_0^b K\left\{V(r, z + h) - V(r, z)\right\} r\,dr.$$

Ma tenendo presente il teorema $2b$, lo stesso potenziale potrà esprimersi ancora sotto la forma

$$\int_{-b}^{b} V(0, z + h + is)(-2iK\sqrt{b^2 - s^2})\,i\,ds +$$

$$\int_{-b}^{b} V(0, z + is)(2iK\sqrt{b^2 - s^2})\,i\,ds =$$

$$2\int_{-b}^{b} K\left\{V(0, z + h + is) - V(0, z + is)\right\}\sqrt{b^2 - s^2}\,ds$$

onde avremo, posto $K = \frac{1}{h}$

$$\int_0^b \frac{V(r, z + h) - V(r, z)}{h}\,r\,dr = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \frac{V(0, z + is + h) - V(0, z + is)}{h}\sqrt{b^2 - s^2}\,ds.$$

Facendo tendere h verso zero, si otterrà

$$W(b, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{b} \frac{\partial \, \ddot{V}(0, z+is)}{\partial z} \sqrt{b^2 - s^2} \, ds$$

in cui $W(r, z)$ denota la funzione associata alla $V(r, z)$. La formula precedente si potrà ancora scrivere con facili trasformazioni

$$(12') \qquad W(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} V(0, z+is) \frac{s \, ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

ovvero

$$(C) \qquad W(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{r} w(z, s) \frac{s \, ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}$$

che è appunto la formula che cercavamo.

Le due formule (B) e (C) risolvono il problema: *Dati i valori di una funzione potenziale simmetrica lungo un segmento dell'asse di simmetria esterno alle masse attraenti, determinare la funzione stessa e la funzione associata in punti esterni all'asse appartenenti ad un cilindro circolare retto (avente per asse il segmento dato) entro il quale non si trovano masse attraenti.* Basterà perciò prolungare i valori dati della funzione potenziale simmetrica per valori complessi dell'argomento; quindi applicare le formule (B) e (C).

La géométrie des masses.

Monsieur Haton de la Goupillière vient de publier dans la *Revue générale des Sciences pures et appliquées* (15 juin 1893) un article fort intéressant sur « la géométrie des masses ». Nous allons présenter une analyse succinte de cet article.

En dehors des grandeurs considérées en Géométrie (longueur, surface, volume, angle), on considère en Mécanique trois nouveaux éléments irréductibles, le *temps*, la *force*, la *masse*.

L'étude des mouvements en relation seulement avec le temps constitue la *Cinématique* (Ampère).

L'étude des forces, indépendamment du temps et de la masse, forme la *Statique*.

Enfin l'étude des masses, conjoinctement aux notions de géométrie, et en dehors de toute considération de temps et de force, constitue la *géométrie des masses*.

Mr de la Goupillière est un de ceux qui se sont le plus occupés avec cette branche des Mathématiques (*Nouvelle théorie de la géométrie des masses*, thèse de doctorat, 1857; *Premier et Second Mémoire sur la Géométrie des masses*, Journal de l'École Polytechnique, XXXVII cahier, etc.).

La notion de masse qui entre chez ces recherches peut, au besoin, être remplacée par celle, plus abstraite, de coefficients numériques adjoints d'une manière quelconque aux divers points de l'espace, d'une surface, d'une ligne, etc. (masses positives et négatives).

Les théories qui constituent aujourd'hui la Géométrie des masses consistent dans l'étude des intégrales de la forme $\Sigma\, m\, f(x, y, z)$, étendues a l'ensemble d'un système matériel quelconque, et ne différant, d'un cas à l'autre, que pour la nature de la fonction caractéristique. Elles se rapportent soit à la recherche des centres de gravité et des moments d'inertie, soit du potentiel. Les intégrales considérées dans

ses recherches ont diverses formes, telles que: $\Sigma\, m\, x$, pour les centres de gravité,

$$\Sigma\, m\, x^2\,,\quad \Sigma\, m\,(x^2+y^2)\,,\quad \Sigma\, m\,(x^2+y^2+z^2)$$
$$\Sigma\, m\, m'\,[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]$$

pour les moments d'inertie, et $\Sigma\,\dfrac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ pour le potentiel, etc.

Parmi les recherches relatives aux centres de gravité, commencées par Archimède, on peut citer le théorème de Guldin (généralisé par M. Koenigs), la méthode des tangentes de Tschirnhausen et Lhospital, les propositions de Giulio, Schellbach et Lhuillier sur les figures sphériques, la théorie de Steiner sur les centres de gravité de courbure, celle des surfaces de carène, les théorèmes remarquables de Waring, Newton, Chasles, Liouville, Duhamel, Humbert sur les surfaces algébriques de degré quelconque, etc. M[r] de Goupillière nomme ensuite un grand nombre d'auteurs qui se sont occupés avec la théorie des centres de gravité. Nous relevons dans cette liste les noms de Bellavitis, Brianchon, Clifford, Collignon, Dupin, Hausen, Pettersen, Ribaucour, Sturm, etc. On aurait pu ajonter à ces noms ceux de Möbius (*Barycentrisches Calcul*) et de Grassmann (*Ausdehnungslehre*).

La théorie des moments d'inertie presente plus d'unité que celle des centres de gravité. On peut citer les recherches de Poinsot (ellipsoïde d'inertie), Mac-Cullagh (ellipsoïde de gyration), Ampère, Binet (surfaces homofocales enveloppées par la triple série des plans principaux), les surfaces des ondes de Townsend, Dussaude et de Peslin, le travaux de Lagrange, Battaglini, Chelini, Fouret, Reye, Yung, etc.

La théorie du potentiel, explorée d'abord par Green, Chasles, Gauss, Lamé, etc., est plus connue que les précédentes et M[r] de la Goupillière n'en donne pas la bibliographie.

Cypar. Stephanos.

A difesa della seconda edizione degli « Elementi d'Euclide »

Altra risposta al prof. Lazzeri.

Per maggior brevità non tratterò ora la questione dell'equivalenza, riserbandomi di far ciò in un articolo a parte; nel quale, dopo d'avere esteso a tutte le grandezze geometriche le dimostrazioni delle proposizioni E ed F, le quali sono state oggetto di critica, dimostrerò che il processo seguìto nella proposizione E per decomporre in parti rispettivamente uguali le parti non comuni di due poligoni uguali, aventi una parte comune, non dà mai luogo ad un numero infinito di operazioni. Talchè esso non solo è sempre giusto, ma è applicabile, come vedremo, oltrechè ai poligoni, ai cerchi, alle superficie chiuse da ellissi, ai poliedri, ai poligoni sferici, ecc.

Tornerò invece sopra due punti dell'altra questione riguardante la fusione della geometria piana colla solida, i quali non furono forse ben chiariti nel precedente mio articolo. E, in primo luogo, dirò che non ho mai voluto far dipendere, com'è naturale, tutta la fusione da una questione di postulati. Dissi, che se la fusione, come ne ha dato prova anche il signor Lazzeri, vien fatta ammettendo il postulato del diedro, allora essa è, in quel punto s'intende, scientificamente un errore; e si riduce anzi ad un vero artifizio, allo scopo di poter comprendere in un solo enunciato le proprietà dell'angolo e quelle analoghe del diedro. La proprietà del diedro di essere rovesciabile è un teorema e non un postulato; dunque essa dev'essere collocata al suo posto fra i teoremi. E allora è evidente, che lo studio dei diedri dovrà farsi precedere da quello degli angoli, da quello dei triangoli, e infine dalle nozioni di retta e piano perpendicolari. Logicamente adunque questi due studi, degli angoli piani e degli angoli diedri, non si possono tenere uniti; onde il mandarli di pari passo, come vuole il nostro critico, allo scopo di « risparmiare ai giovani tempo e fatica », sarà sempre una cosa fatta ad arte, la quale non contribuirà certamente a dare ad essi una vera e propria educazione scientifica. Veda quindi da ciò il signor Lazzeri, che, poste le cose in tali termini, non è più questione di non voler esperimentare un metodo piuttosto che un altro; si tratta invece di errori, sui quali, se non è nocivo, è assolutamente inutile fare delle esperienze.

Sul postulato dell'angolo, il critico esimio se la cava, secondo suo solito, mediante considerazioni molto vaghe; invece di farmi sapere, com'io gli

aveva chiesto, se la rovesciabilità dell'angolo è veramente un postulato o un teorema. Avrebbe preso forse una grossa cantonata, quando nella sua recensione asserì « che dalla possibilità di rovesciare un segmento si può molto facilmente dedurre la possibilità di rovesciare un angolo e viceversa? »

E veniamo ora a ciò che il professore egregio chiama *deplorevole equivoco*. Io dissi che il De Paolis erasi dichiarato *didatticamente* contrario alla fusione. Ebbi torto di non aggiungere subito *in un primo studio della geometria;* ma sembrami che ciò poteva benissimo essere sottinteso: perchè tanto nella prefazione al primo libro d'Euclide, quanto nell'ultimo mio articolo, la mia opposizione alla fusione si è sempre ristretta ai primi elementi di geometria; e, come già dissi, nei limiti, più o meno, dei primi quattro libri d'Euclide. Del resto non credo che le mie parole debbano ritenersi esagerate, se penso che il De Paolis pubblicò il suo libro, quando nel Ginnasio inferiore era obbligatoria la Geometria intuitiva, e che egli era tra coloro che volevano mantenuto tale insegnamento; ed ancor più, se penso che il libro stesso è stato scritto, come dice il nostro critico, « con un indirizzo puramente scientifico, e che l'autore lo riteneva più adatto a servire di guida agli insegnanti che agli studenti ».

Non a me dunque deve essere rivolta la taccia di sconvenienza verso il morto illustre: la sconvenienza la commette chi riduce a questione personale una discussione, la quale avrebbe dovuto mantenersi nel sereno campo didattico e scientifico.

Riguardo poi alla lettera scritta dal professore ch'io chiamai amicissimo del De Paolis e dal critico egregio riprodotta, mi piace far osservare, che essa è tutta gratuita là dove dice « ma da questa storia all'asserzione che anco nei gradi più elevati d'istruzione liceale, il libro sarebbe stato didatticamente inservibile, mi par che ci sia una differenza sostanziale ». Se, come già dichiarai l'altra volta, io stimo cosa ben fatta cominciare lo studio della geometria solida avanti il quinto libro d'Euclide, ed esso fa parte del programma destinato al secondo corso liceale; vuol dire ch'io ammetto che si possa studiare la geometria solida al second'anno di liceo, e quindi, secondo il gusto di chi insegna, può il libro del De Paolis servire anche all'istruzione liceale. Poi osserverò, che la storia, cui sopra s'allude, mi fu narrata dallo stesso professore, dopo che egli erasi trovato meco perfettamente d'accordo nella questione tanto dibattuta.

Dopo la fusione, il critico esimio, tornando a censurare le proposizioni I, XII, XXII del primo libro, mi chiama difensore d'Euclide; e l'altra volta invece aveva detto ch'io rivedevo le bucce ad Euclide. Potrei dimostrargli, che tali proposizioni sono facilmente giustificabili colle proprietà della retta e della circonferenza di dividere il piano in due parti; ma è assai meglio non perdere più tempo. Dirò soltanto che, difendendo in questo punto l'Euclide, ho difeso anche l'opera del prof. Betti; il quale è appunto l'autore della nota che si trova alla fine della proposizione XXII. È quindi opportuna la domanda: come va che il sig. Lazzeri mostra d'avere tanto rispetto per un morto illustre, e non ha alcun riguardo per un altro morto ancor più illustre?

Entrando poi a parlare dell'uso d'Euclide nelle scuole, l nostro critico dice: « L'obbligo d'usare Euclide nei Licei imposto nel 1867, credo sia stata cosa provvidenziale... Ora in 26 anni le cose sono cambiate e molto. Ormai è entrato nella coscienza di tutti, che le proprietà geometriche devono essere insegnate senza alcun sussidio dell'algebra e dell'aritmetica ».

Benissimo!... Ed è proprio qui ch'io voleva cogliere il signor Lazzeri. E prima di tutto gli domanderò: l'addebito di ricorrere al numero collo scopo di dimostrare proprietà geometriche, a chi è diretto? ad Euclide o agli autori moderni? Ad Euclide, no sicuramente; perchè è appunto da lui che noi abbiamo appreso il metodo puro di trattare la geometria; dunque l'addebito va agli autori moderni. Difatti: senza punto curarmi degli imitatori di Legendre, e parlando anzi di coloro che hanno seguìto il metodo Euclideo, dirò che sono appunto gli autori moderni, i quali hanno fatto dipendere dal numero il concetto d'equivalenza; mentre si dimostra, come io ho già fatto (*) che tal concetto è indipendente dal numero, finito o no, di parti rispettivamente eguali, onde due grandezze possono decomporsi. E sono pure gli autori moderni che continuano a far dipendere dal numero anche il concetto di proporzione. È facile persuadersi di ciò esaminando l'autore che ha riscosso più approvazioni di tutti: voglio dire il De Paolis. Egli infatti definisce la proporzione così: « Quattro grandezze, prese in un certo ordine, fanno proporzione, se la seconda e la quarta sono contenute sempre uno stesso numero di volte in due grandezze equimultiple della prima e della terza, secondo qualunque numero ».

Qui è evidente che non solo il numero serve ad esprimere quante volte la seconda e la quarta grandezza sono contenute, con resto o senza, nelle equimultiple della prima e della terza; ma è l'uguaglianza di due numeri che stabilisce il concetto di proporzione. Quindi è una relazione numerica che serve a definirne una geometrica. Euclide invece, il quale dopo tanti secoli continua ancora ad esserci maestro, volendo definire una relazione geometrica non ricorre mai al numero, ma bensì ad un'altra relazione geometrica; ed infatti la sua definizione di proporzione suona press'a poco in questi termini: Quattro grandezze, in un determinato ordine, fanno proporzione, quando le equimoltiplici, secondo qualunque numero, della prima e terza sono maggiori, eguali o minori rispettivamente delle equimoltiplici, pure secondo qualunque numero, della seconda e quarta grandezza. Ciò può chiarirsi e rendersi più intelligibile così: se A' e C' sono arbitrarie equimoltiplici di due grandezze omogenee A e C, B' e D' altre arbitrarie equimoltiplici di due grandezze omogenee B e D, la relazione:

$$A' \gtreqless B' :: C' \gtreqless D'$$

dà sempre luogo all'altra:

$$A : B :: C : D;$$

(*) Vedasi il mio opuscolo: *Ancora a proposito dell'equivalenza e di altre questioni geometriche*. Firenze, Stab. tip. Fiorentino, 1893.

e viceversa. Quest'ultima relazione dicesi proporzione delle quattro grandezze *A*, *B*, *C*, *D* considerate nell'ordine con cui sono scritte. Da ciò è manifesto, che Euclide passa al concetto di proporzione servendosi delle relazioni di maggiore, eguale o minore.

Tale concetto che, senza dubbio, rivela nel Geometra greco un acutissimo ingegno, il nostro critico osa chiamarlo contorto e laborioso. Ed egli intanto, non sapendo far nulla di meglio, ha pensato bene di schivare la difficoltà trattando le proporzioni fra grandezze geometriche solamente per mezzo del numero; e poi ci viene a dire, che ormai è entrato nella coscienza di tutti che le proprietà geometriche devono essere insegnate senza alcun sussidio dell'Algebra e dell'Aritmetica. Bravo davvero!...

E non si obbietti che nella definizione surriferita c'è l'idea di numero intero, perchè quest'idea è solamente nel concetto di moltiplice e di equimoltiplice. Ora è chiaro che ciò non costituisce difetto; perchè del numero intero, esprimente cioè collezioni di cose eguali o simili, non si può fare a meno; e senza di esso non esisterebbe non solamente la geometria Euclidiana, ma neppure quella di posizione. Per rendersi ragione di ciò basta pensare ai diversi problemi che la geometria risolve: per esempio al problema della divisione d'un segmento e d'un angolo in parti uguali, alla somma degli angoli interni di un poligono, ecc. ...

In seguito alle parole surriferite, il nostro critico poi aggiunge: « quello che era buono 26 anni fa, non è più buono ora; e non è più possibile migliorare Euclide rimpolpettandolo: bisogna servirsi dei materiali, ma costruire di nuovo ». E va bene: concedo che bisogni e che si possa anche ricostruire; ma con quali mezzi? Con quelli forse di cui ha dato prova il signor Lazzeri, confondendo cioè teoremi con postulati (*), e riuscendo a bandire dalla geometria il concetto di proporzione? Proprio come se esso non appartenesse che alla sola aritmetica? Oh, povera Geometria, così costrutta!

Sembrami poi che ad attaccare oggi l'Euclide, dopo tanti secoli di esistenza, non ci voglia nè un gran merito nè un gran coraggio. È naturale che la Geometria abbia fatto, in tanto tempo, anche nel campo elementare molti e notevoli progressi, e che quindi il testo del Geometra greco risulti ora incompleto. In ogni modo però, se è vero che esso è inferiore ai trattati moderni per copia di cognizioni, è anche vero che n'è superiore per chiarezza, semplicità e rigore di metodo. Onde io sono fermamente convinto, che il testo medesimo, specialmente come libro educativo da adottarsi nelle scuole classiche, abbia sempre sugli altri libri i suoi vantaggi. La qualcosa credo abbiano pensato anche il prof. Betti, che mi dette l'incarico di curare la seconda edizione, ed il prof. Dini, il quale mi scrisse esortandomi ad accettare. Essi adunque non credevano, come l'esimio signor Lazzeri, che la geometria d'Euclide fosse oggi diventata cadavere.

(*) Vedansi gli *Elementi di Geometria* dei prof. G. Lazzeri e A. Bassani, Livorno, 1891: pag. 12, Post. VII, 3°; pag. 17, Post. IX; pag. 34, Post. X, 1°.

Tutto ciò parmi più che sufficiente a dimostrare, che il nostro critico non ha alcun diritto di tacciare i professori delle scuole classiche, i quali non pensano come lui, di pigrizia e d'inesperienza, o di voler fare come facevano i loro nonni e bisnonni. Quel che noi facciamo, abbiamo ormai dato prove di saperlo non meno di lui; e in ciò non altro ci guida, che la salda coscienza di compiere il nostro dovere.

Ora venga pure il giudizio del pubblico intelligente.

Firenze, 31 novembre 1893.

M. GREMIGNI.

A proposito della nota

« Rettificazione di alcune inavvertenze in un moderno trattato di geodesia »

Il Chiar. Sig. Prof. Vincenzo Reina, della Scuola degli Ingegneri in Roma, ci ha inviato un elenco stampato di correzioni ed aggiunte ai *Fondamenti di Geodesia* di ENRICO PUCCI, che si trovarono manoscritte di propria mano nella copia dell'opera posseduta dall'autore. Da quest'elenco appare che la prima svista accennata nella nostra nota, della quale sopra scrivemmo il titolo, era già stata riconosciuta dal compianto prof. Pucci e corretta. L'egregio Sig. Prof. Vincenzo Reina ci prega di far ciò conoscere ai lettori della *Rivista*; di buon grado soddisfiamo a questo desiderio che attesta dell'amichevole riverente memoria che il Prof. Reina serba per il suo predecessore, e dell'animo buono di questi che gli seppe procurare sì delicati sentimenti.

Torino, 16, I, 1894.

OTTAVIO ZANOTTI BIANCO.

Sulle derivate apparenti.

Nota di Giulio Ascoli, *a Milano.*

Se io derivo la quantità y in quanto essa *dipende* dalla variabile indipendente x formo *la derivata totale* di y rispetto ad x, la quale suole indicarsi di preferenza col simbolo $\frac{dy}{dx}$, nella ipotesi che l'elemento y sia funzione soltanto della grandezza x. Se all'incontro l'ente y dipende da m (≥ 2) variabili x, z, ... fra loro indipendenti *la derivata totale* di y rispetto ad x suole rappresentarsi da molti con la notazione $\frac{\partial y}{\partial x}$ e chiamarsi dai più in modo, secondo me, poco opportuno *la derivata parziale* di y rispetto ad x. Adunque, ciascuno dei due simboli $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{\partial y}{\partial x}$ accenna alla derivata dell'ente y in quanto dipende dalla variabile indipendente x. Dal primo però arguisco che la funzione y dipende da un solo elemento che può mutare ad arbitrio, mentre il secondo afferma che il numero di tali elementi non è inferiore a due.

Ciò premesso, si abbino le relazioni $y = f(x_1, x_2)$, $x_1 = l(x)$, $x_2 = m(x)$, laddove tra le grandezze y, x_1, x_2, x non vi è altro legame. Di conseguenza, possiamo scrivere la relazione:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx},$$

che suole enunciarsi così:

Se y *è una funzione delle variabili* x_1 *ed* x_2 *e se ciascuna di queste ultime dipende dall'ente* x, *ne avviene che la derivata totale di* y *rispetto ad* x *è uguale alla derivata parziale della grandezza* y *rispetto ad* x_1 *nella derivata totate di* x_1 *rispetto ad* x *più il termine dedotto dal precedente scambiando la quantità* x_1 *con l'altra* x_2.

È facile però l'avvertire che questo enunciato non è esatto.

Infatti, *la derivata parziale* della funzione y rispetto ad x_1 si ot-

tiene derivando y in quanto dipende da x_1. Ora, essendo $x_2 = m(x)$, $x_1 = l(x)$, ne consegue che la variabile x_2 dipende da x_1 e che la grandezza cui si accenna nel teorema precedente col simbolo $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ non è la derivata parziale nel significato di poc'anzi.

Nel teorema detto or ora la derivata parziale di y rispetto x_1 si ottiene fingendo per un momento che le due variabili x_1 ed x_2 sieno tra loro indipendenti e formando quindi mercè l'espressione $f(x_1, x_2)$ gli enti $\frac{\partial y}{\partial x_1}$, $\frac{\partial y}{\partial x_2}$. Ma, è manifesto che questa finzione, siccome del tutto non conforme al vero, è assai poco opportuna. D'altra parte, si può farne a meno accettando il concetto di derivata apparente.

Io derivo la variabile y *apparentemente rispetto all'elemento* x, *se, osservando soltanto al modo mercè il quale la funzione* y *è espressa formalmente mediante la quantità* x, *derivo rispetto a quest'ultima applicando le note regole di derivazione delle funzioni esplicite di una sola variabile.*

La derivata apparente di y rispetto ad x si indicherà con la notazione

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

L'ultima eguaglianza va dunque scritta così:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{dx} + \left(\frac{dy}{dx_2}\right)\frac{dx_2}{dx},$$

ed enunciata nella maniera che segue.

Se l'elemento y *è una funzione delle variabili* x_1 *ed* x_2, *laddove ciascuna di queste ultime dipende dalla variabile indipendente* x, *la derivata totale dell'elemento* y *rispetto ad* x *è uguale alla derivata apparente di* y *rispetto ad* x_1 *nella derivata totale di* x_1 *rispetto ad* x, *più il termine analogo che si ottiene scambiando la variabile* x_1 *con l'altra* x_2.

L'elemento

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\right)\right) \qquad \left(y - f(x_1, x_2), x_1 = l(x), x_2 = m(x)\right),$$

che mi indica la derivata apparente rispetto ad x_1 della derivata omonima relativamente ad x_2, si rappresenterà con la notazione più semplice

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\, \partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\, \partial x_1}\right),$$

essendo, come è manifesto, indifferente l'ordine di più derivazioni successive apparenti.

La formola che dà la derivata seconda di una funzione implicita y della x, definita dalla relazione $f(x, y) = 0$, diventa mercè la nuova notazione

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)^2}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^3}.$$

Ho avuto occasione di convincermi dell'efficacia del concetto tanto semplice di derivata apparente nel mio insegnamento di Calcolo differenziale impartito all'Istituto Tecnico Superiore di Milano.

Così, ad esempio, quando voglio trovare le derivate parziali di una funzione implicita z delle variabili indipendenti x ed y definita dalla relazione $F(x, y, z) = 0$, faccio come segue. Posto

$$t = f(x, y, z) = 0 \quad , \quad \text{ho}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \, ,$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \, .$$

Senza la fatta convenzione dovrei fare

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \, ,$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \, ,$$

ed il simbolo $\frac{\partial t}{\partial z}$ comparirebbe nella prima relazione due volte con diverso significato, nel primo membro sarebbe cioè la derivata parziale della funzione $t = F(x, y, l(x, y))$ rispetto alla variabile indipendente x, nel secondo invece la derivata apparente della relazione $t = F(x,y,z)$, indicandosi con $z = l(x, y)$ la funzione definita della eguaglianza $F(x, y, z) = 0$.

La stessa cosa si ripeta della notazione $\frac{\partial t}{\partial y}$ che compare nella seconda delle due ultime eguaglianze.

Milano, 28, 1, 1894.

RECENSIONI

Ernesto Cesàro. — *Corso di Analisi Algebrica con Introduzione al Calcolo Infinitesimale.* Torino, Frat. Bocca ed., 1894. Prezzo L. 12.

Un nuovo libro molto pregevole è il Corso d'Analisi del professore E. Cesàro. L'autore, dopo di aver posti i primi elementi delle sostituzioni, intraprende lo studio delle Matrici e dei determinanti; ne dà con chiarezza, rigore e concisione le principali proprietà ed il teorema di moltiplicazione; si occupa dei determinanti reciproci e dei loro minori, dei determinanti simmetrici, emisimmetrici e pseudosimmetrici; applica la teoria dei determinanti alla risoluzione e discussione dei sistemi d'equazioni e di forme lineari ed alle trasformazioni lineari delle quali, dopo uno studio generale, considera particolarmente le ortogonali ed insegna a costruirle. Si occupa poi delle quadriche. Dà le prime proposizioni relative alle forme invariantive in generale ed agli invarianti ortogonali in particolare. Accenna alle forme canoniche in generale, insegna a ridurre a forma canonica le quadriche e ne dimostra l'importante legge d'inerzia. Passando ai numeri, dà le fondamentali definizioni e regole di calcolo relative ai numeri irrazionali; stabilisce i concetti e le proposizioni fondamentali del metodo e dimostra importanti proposizioni della teoria dei limiti. Si occupa poi distesamente delle serie semplici e doppie.

Passando alle funzioni, ne stabilisce i concetti fondamentali; dimostra i principali teoremi risguardanti i limiti inferiore e superiore, fra cui quello di Weierstrass; dimostra il teorema che dà la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza d'un limite finito di $f(x)$ da un lato d'un dato numero reale a: per le funzioni continue dà, dopo altri, i teoremi di Weierstrass e di Cantor. Si occupa poi della derivazione delle funzioni inverse, delle funzioni di funzioni, di una somma, d'un prodotto, d'un quoziente, d'una potenza, delle funzioni esponenziali e circolari. Intrattenendosi sulle proprietà delle derivate, tocca il principio di condensazione delle singolarità; dimostra i teoremi di Rolle, di Cauchy, di Lagrangia. di l'Hospital. S'occupa poi della continuità delle funzioni di più variabili, delle funzioni composte, della derivazione dei determinanti e delle funzioni implicite; dà il teorema di Eulero per le funzioni omogenee. Dimostra le principali proposi-

zioni relative alla convergenza, non uniforme ed uniforme, delle serie di funzioni ed alla loro derivazione; per dare un esempio di funzione, che non ammette mai derivata in tutto un intervallo nel quale è sempre continua, considera la funzione di WEIERSTRASS. Dà la formula di TAYLOR, con relativo resto, per le funzioni di una e di più variabili, e l'applica alla ricerca di massimi e minimi; negli esercizii parla del metodo dei minimi quadrati. Insegna a calcolare i logaritmi volgari mediante la serie logaritmica, la quale utilizza pure per dimostrare la formula di STIRLING, ed a calcolare π mediante la serie equivalente ad arc tg x. Considera la serie binomiale ed insegna ad usarla per il calcolo delle radici numeriche. Dà i numeri di BERNOULLI e d'EULERO; dà pure la formula sommatoria d'Eulero e ne presenta il resto in forma propria, non avendo potuto dare il resto di MALMSTEN la cui determinazione richiede l'uso del calcolo integrale; dà pure la formula sommatoria simbolica

$$f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(n) = f(n + B) - f(B)$$

con la quale calcola le somme delle potenze simili dei primi n numeri interi ed, approssimativamente, la somma dei primi n termini della serie armonica ed il prodotto dei primi n numeri interi, ritrovando così la formula di STIRLING; considera anche i polinomii di BERNOULLI.

Passando ai numeri complessi, ne dà i concetti e le regole di calcolo fondamentali, ed esprime con essi le radici dell'unità delle quali dà anche direttamente le proprietà principali. Si occupa dei limiti e delle serie di numeri complessi; parla dei cerchi di convergenza delle serie di potenze ed accennai ai campi di convergenza di serie qualsiansi. Occasionalmente, fa conoscere le funzioni iperboliche e le loro relazioni con le circolari; definisce le funzioni logaritmica ed esponenziale di variabile complessa. Accenna ai numeri complessi a più unità, tra i quali nota i numeri alternati; si ferma sui quaternioni pei quali dà con molta chiarezza, in poche pagine, le fondamentali regole di calcolo ed il teorema di HAMILTON.

Passando alla teoria delle equazioni, fa conoscere i metodi di eliminazione di EULERO e di BEZOUT; valendosi delle proposizioni premesse sull'eliminazione, dà del teorema di D'ALEMBERT la bella dimostrazione di CLIFFORD, che è puramente algebrica. Dopo insegna a formare la equazione, che ammette per radici tutte e solamente le comuni a due date equazioni; ed insegna pure a formare le equazioni, che ammettono rispettivamente come sole radici e semplici tutte le radici semplici, tutte le doppie, tutte le triple, ecc. di una data equazione. Per facilitare il calcolo del discriminante di una data equazione, osserva che, a meno d'un fattore numerico, è il risultante delle derivate par-

ziali del primo membro ridotto provvisoriamente omogeneo ed intero, ponendovi $\frac{x}{y}$ per x e moltiplicando per una conveniente potenza di y. Considera poi le funzioni relativamente al numero di valori che possono prendere, se vi si permutino le variabili; si occupa prima di quelle ad un valore o funzioni simmetriche per le quali dà le formule di GIRARD e di WARING; dimostra che ogni funzione simmetrica intera è funzione razionale ed intera delle funzioni simmetriche elementari; e dà criterii basati sul peso e sul grado per facilitare il passaggio da una funzione simmetrica in più quantità alla sua espressione nelle funzioni simmetriche elementari di tali quantità, od inversamente; ne fa applicazione al calcolo del discriminante, che eseguisce per la equazione di 3° grado, ed all'eliminazione. Negli esercizi parla della Hessiana, della Jacobiana e dell'ingegnoso metodo di HALPHEN per il calcolo di forme invariantive. Fa poi conoscere la forma generale delle funzioni a due valori, alternanti e non alternanti; dimostra che soltanto le funzioni simmetriche od alternanti possono avere potenze simmetriche e che, delle funzioni a più di quattro variabili, soltanto quelle a due valori possono avere potenze a due valori; dà funzioni di tre e di quattro variabili, che hanno più di due valori ed hanno cubo a due valori. Tratta poi dell'enumerazione delle radici per il quale scopo dà i teoremi di ROLLE, di CARTESIO, di LAGUERRE, di BUDAN, di STURM, di BORCHARDT. Tratta poi della risoluzione numerica delle equazioni; dà per la determinazione dei limiti delle radici le regole di NEWTON, di LAGUERRE, di MACLAURIN, di LAGRANGIA e di TILLOT; insegna a calcolare le radici razionali; fa vedere che una radice, che sia sola del proprio grado di moltiplicità, è razionale e ne deduce che l'applicazione ad una proposta equazione del metodo di ricerca delle radici multiple può occorrere solo se il grado della proposta equazione è maggiore di 5; insegna a calcolare le radici irrazionali col metodo di NEWTON e FOURIER, del quale dà pure interpretazione geometrica. Dopo tratta della risoluzione algebrica delle equazioni; per la risoluzione della cubica e della biquadratica fa conoscere i metodi di HUDDE, d'EULERO, di CAYLEY e di LAGRANGIA; coi metodi dovuti a Cayley ed a Lagrangia risolve anche la quadratica; pone in evidenza gl'inconvenienti della formula di TARTAGLIA per la risoluzione dell'equazione di 3° grado ed insegna a rimediarvi; dimostra l'importantissimo teorema di RUFFINI sull'impossibilità di risolvere algebricamente le equazioni generali di grado superiore al 4° e fa osservare come i ragionamenti occorsi per tale dimostrazione facciano scoprire le formule di risoluzione delle equazioni di grado minore di 5.

S'occupa poi del calcolo delle differenze e della interpolazione; di-

mostra il teorema di Staudt e Clausen sui numeri di Bernoulli. Poi s'occupa di sviluppi fattoriali; insegna a riconoscere se un dato prodotto infinito sia convergente; dà gli sviluppi in prodotti infiniti di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ dai quali deduce il valore di Wallis per $\frac{\pi}{2}$; ne deduce anche uno sviluppo in serie di $\cot x$ dal quale prende occasione per dare utili notizie risguardanti le somme degli inversi delle potenze simili dei numeri interi; infine fa conoscere formule di Gauss, d'Eulero, di Legendre e di Weierstrass relative alla funzione gamma.

Chiude il libro con note ed aggiunte relative alle teorie svolte.

Gli esercizii, di cui il libro è ricco, sono molto interessanti e scielti in modo da provocare nella mente dello studioso quella elasticità, e, dirò anche, quel gusto artistico, che tanto giova per dare un'impronta di genialità ancora ai più serii lavori scientifici. Molte proposizioni, specialmente della teoria dei limiti e delle serie, e certi sviluppi ottenuti con l'uso del calcolo simbolico e delle differenze, con coefficienti espressi in numeri di Bernoulli o d'Eulero, sono ricavati da note e memorie pubblicate dall'autore nei diversi periodici di matematica.

Genova, febbraio 1894.

F. Giudice.

Giulio Vivanti — *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico.* — (Mantova, Ditta Editrice G. Mondovì, 1894) p. 134.

L'antico precetto « divide et impera » che con tanto successo venne e vien tuttora invocato e sfruttato da strategi e da politici, fu scelto come ausiliare anche per lo studio dei fenomeni naturali dai più remoti investigatori che ricordi la storia, i quali nutrivano fiducia che, collo scomporre in parti un certo fatto o in tante fasi l'intervallo di tempo durante il quale esso si compie, si rendesse più agevole il riuscir vincitori delle difficoltà che presentava l'intelligenza del fenomeno complessivo. Ma sventuratamente non si tardò ad avvedersi come, nella generalità dei casi, le parti o le fasi ottenute fossero di studio non meno difficile del totale; tuttavia s'intravvide che, man mano si procedeva nella suddivisione, le parti raggiungevano una semplicità sempre maggiore, la quale sarebbe stata così grande da concedere la soluzione del proposto problema, ove la suddivisione stessa avesse potuto ripetersi

un numero illimitato di volte: le dottrine fisiche degli atomisti (Leucippo e Democrito, V Sec. a. C.) ed i conati di Antifonte e Brisone per quadrare il cerchio ([1]) fanno fede che quel magnanimo sforzo necessario per spiccare il salto dal finito all'infinito, è stato compiuto assai di buon ora dall'umanità procedente nel suo glorioso cammino dalle tenebre alla luce. Ma il mediocre successo che ottennero i due sofisti testè citati, lo spregio in cui anzi vennero tenuti i loro tentativi, fecero bandire per lungo volgere di secoli dalle scienze esatte l'idea di infinito e proporre un artificio (quello che più tardi fu detto *metodo di esaustione*), esente da qualunque concetto trascendente, e che conduce a quegli stessi risultati a cui menavano le argomentazioni basate sulla nozione d'infinito; tuttavia non si tardò ad avvertire che tale procedimento era un eccellente metodo di dimostrazione, ma un povero metodo di scoperta ([2]), che fra l'intenzione di chi lo usava e la condiscendenza del mezzo sorgeva assai spesso un deplorevole dissidio; e finalmente venne un giorno in cui emerse con irrefragabile evidenza come per la matematica l'uso ben regolato del concetto d'infinito fosse questione di vita o di morte. Ora — come si arguisce da quanto sopra si è detto — questo concetto si presentava sotto due forme distinte ma intimamente fra loro connesse e pressochè complementari, giacchè la divisione eseguita un numero di volte *infinitamente grande* produce delle parti di grandezza *infinitamente piccola*, microcosmo e macrocosmo, infinito ed infinitesimo erano dunque concetti inseparabili l'uno dall'altro che si richiamavano scambievolmente. Siccome però la suddivisione non è che il mezzo, mentre ciò che maggiormente preme è il risultato di essa, così l'interesse maggiore si concentra sul concetto di infinitesimo: seguirne il filo attraverso le menti e gli studi dei vari autori, arrestandosi sui metodi di calcolo quel tanto che è sufficiente per indurre il modo di vedere dei loro autori, ecco la ricerca che ha condotto a buon termine l'A. del lavoro che porge il tema al presente articolo ([3]).

In tale investigazione la prima domanda che si affaccia alla mente è: qual'era il concetto che dell'infinitesimo erasi formato Leibniz? Ad essa però non è concesso di porgere una risposta molto onorevole pel celebre emulo di Newton. Leibniz infatti — a cui non si può negare

---

([1]) Cfr. il *I Libro* del mio lavoro su *Le scienze esatte nell'antica Grecia*; n. 45, 48 e 49.

([2]) La giustificazione di quest'asserto si troverà nel *II Libro*, attualmente in corso di stampa, del mio precitato lavoro.

([3]) Noto con piacere che esso viene a soddisfare un mio antico desiderio che ho pubblicamente manifestato in questo giornale (*Rivista*, T. I, p. 185 nota).

di avere in generale acutamente intuita e sempre entusiasticamente significata la verità — ebbe a questo proposito delle idee variabili ed imprecise: e questa incessante oscillazione si propagò dal maestro ai discepoli (non esclusi Jacopo Bernoulli e Leonardo Eulero) i quali si industriarono piuttosto di dimostrare la fecondità delle idee del loro venerato capo che di legittimarne i procedimenti. Gli è solo più tardi che la questione concernente la natura degli infinitesimi venne posta all'ordine del giorno; essa provocò allora infiniti dibattiti, non sempre condotti a filo di logica, e spinse a sostenere delle tesi che in parte soltanto fanno onore a chi le escogitò. Sotto forma diversa tale questione riapparve nelle interminabili discussioni sull'*angolo di contingenza* la cui prima radice è da ricercarsi nella prop. 16ª del Libro III degli *Elementi* di Euclide; ma su di esse non è il caso di arrestarci qui a lungo. Ciò che importa osservare è invece, che al concetto di *infinitesimo come grandezza assolutamente nulla* o meglio a quello di *grandezza attualmente infinitesima*, faccia riscontro l'idea di infinitesimo riguardato come un elemento variabile generatore delle grandezze finite, riguardato cioè come un ente di grandezza nulla ma che in un dato modo e grado è dotata dell'attitudine e della tendenza di generare delle grandezze finite; in altre parole — per usare il linguaggio dei filosofi — *l'infinitesimo considerato come grandezza intensiva*. Da questo punto di vista esso venne studiato da molti matematici e filosofi; e le varie forme sotto cui è stato presentato si riducono a due: la *cinematica* e la *dinamica*. Come tipo della prima si può ritenere la constatazione del *fatto* che il punto muovendosi genera il continuo, come tipo della seconda la considerazione della *tendenza* del punto mobile a generare il continuo. La prima si può far risalire a Giordano Bruno, a Tommaso Hobbes la seconda. Dal grande filosofo da Nola rampollano Sovero, Cavalieri, Guldino, Barrow e Giovanni Ceva, dal filosofo inglese invece discendono Galileo, Newton (che rivestì di forma matematica le idee di Hobbes per farne la pietra angolare del suo grandioso edifizio), Taylor e Mac-Laurin.

Vista la ripugnanza generale dei matematici di fare lunghe dichiarazioni sul modo in cui concepivano gl'infinitesimi, a ragione l'A. pensò di sorprendere il segreto delle loro idee indagando il come essi le applicavano, il che è tanto più opportuno inquantochè nella storia della matematica non mancano esempi di geometri che, dopo avere dichiarato come concepivano l'infinitesimo, nelle applicazioni gli attribuivano un significato differente, forse perchè il primitivo mal si adattava ad essere tradotto in formole matematiche. A tale investigazione è consacrata la *seconda parte* dell'opuscolo che andiamo esaminando. Nella quale, dopo un capitolo sul metodo di esaustione

usato dagli antichi geometri (capitolo destinato principalmente ad istituire un paragone fra quel metodo ed i metodi moderni), l'A. si arresta al metodo degli indivisibili mettendone in luce l'essenza, la quale — per dirla in poche parole — consiste nel ritenere i corpi costituiti da infinite superficie e le superficie da infinite linee; è noto che esso venne metodicamente esposto ed applicato da Bonaventura Cavalieri; prima di lui però se ne servirono in varia misura Leonardo da Vinci e Keplero; dopo venne trasformato da Wallis, applicato da molti geometri ed assunto come modello da Grégoire de Saint-Vincent nell'architettare il suo metodo *ductus plani in planum.* — Alle scoperte come agli individui è necessaria una certa dose di fortuna per fare il loro cammino nel mondo: e fortuna non ebbe il metodo degli indivisibili sorto durante i bagliori antelucani del metodo infinitesimale. Questo, preparato dalle ricerche di Fermat sulla determinazione dei massimi e minimi e delle tangenti alle curve e dagli ulteriori sviluppi che queste ricerche ricevettero per opera di Huygens, comincia a rappresentare la parte di protagonista che non doveva più abbandonare, per opera di Leibniz, matematico al quale il nostro A. sostiene appartenere senza contrasto il *calcolo* se non il *metodo infinitesimale:* questo calcolo fu dal marchese dell'Hôpital per la prima volta esposto, venne magistralmente commentato da Varignon e dai due primi Bernoulli (a tacer d'altri) applicato a svariate questioni geometriche e meccaniche. Ad esso fa splendido riscontro il *metodo dei limiti e delle flussioni;* il quale non cedette dinnanzi al *methodus incrementorum* di Brook Taylor nè alla *théorie des fonction analytiques* di Lagrange, e per merito di Cauchy acquistò quelle doti di indiscutibile rigore che gli assicurarono un posto definitivo, stabile ed eccelso nello scibile matematico.

Ma per raggiungere questo desiderato intento, quante interminabili discussioni, quale ingente sperpero di forza intellettuale fu necessario! Ai nomi che abbiamo qua e là citati altri moltissimi se ne potrebbero aggiungere; le opinioni a cui alludemmo sono una piccola parte di quelle che vennero sostenute; i dibattiti di cui incidentalmente abbiamo fatto cenno, sono forse i più memorabili, ma non gli unici che ricordi la storia del calcolo infinitesimale!

Ora, di tutto quello che noi per brevità abbiamo taciuto, come dei documenti a sostegno delle nostre asserzioni, potrà il lettore avere notizia dal lavoro di cui ci stiamo occupando; al quale accresce pregio la ricchissima collezione di passi delle opere originali, col cui aiuto chiunque è in grado di controllare o discutere le conclusioni ed i giudizi dell'A. E la diligenza spiegata dal prof. Vivanti nel riunire gli atti del processo da lui fatto ai più illustri cultori del calcolo infinitesi-

male, nonchè l'imparzialità con cui egli presiedette allo svolgimento di esso, assicurano al suo scritto un posto onorevole nella raccolta di monografie storiche che l'età nostra va facendo con amorosa e lodevole cura; l'una e l'altra testificano in modo indiscutibile che della storia della scienza egli ha un altissimo concetto e farebbero credere che egli avesse scelto per propria guida ed ispiratrice la sentenza di Hankel: *la storia della matematica non deve semplicemente enumerare gli scienziati e i loro lavori, ma essa deve altresì esporre lo sviluppo interno delle idee che regnano nella scienza.*

GINO LORIA.

Opere ricevute.

FELIX KLEIN. — *Lectures on Mathematics, reported by Alexander Ziwet.* New-York, Macmillan and Co., 1894, p. VIII + 110.

GIULIO VIVANTI. — *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica.* Saggio storico. Mantova, G. Mondovì, 1894, p. 134, L. 3.

JOH. THOMAE. — *Die Kegelschnitte in rein projectives Behandlung.* Halle a. S. 1894. (Torino, Rosenberg et Sellier, L. 9).

A. REBIÈRE. — *Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités.* Paris, Nony, 1893.

Prof. F. AMODEO. — *Le operazioni sui numeri intieri trattate per le scuole secondarie.* Napoli, Pellerano, 1894, pag. 50. L. 1.

Sulla parte V del Formulario: « Teoria dei gruppi di punti ».

La presente parte del Formulario contiene, alquanto più sviluppata, la parte elementare della teoria dei gruppi di punti, quale fu pubblicata nelle prove di stampa del Formulario, comparse nel 1892 (Vol. II della Rivista), parte III, § 1-3. Essa serve di base a teorie più elevate sullo stesso soggetto, le cui formule vengono raccolte dal Prof. Vivanti.

Parecchie proposizioni sono contrassegnate con Def.; ciò significa che queste proposizioni si possono assumere per definizioni. Però siffatta indicazione è a considerarsi solo come approssimativa; poichè solo quando si fa completamente la teoria d'un soggetto, le proposizioni vengono distinte in definizioni e teoremi.

Il § 1 tratta del numero (num) degli individui d'una classe. Le definizioni sono quelle proposte nel mio articolo *Sul concetto di numero*, Riv. di Mat., I, p. 258. Forse è possibile il farne un'altra teoria assumendo come definizioni le ultime proposizioni di questo §.

Il § 2 si occupa dei massimi e minimi d'un sistema di numeri reali; se ne dànno le definizioni, e si enunciano le comuni proprietà. Altre proprietà sono contenute implicitamente nel § successivo.

Il § 3 si riferisce ai limiti superiore ed inferiore d'un gruppo di numeri reali.

Il § 4 contiene le definizioni, e proprietà fondamentali dei numeri complessi d'ordine qualunque n (o punti in una varietà ad n dimensioni). La prop. 1 dice che per numero complesso d'ordine n si intende la successione di n numeri reali. Le proposizioni successive definiscono l'eguaglianza di due complessi, la loro somma, il prodotto d'un numero reale per un complesso, il modulo d'un complesso. Queste operazioni e proprietà sono affatto semplici; siffatte convenzioni servono ad esprimere le prop. dei § successivi affatto in generale. Le P24-31 contengono la definizione e le proprietà del prodotto interno di due complessi. Esse servono nel § 7, onde definire la classe dei punti medii fra quelli d'una classe data.

Le ultime definizioni esprimono alcune notazioni sugli intervalli.

Il § 5 contiene le proprietà della classe derivata (secondo Cantor), di una classe data.

1. « Per classe derivata della classe u si intende l'insieme dei numeri complessi x tali che il limite inferiore dei valori assoluti delle differenze fra i numeri del sistema u diversi da x, ed x sia lo zero ».

7. « Qualunque si sia il numero (intero positivo) p, la derivata d'ordine p della classe u è contenuta nella derivata di u ».

12. « La classe derivata della classe ottenuta sommando due reciproci di numeri intieri positivi è costituita dai reciproci dei numeri interi positivi e dal valore 0; la classe derivata di quella che si ottiene sottraendoli, è formata dai reciproci degli N, da questi cambiati di segno, e dal valore 0 ».

Le prop. 21-42 si riferiscono alle classi derivate d'ordine infinito e dei varii ordini transfiniti d'una classe u.

Le prop. 41-42 contengono le definizioni delle derivate a destra ed a sinistra d'una classe u di numeri reali.

Data una classe u, risultano pure determinate tre altre classi, costituite dai punti interni ad u (Iu), dagli esterni ad u (Eu), e dai punti limiti di u (Lu). Il Jordan, nel suo recente *Cours d'Analyse*, li chiama *points intérieurs*, *extérieurs* e *points frontière*. Queste operazioni I, E, L hanno molte proprietà, enunciate nel § 6.

Data una classe u, risulta pure determinata una nuova classe (§ 7) Cu, che si può chiamare « la classe u resa chiusa ». La sua definizione differisce leggermente da quella di Du, e le sue proprietà sono assai più semplici di quelle di Du. La classe Cu è utile in più questioni di Analisi.

E infine, dato un gruppo di punti u, ne risulta determinato un altro indicato con med u, e formato dai punti medii fra gli u. Se u è una classe di numeri reali, con med u si intende l'insieme dei numeri compresi fra il limite superiore e l'inferiore degli u, questi limiti esclusi (P 21). Se u è una classe di numeri complessi d'ordine n, con med u si intende l'insieme di tutti i complessi x tali che, comunque si prenda il complesso a, il prodotto interno $a \mid x$ (che è un numero reale) risulti medio fra i prodotti $a \mid u$ (che è una classe di numeri reali). Qui sono riportate le proprietà più semplici di questa classe. La classe med u serve per estendere ai numeri complessi i teoremi delle medie noti in Analisi infinitesimale. Così, essendo ft un complesso variabile funzione della variabile reale t, si ha

$$\int_a^b ft\,dt = (b - a) \operatorname{med} f(a \frown b) .$$

NOTAZIONI USATE NELLA PARTE V.

Essendo u una classe,

num u si legga « il numero degli u ». § 1 P1.

Essendo k una classe di classi,

$\cap ' k$ si legga « la massima classe contenuta in tutte le classi k ».

$\cup ' k$ » « la minima classe contenente tutte le classi k ». § 1 P9, 10.

Essendo u una classe di numeri reali,

max u si legga « il massimo degli u » } § 2 P1, 2.
min u » « il minimo degli u »

$\mathrm{l}' u$ » « il limite superiore degli u » } § 3 P1, 2.
$\mathrm{l}_1 u$ » « il limite inferiore degli u »

q_n » « numero complesso d'ordine n » § 4 P1.

mod x, o m x si legga « modulo di x ».

$x | y$ si legga « prodotto interno di x per y ». Il segno | si può leggere « indice ».

Essendo u un gruppo di numeri complessi,

Du si legga « la classe derivata di u » § 5 P1.

$D^\omega u$ » « la classe derivata d'ordine infinito di u » § 5 P21.

Iu » « la classe dei punti interni ad u » }
Eu » « la classe dei punti esterni ad u » } § 6 P1, 2, 3.
Lu » « la classe dei punti limiti di u o contorno di u » }

Cu » « la classe u resa chiusa » } § 7 P1, 23.
med u » « la classe dei punti medii fra gli u »

Essendo u una classe di numeri reali,

$D'u$ si legga « derivata a destra degli u » } § 5 P41-42.
$D_1 u$ » « derivata a sinistra degli u »

Molti termini usati nella teoria dei gruppi si possono esprimere coi segni finora introdotti, senza bisogno di segni nuovi.

Essendo u un gruppo di punti,

$Du \supset u . = . Cu = u . = . Lu \supset u . = .$ u è un gruppo chiuso (ensemble fermé, abgeschlossene Punktmenge).

$u \supset Du . = .$ u è condensato in sè (condensé en soi, insichdicht).

$Du = u . = .$ il gruppo u è perfetto (parfait).

$u \cap Du = \Lambda . = .$ u è isolato (isolé, isolirte).

G. PEANO.

Joh. Thomae in Jena. - *Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung.* Halle, L. Nebert, 1894.

Quest'operetta che, per via d'uno stile molto concettoso e stringato, tiene assai più di sostanza che non apparisca alla mole (181 pagine in-8°), riproduce, come l'A. espressamente dichiara, tutto quanto si trova in un libriccino sopra le forme piane di 1° e 2° ordine già pubblicato fin dal 1873. Ma le ragguardevoli aggiunte portate in ogni parte dall' A. a questo suo precedente lavoro, segnatamente per ciò che riguarda le coniche e gli elementi ideali, dànno carattere di libro nuovo alla presente edizione, la quale può vantarsi di offrire agli studiosi un sugoso ed elegante trattatello di geometria proiettiva, sotto molti aspetti originale; e ricco di varie esposizioni (come l'analisi di certe *configurazioni* che piglian nome da Mac-Laurin, Desargues, Pascal, Steiner, Clebsch, e uno studio sulle *determinazioni metriche* nel piano) che non trovan luogo per solito in altri trattati elementari della stessa materia.

L'A. segue le orme del v. Staudt quanto al metodo, facendo in somma astrazione, come egli felicemente si esprime, da qualsivoglia « sussidio di misure con unità mobili nello spazio ». Ma per minore scrupolosità negli enunciati e nelle dimostrazioni dei teoremi se ne scosta, a mio credere; così che l'aurea parola del Maestro vince sempre il paragone, dove questo è possibile. Si confrontino ad esempio i teoremi sui triangoli prospettivi (pag. 8) e sui triangoli polari ad una conica (pag. 65 e 77) come son proposti dall'A. (non meno che dalla più parte degli scrittori quantunque posteriori al v. Staudt), con le espressioni che di siffatte proprietà leggonsi ai §§ 89, 90, 242, 243 e 300 della « Geometrie der Lage » (*).

Come l'A. medesimo vuole osservato nella prefazione, l'opera sua,

(*) Nürnberg, Fr. Korn, 1847; o anche Torino, Frat. Bocca, 1889.

nel mentre che per la purezza del metodo si stacca da quelle dei sigg. Zech, Cremona, Rulf, Steiner-Schröter sullo stesso argomento, va distinta altresì dal notissimo trattato del sig. Reye, sia perchè non mira più in là delle forme piane, sia per l'adoperar che essa fa da per tutto anche gli elementi *ideali*. Questi vengono definiti *a coppie* di elementi *aggregati* (così l'A. in vece della parola *coniugati*, tenuta per altri concetti geometrici) come involuzioni ellittiche nelle forme semplici. Un sì fatto procedere all'introduzione degli elementi immaginari in geometria proiettiva non è nuovo in Italia, dove, mercè un lavoro del sig. Segre (*), riprodotto in sostanza nei trattati dei sigg. Sannia ed Aschieri, esso è già usato da qualche tempo a pro' dell'insegnamento superiore.

Rechiamo qui le intestazioni dei varî capitoli del libro, a porgere un'idea del contenuto: « *Einleitung — Lineare Gebilde: die harmonische, die perspective und die proiective Beziehung — Gebilde zweiter Ornung; Aufgaben zweiten Grades — Pol und Polare: Dualität — Ideale Elemente und die Involution — Kegelschnittbüschel und Schaaren — Fortsetzung; ideale Kegelschnitte — Zwei Configurationen und zwei Collineationen — Massverhältnisse — Nachträge und Bemerkungen* ».

Notevoli ci sembrano i due capitoli sui *fasci di coniche*, sì per l'importanza dei risultati che vi son conseguiti, sì per l'eleganza delle costruzioni che vi si annettono. Le coniche ideali sono introdotte con la definizione seguente, che può facilmente ridursi a quella di Staudt. Rispetto a un fascio di coniche con quattro punti fondamentali ideali, siano A, B due punti *coniugati*, e P, P', P'' i tre vertici del triangolo autopolare comune a tutte le coniche del fascio, ove si suppone che P' e P'' siano i punti limiti, o coniche limiti. Allora ad ogni retta a per B, che non sia separata dalla retta AB mediante P' e P'', è coordinata una conica del fascio, per la quale a è la polare di A. Ma quando a è separata da AB per mezzo di P' e P'' non esiste più una tal conica. In questo caso « noi *aggiungeremo* alla coppia Aa, considerati come polo e polare, una conica ideale ». — Le due collineazioni, di cui parla il penultimo capitolo, sono la *omotetìa proiettiva* (omologia) e la *rotazione proiettiva* (per la quale ognuna delle infinite coniche d'un fascio-schiera è mutata in sè stessa, ed è un punto unito il polo della corda di contatto comune alle medesime); e ognun vede i motivi della preferenza accordata a questi due casi speciali.

Ma particolarmente bello ed istruttivo dovrà parere a ogni lettore il capitolo finale sulla geometria metrica, dove in poche pagine —

(*) Nelle Memorie dell'Accad. delle scienze di Torino, 1886.

— premesso qualche cenno sulle determinazioni metriche non-euclidèe — son poste chiaramente le basi della geometria metrica ordinaria del piano, considerata dal punto di vista della geometria di posizione. E ciò mi par tanto più da lodare, in quanto che non mi è noto alcun altro libro d'indole elementare, dove quest'argomento sia svolto compiutamente. Essendo data nel piano un'ellisse Ξ (*cerchio*) e quindi due punti ideali T e T' (*assoluto* euclidèo) comuni alla medesima ed alla retta impropria del piano (*retta all'infinito*), l'A. chiama *congruenti* due figure, le quali possan dedursi l'una dall'altra mediante una rotazione proiettiva che abbia per punti uniti i due punti T e T' ed un terzo punto reale qualunque (*perno* della rotazione); oppure mediante un'omologia (*traslazione*), la quale abbia per asse la retta TT', e un punto reale di questa per centro (*). Detto M il polo della retta TT' rispetto a Ξ (*centro* di Ξ), ogni angolo *retto* col vertice in M è formato da due diametri coniugati di Ξ: due angoli siffatti sono sempre *uguali* fra loro. Due rette qualunque per M formano angoli adiacenti *bisecati* da quei due diametri coniugati di Ξ, che son separati armonicamente dalle due rette: quindi è che, preso a piacere un angolo retto in M, si può dividerlo in 2, 4, 6, ... 2^n parti eguali, formando così un *rapportatore*, al quale ogni angolo dato può riferirsi mediante traslazione; e si ottiene per questa via la misura di un angolo qualunque con un numero scritto nel sistema di numerazione binario (presupposta la continuità della retta (pag. 2)). — Anche i semidiametri di Ξ sono *eguali* fra loro, e porgono l'unità di misura per le lunghezze o segmenti. Quest'unità di misura si può trasferire sopra una retta qualunque del piano con una traslazione; e così per via di note costruzioni è possibile determinare il numero di unità, mezze unità, quarti d'unità, ecc., contenuti in un dato segmento. Ma qui non è pur luogo da offrire una descrizione sommaria dell'intero capitolo: basti il dire che esso mostra altresì, benchè in forma succinta, una non piccola parte di ciò che è argomento dei primi tre libri di Euclide.

Dopo la lettura di una tale esposizione vien fatto di pensare, se non sia questa propriamente la forma migliore che abbia prima o poi a rivestire la *Geometria elementare*, oggi costituita quasi per intero sul concetto di *moto*. È ben noto che i fondamenti della Geometria elementare son tuttavia controversi, e come una perfetta analisi dei principii che ne sostengon l'edifizio (in armonia con le esigenze at-

(*) Forse allargando di poco una tal definizione (così sembra a chi scrive) si potrebbe comprendervi ancora, e senza uscire dal piano, il caso della eguaglianza *indiretta* (la quale non è in somma che una certa omologia involutoria composta con una traslazione).

tuali di una mente erudita) non sia stata ancor fatta: dovecchè ben poco resta da fare intorno la Geometria di Posizione (*). Questo avviene, perchè fra i *cambiamenti di rappresentazione* o *corrispondenze* geometriche, il moto fisico non è la più semplice; come saremmo indotti a credere dalla chiara nozione che abbiamo di tutte le sue proprietà, rese a noi più familiari dall'esperienza quotidiana. Ma altro è il conoscerle, altro il discernere in esse i fatti *primitivi* dai *derivati* e costruirvi sopra un edifizio logico. E mi par chiaro, che questo debba riuscire per forza più stabile se, in vece di poggiare sul terreno assai varîo e superficiale della *corrispondenza di moto*, abbia le sue fondamenta nel suolo più profondo ed omogeneo della *collineazione* generale. E non solamente dovrà la Geometria elementare avvantaggiarsi nel rigore per via di un procedimento siffatto, ma anche in quanto a chiarezza (come fu già rilevato da Staudt nella prefazione all'op. cit.), e in quanto a *semplicità di premesse*.

A conforto di quest'opinione osserverò, che se si definisce la corrispondenza di moto, o l'eguaglianza delle figure, mediante traslazioni e rotazioni proiettive, o altre speciali collineazioni del piano e dello spazio, si può far senza di molti postulati, che nell'attuale organamento della Geometria elementare sono, o son tenuti necessari. Così è p. es. del postulato affermante la possibilità di rovesciare un segmento qualunque; poichè si può sempre con successive rotazioni proiettive scambiare l'uno nell'altro due punti datî a piacere: e una cosa analoga può dirsi dell'angolo piano e dell'angolo diedro. Così diventa superfluo il postulato che « una figura può muoversi tenendo fermi uno o due dei suoi punti, o anche tutti i punti d'una retta » e l'altro che « per fissare una figura è necessario e sufficiente tener fermi tre dei suoi punti non allineati » (**).

Torino, febbraio 1894.

MARIO PIERI.

(*) V. p. e. le *Vorlesungen über neuere Geometrie*, del sig. M. Pasch (Leipzig, Teubner, 1882), e i *Principî di Geometria logicamente esposti*, del sig. G. Peano (Torino, Bocca, 1889).

(**) Tutto ciò, ben inteso, finchè si consideri la Geometria elementare come una dottrina puramente ideale. Chè se poi vogliasi trattarla non come scienza astratta, ma più tosto come un ramo della fisica-matematica (del che non conviene dissimulare i molti vantaggi, specialmente didattici), io non dirò che, pur tenendo la via superiormente accennata, si possano come che sia risparmiare i postulati del moto: parendomi in vece che a questi si debba presto o tardi far luogo, se i principî e le deduzioni speculative si vorranno riscontrare coi fatti, e identificare con le idee che l'esperienza ci apprende intorno ai medesimi.

Trasformazione d'ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli.

Nota di M. Pieri

Che una qualunque curva algebrica (senza infiniti punti multipli) sia trasformabile razionalmente in una curva *sghemba* priva al tutto di punti singolari, si dimostra dal sig. Poincaré nella Nota « *Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques* » (Comptes rendus, t^e 117, 3 Juillet 1893). Di questo teorema offre il presente articolo un'altra dimostrazione alquanto più semplice, tratta da poche nozioni elementari di Geometria Projettiva, e condotta, in forma sintetica, per una via molto simile a quella mostrata dal sig. Bertini nella Nota sulla « *Trasformazione di una curva algebrica in un'altra con soli punti doppi* » (Rivista di Matematica, Vol. 1°, 1891, pag. 22; e Mathematische Annalen, Bd. 44°, 1894, s. 158).

Primieramente è lecito supporre che la curva data sia *piana:* atteso che una curva sghemba si può sempre proiettare *univocamente* sul piano, per modo cioè che un punto dell'imagine rappresenti generalmente un sol punto della curva oggettiva. Di poi questa curva piana si può anche supporre mutata razionalmente in un'altra, Γ, con soli punti multipli *ordinari*, A_0, A_1, A_2, ... A_r, per mezzo di successive trasformazioni quadratiche del piano (*).

Ciò premesso si consideri uno qualunque, A_0, di tali punti singolari, insieme con altri cinque punti B_1, B_2, ... B_5 indipendenti fra loro e dalla curva Γ: l'ultimo dei quali è da scegliersi con alcune av-

(*) Si potrebbe ancora, e senza modificare i ragionamenti che seguono, sostituire alla data una curva *sghemba* Γ con soli punti multipli ordinari, ottenuta per via di sole trasformazioni Cremoniane dello spazio: v. Pannelli « *Sulla riduzione delle singolarità d'una curva sghemba* ». Rendiconti dell'Istituto Lombardo, XXVI_2, 1893.

vertenze particolari, come fra poco diremo. Ora, se le ∞^3 quadriche passanti per A_0, B_1, B_2, ... B_5 si riferiscono omograficamente ai piani dello spazio, resterà anche determinata una certa corrispondenza (1, 2) fra i punti di questo, e propriamente *una trasformazione doppia del* Reye (*); per la quale ad un punto qualunque, come centro d'una stella di piani, è coordinata quella coppia di punti, che le ∞^2 quadriche della rete corrispondente alla stella hanno ulteriormente a comune, dopo A_0, B_1, ... B_5. Una tal corrispondenza muterà la curva Γ (dello spazio *semplice*) in una curva sghemba Γ' (dello spazio *doppio*) riferita univocamente a Γ; ma con un punto multiplo di meno; e nel resto atta a modificarsi come Γ. Per ciò è necessario e basta che il punto B_5

1°) non appartenga alla superficie descritta dall'ottavo punto base d'una rete di quadriche, mentre due punti base variano comunque su Γ e gli altri cinque cadono rispettivamente in $A_0, B_1, \dots B_4$ (**)

2°) e neppur giaccia sopra alcuno degli r coni quadrici, che hanno il punto A_i per centro $(i = 1, 2, \dots r)$ e passano per $A_0, B_1, \dots B_4$.

La prima restrizione fa sì che due punti qualunque di Γ non possano mai corrispondere a un medesimo punto di Γ': ond'è che la trasformazione doppia in parola muterà *univocamente* Γ in Γ', ed anche *ogni* punto semplice di Γ in un punto semplice di Γ' senza eccezioni di sorta; essendo che essa non produce nello spazio semplice alcuna superficie fondamentale. Inoltre, per effetto dell'una e dell'altra restrizione, ai punti singolari A_1, A_2, ... A_r di Γ corrisponderanno in Γ' punti multipli della stessa natura, vale a dire *a tangenti distinte:* perocchè A_i non sarà mai congiunto ad alcun punto di Γ; e non giacerà sulla Jacobiana delle ∞^3 quadriche, che è la *superficie doppia* dello spazio semplice. Ma, in quanto al punto singolare A_0, esso verrà cangiato in un gruppo di punti *semplici* e *distinti* della curva Γ': attesochè per la trasformazione considerata le ∞^2 direzioni inerenti ad A_0 corrispondono *omograficamente* ai punti d'un piano (***).

(*) V. le due Memorie « *Ueber die Kummer'sche Configuration* etc. » e « *Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse* etc. » in Crelle's Journal, Bd. 86.

(**) Si osservi che questi punti definiscono in fatti una rete di quadriche, la quale non può aver *linee* basi, trattone il caso che i primi due siano allineati con uno qualunque degli altri, o stiano con tre qualunque di essi in una conica, o con tutti e cinque in una cubica.

(***) È noto che l'*intorno* di ciascun punto fondamentale dello spazio semplice si trasforma biunivocamente in un piano punteggiato dell'altro spazio; e che i raggi d'un fascio, il quale abbia centro in quel punto, si mutano nelle generatrici d'una rigata cubica avente in quel piano la sua direttrice semplice.

Ora, come si è fatto scomparire da Γ il punto multiplo A_0, per egual modo si potranno distruggere successivamente le singolarità tuttavia esistenti in Γ'. Ecc., ecc. —

La maniera, onde Γ si converte in Γ', consente un'interpretazione notevolmente piana ed intuitiva. Lo spazio di punti si può intender generato da tutte le quadriche passanti per A_0, B_1, ... B_4: onde esso apparirà come imagine di una ben nota *varietà cubica* (con dieci punti doppi e quindici piani) *dello spazio a quattro dimensioni*. La curva Γ rappresenta punto per punto una certa curva Γ^* di questa varietà; come B_5 è imagine di un certo punto B_5^*. Allora, proiettando la curva Γ^* da B_5^*, nascerà sullo spazio ordinario la curva Γ'.

Torino, aprile 1894.

BERNARDI Dott. Prof. GIUSEPPE. — *Soluzionario degli esercizi di trigonometria piana contenuti nel trattato di trigonometria di G. A. Serret.* — Firenze, Le Monnier, 1894, pag. 110. Prezzo L. 1,25.

È una raccolta di esercizi atta ad addestrare i principianti al maneggio delle formole di trigonometria piana e al loro impiego nella risoluzione dei problemi più semplici. Vi sono opportunamente alternate e ordinate secondo le difficoltà, da una parte le dimostrazioni di identità e le trasformazioni di espressioni in altre di forma determinata, dall'altra le questioni riferentesi alle relazioni tra gli elementi delle figure e alla costruzione delle medesime. Non mancano pure esempi semplici di determinazioni di angoli tali che siano soddisfatte determinate relazioni tra le loro funzioni trigonometriche.

La forma dell'esposizione è perfettamento adatta allo scopo che l'autore si propone, che è quello di rendere facile ed attraente l'apprendimento delle nozioni elementari e delle formole fondamentali della trigonometria piana.

Il passaggio al limite nelle formole della pag. 29, potrebbe essere fatta per via migliore e ciò indichiamo affinchè l'A. se ne possa servire in una nuova edizione.

G. VAILATI.

Un'osservazione intorno alle formole per l'addizione degli archi

nella *Trigonometria* del Serret.

Il Serret, nella sua Trigonometria (*), stabilisce per via sintetica, per due archi positivi a e b, ciascun minore del quadrante, e la cui somma si suppone non maggiore del quadrante stesso, le due formole fondamentali per l'addizione, e le due formole fondamentali per la sottrazione degli archi. L'Autore poi dimostra che le prime due formole sono vere per tutti i valori positivi e negativi degli archi a e b, e deduce indi come conseguenza, che anche le altre due sono vere per tutti i valori positivi e negativi degli archi medesimi. In ultimo il Serret (paragrafo 38) dice che non solo le due ultime formole sono comprese nelle prime due, ma anche ognuna delle prime due è conseguenza dell'altra, ad es. la formola

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (2)$$

è conseguenza dell'altra

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b\,. \qquad (1)$$

Per far questo l'A. nella (1) muta a in $\frac{\pi}{2} - a$, e b in $-b$, e deduce la (2).

Ora a me pare che in quest'ultima affermazione vi sia petizione di principio. Perchè l'A. nel generalizzare le prime due formole non sempre dalla prima trae la prima e dalla seconda la seconda. Quando per es. dimostra che se le (1) e (2) sono vere per due determinati archi, sono vere ancora quando ad uno di essi si aggiunga un quadrante, dalla (1) deduce la (2), e viceversa. Talchè nella dimostrazione le formole (1) e (2) conservano una certa dipendenza, in virtù della quale la generalizzazione dell'una di esse non è indipendente dalla generalizzazione dell'altra, e che quindi non possa poi legittimamente affermarsi che dall'una potrà dedursi l'altra.

(*) Traduzione di A. Ferruccio. Firenze, 1856.

Siccome è difficile non riconoscere il merito dell'opera magistrale del Serret, da molti professori adottata come libro di testo nelle loro scuole, specialmente dopo le eccellenti versioni che ne hanno fatto i professori Grassi e Fenoglio, ho creduto, con questa piccola nota, di fare rilevare quella piccola svista, e indicare nello stesso tempo un modo come evitarla.

Mi propongo di generalizzare la (1).

Prima osservo che la (1) è vera sempre, se si considerano i soli valori assoluti dei *seni* e dei *coseni* degli archi a e b. Poi, come fa il Serret, pur conservando la restrizione che sieno $a < \frac{\pi}{2}$, $b > \frac{\pi}{2}$, tolgo quella che sia $a + b \leqq \frac{\pi}{2}$. Indi continuerò nel seguente modo:

a) Sieno $a > \frac{\pi}{2}, b < \frac{\pi}{2}, a + b < \pi$.

In quest'ipotesi sarà $\operatorname{sen}(a+b)$ positivo. Dalla figura si rileva poi che $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} b$ e $\cos b > \cos a$, e quindi, tenuto conto anche che $\cos a$ è negativo, risulterà in valore e segno, $\operatorname{sen} a \cos b > \cos a \operatorname{sen} b$, e $\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, che si riduce ad una differenza, sarà positiva.

b) $\pi > a > \frac{\pi}{2}, b < \frac{\pi}{2}, a + b > \pi$.

In questo caso $\operatorname{sen}(a+b)$ è negativo. Dalla figura si ha $\operatorname{sen} a < \operatorname{sen} b$, e, in valore assoluto, $\cos b < \cos a$. Perciò il valore assoluto di $\operatorname{sen} a \cos b$ è minore del valore assoluto di $\cos a \operatorname{sen} b$; e $\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$, che si riduce alla differenza fra il valore assolulo di $\operatorname{sen} a \cos b$ e quello di $\cos a \operatorname{sen} b$, presa, tale differenza, con il segno di $\cos a \operatorname{sen} b$, sarà negativa.

c) $\pi > a > \frac{\pi}{2}, \pi > b > \frac{\pi}{2}$.

Sieno a' e b' i supplementi di a e b. Siccome $a'+b' = 2\pi - (a+b)$, e $a + b > \pi$, sarà $a' + b' < \pi$, con $a' < \frac{\pi}{2}, b' < \frac{\pi}{2}$. Per questo caso la (1) è vera (1ª parte della discussione del Serret); sarà perciò

$$\operatorname{sen}(a' + b') = \operatorname{sen} a' \cos b' + \cos a' \operatorname{sen} b'.$$

Ponendo per a' e b' i loro valori $\pi - a$, $\pi - b$, si avrà, dopo ovvie trasformazioni, di nuovo la (1).

Concludendo, la (1) è vera per tutti i valori positivi di a e b minori della mezza circonferenza.

La (1) è vera per tutti i valori positivi di a e di b. Infatti, sieno $a = k\pi + a'$, $b = k'\pi + b'$, dove a' e b' sono minori della mezza cir-

conferenza. Per questi due ultimi archi la (1) è vera. Ponendovi per a' e b' i loro valori si ha:

$$\operatorname{sen}[a+b-(k+k')\pi]=\operatorname{sen}(a-k\pi)\cos(b-k'\pi)+\cos(a-k\pi)\operatorname{sen}(b-k'\pi)\,.$$

Se k e k' sono entrambi pari o entrambi impari, da questa formula si deduce subito la (1); se sono uno pari e l'altro impari, questa formola si trasforma in

$$-\operatorname{sen}(a+b) = -\operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b\,,$$

che non è altro che la (1).

Tutto quanto è detto in *a)*, *b)*, *c)* dovrebbe sostituirsi alla seconda parte della discussione del Serret.

La terza e quarta parte si potranno conservare immutate, limitatamente sempre alla generalizzazione della formola (1), eccetto però la conclusione relativa alla parte quarta, in cui si dice che le formole (3) e (4), cioè quelle relative alla sottrazione degli archi, sono vere in generale. Dopo si potrà aggiungere l'osservazione del paragrafo 38, in cui dalla (1) generalizzata si deduce la (2), ed infine ciò che si è lasciato della parte quarta, cioè come dalle (1) e (2) si ottengono le (3) e (4).

Catania, aprile 1894.

S. Catania.

Nuove pubblicazioni.

L'intermédiaire des mathématiciens, dirigé par C. A. Laisant et E. Lemoine. Tome I, 1894. Abonnement, Union postale, 6 fr.

G. Papelier. — *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, avec une préface de M. P. Appell. Première partie. Géométrie plane. Paris, Nony, 1894, pag. 325.

A. Rebière. — *Les femmes dans la science*. Paris, Nony, 1894.

C. Arzelà. — *Complementi di algebra elementare*. Firenze, Succ. Le Monnier, 1894, pag. 225. — L. 2,50.

G. Riboni. — *Elementi di Geometria*. Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1894, pag. 256. — L. 3.

Risoluzione della Questione IV.

ENUNCIATO. In un piano sono date n rette a_1, a_2 ... a_n. Determinare graficamente la posizione di un punto P pel quale si abbia

$$\rho_1 p_1^2 + \rho_2 p_2^2 + \dots + \rho_n p_n^2 = \text{minimum}$$

essendo $p_1\, p_2 \dots p_n$ le distanze del punto P dalle rette date e $\rho_1\, \rho_2 \dots \rho_n$ coefficienti assegnati.

N. JADANZA.

SOLUZIONE. — Siano $P_1\ P_2\ \dots\ P_n$ i piedi delle perpendicolari abbassate dal punto P sulle rette $a_1\ a_2\ \dots\ a_n$, è noto che P è il baricentro dei punti $P_1\ P_2\ \dots\ P_n$, cui siano affisse masse proporzionali ai coefficienti $\rho_1\ \rho_2\ \dots\ \rho_n$, cioè ponendo $m = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n$, ed adottando le notazioni del Calcolo Geometrico (*), ha luogo la relazione

$$m\,P = \rho_1\,P_1 + \rho_2\,P_2 + \dots + \rho_n\,P_n$$

[Rivista di Matematica, vol. II, fascicolo 1°, e la dimostrazione più elementare del Bertot nei *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, Paris 1876].

Ad ogni punto A del piano facciamo corrispondere il punto A' tale che

(1) $$m\,A' = \rho_1\,A_1 + \rho_2\,A_2 + \dots + \rho_n\,A_n$$

essendo i punti $A_1\ A_2\ \dots\ A_n$ i piedi delle perpendicolari abbassate dal punto A sulle rette $a_1\ a_2\ \dots\ a_n$. Si viene così a stabilire, tra i punti del piano, una corrispondenza definita dall'uguaglianza (1). Fra tre punti A, B, C del piano in linea retta passa la relazione

(2) $$C = \frac{CB}{AB}\,.\,A + \frac{AC}{AB}\,.\,B$$

indicando con u il bivettore unità, con $a_1\ a_2 \dots a_n$ n linee in grandezza

(*) G. PEANO. — *Calcolo Geometrico* secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann. Torino, 1888.

eguali all'unità di misura e rispettivamente situate sulle rette $a_1\ a_2 \ldots a_n$, e con A', B', C' i punti corrispondenti ad A, B, C hanno luogo le tre relazioni

$$m\,A' = \rho_1 (A \,|\, u\, a_1 \,.\, a_1) + \rho_2 (A \,|\, u\, a_2 \,.\, a_2) + \ldots + \rho_n (A \,|\, u\, a_n \,.\, a_n)$$
$$m\,B' = \rho_1 (B \,|\, u\, a_1 \,.\, a_1) + \rho_2 (B \,|\, u\, a_2 \,.\, a_2) + \ldots + \rho_n (B \,|\, u\, a_n \,.\, a_n)$$
$$m\,C' = \rho_1 (C \,|\, u\, a_1 \,.\, a_1) + \rho_2 (B \,|\, u\, a_2 \,.\, a_2) + \ldots + \rho_n (C \,|\, u\, a_n \,.\, a_n)$$

Sostituendo in quest'ultima al punto C il secondo membro della (2) dopo alcune riduzioni si trova

$$C' = \frac{C\,B}{A\,B} \,.\, A' + \frac{A\,C}{A\,B} \,.\, B' \tag{3}$$

la quale dice che i tre punti A', B', C' sono in linea retta. Se adunque un punto A si muove nel piano percorrendo una linea retta, il suo corrispondente A' descriverà pure una linea retta, e le due rette si possono considerare come corrispondenti. Si può quindi concludere che la corrispondenza stabilita è un'omografia. Essendo i punti A', B', C in linea retta, ha luogo l'eguaglianza

$$C' = \frac{C'\,B'}{A'\,B'} \,.\, A' + \frac{A'\,C'}{A'\,B'} \,.\, B'$$

Confrontandola colla (3) si deduce

$$\frac{A\,C}{A'C'} = \frac{C\,B}{C'B'} = \ldots$$

cioè due punteggiate qualunque corrispondenti sono simili, onde l'omografia è affine. Delle tre rette unite una è la retta all'infinito del piano e contiene due dei tre punti uniti, l'altro punto unito sarà, in generale, al finito ed è precisamente il punto P che si cerca. L'omografia potrebbe in qualche caso essere un'omologia coll'asse all'infinito, cioè essere un'omotetia: allora il punto P è il centro d'omotetia.

Per trovare graficamente il punto P si determinino i punti A', B', C' corrispondenti di tre punti A, B, C non in linea retta. Per avere A' si possono determinare i punti $A_1\ A_2 \ldots A_n$, allora si ha

$$A' = A + \frac{1}{m} I$$

essendo I il vettore $\rho_1 (A_1 - A) + \rho_2 (A_2 - A) + \ldots + \rho_n (A_n - A)$. Si vede che, acciocchè le cose dette abbiano valore, deve essere m diverso da 0.

È facile convincersi che nella costruzione grafica, avendo solamente id mira la ricerca del punto P, al punto A si può far corrispondere

il punto $A + I$ invece che il punto $A + \frac{1}{m} I$. Determinati A′, B′, C′, resta a determinarsi il punto unito a distanza finita nell'affinità determinata dalle tre coppie di punti corrispondenti A A′, B B′, C C′. Per questo dal punto all'infinito della retta AB si proietti il punto C, e dal punto all'infinito della retta A′B′ si proietti il punto C′; se inoltre quest'operazione si immagina effettuata per tutte le altre coppie di punti corrispondenti, si ottengono due fasci di raggi paralleli proiettivi, anzi prospettivi, essendo unito il raggio che proietta i loro centri. I raggi corrispondenti si secheranno in punti tutti situati in una stessa retta u, che si può costruire. Analogamente si determini la retta v su cui si intersecano i raggi corrispondenti di due fasci di raggi prospettivi analoghi a quelli ora considerati, i cui centri siano i punti all'infinito delle due rette AC, A′C′ ovvero delle due rette BC, B′C′. Il punto di intersezione delle due rette u e v sarà il punto P, che si cerca.

Nella costruzione grafica, questa soluzione offre un notevole vantaggio su quella data dal Bertot e su quella data dal Sig. Peano nel Vol. II di questa Rivista.

Non saranno forse fuori proposito le considerazioni che seguono.

Indichiamo con P un punto variabile qualunque del piano, le cui distanze da n rette date $a_1\ a_2 \ldots a_n$ siano rispettivamente $p_1 p_2 \ldots p_n$; siano ancora $\rho_1\ \rho_2 \ldots \rho_n$ n numeri reali, la cui somma m sia diversa da 0; indichiamo inoltre con u il bivettore unità e con $a_1\ a_2 \ldots a_n$ n linee in grandezza uguali all'unità di misura e situate rispettivamente sulle rette $a_1\ a_2 \ldots a_n$; allora l'equazione

$$(1') \qquad \rho_1 (a_1 \mathrm{P})^2 + \rho_2 (a_2 \mathrm{P})^2 + \ldots + \rho_n (a_n \mathrm{P})^2 = k (\mathrm{u\,P})^2$$

rappresenta il luogo dei punti P per cui la somma dei quadrati delle distanze dalle rette $a_1\ a_2 \ldots a_n$ moltiplicati pei numeri $\rho_1\ \rho_2 \ldots \rho_n$ è una quantità costante k [Calcolo Geometrico, N. 89, 4]. Essa è di secondo grado in P e rappresenta una linea di second'ordine. Volendone avere l'equazione in coordinate cartesiane, prendiamo come elementi di riferimento un vettore I in grandezza uguale all'unità di misura, il vettore $J = \perp I$ ed un punto O qualunque: ogni linea a_i si può allora mettere sotto la forma

$$a_i = u_i \mathrm{J\,O} + v_i \mathrm{O\,I} + r_i \mathrm{u}.$$

Avremo inoltre $\mathrm{P} = \mathrm{O} + x\mathrm{I} + y\mathrm{J}$.

Essendo $\mathrm{gr}.\,a_i = 1$ sarà $\mathrm{P}a_i = u_i x + v_i y + r_i$, la distanza del punto P dalla retta a_i: l'equazione (1′) si potrà quindi scrivere

$$\sum_i \rho_i (u_i x + v_i y + r_i)^2 = k$$

od anche

(2') $x^2\sum_i \rho_i u_i^2 + y^2\sum_i \rho_i v_i^2 + 2xy\sum_i \rho_i u_i v_i + 2x\sum_i \rho_i u_i r_i + 2y\sum_i \rho_i v_i r_i + \sum_i \rho_i r_i^2 = k$.

Il vettore della linea a_i è data dall'uguaglianza

$$a_i \mathrm{u} = v_i \mathrm{I} - u_i \mathrm{J} ;$$

onde si deduce

$$\rho_i r_i \perp a_i \mathrm{u} = \rho_i r_i u_i \mathrm{I} + \rho_i r_i v_i \mathrm{J} .$$

Si prenda il punto 0 coincidente col punto R, che è il baricentro dei piedi delle perpendicolari, dal medesimo abbassate sulle rette $a_1\, a_2 \ldots a_n$ coi coefficienti $\rho_1\, \rho_2 \ldots \rho_n$; punto che, per quanto si è detto precedentemente, si può sempre determinare essendosi supposto m diverso da 0: i numeri r_i rappresentano allora le distanze del punto R dalle rette date, e per esso si ha $\sum_i \rho_i r_i \perp a_i \mathrm{u} = 0$ per il che dovrà essere $\sum_i \rho_i u_i r_i = 0$ e $\sum_i \rho_i v_i r_i = 0$ onde l'equazione (2) assume la forma

(3') $$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 + 2\, xy \sum_i \rho_i u_i v_i + \sum_i \rho_i r_i^2 = k .$$

Variando la costante k, l'equazione (3') rappresenta una famiglia di coniche aventi per centro il punto R ed omotetiche fra loro. Le direzioni degli assi comuni a tutte queste coniche si può ottenere graficamente col procedimento indicato nel Calcolo Geometrico, N. 89, 7. Prendendo la direzione del vettore I coincidente con quella dell'asse focale delle coniche la loro equazione assume la forma

$$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 + \sum_i \rho_i r_i^2 = k .$$

Fra tutte ha importanza la conica per cui $k = 0$; la sua equazione è

(A) $$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 = - \sum_i \rho_i r_i^2 .$$

Se i coefficienti ρ_i sono tutti dello stesso segno, questa conica rappresenta un'ellisse immaginaria; il suo centro R è allora il punto per cui $\sum_i \rho_i p_i^2 = \sum_i \rho_i r_i^2 =$ minimum. Consideriamo ancora la conica per cui $k = 2 \sum_i \rho_i r_i^2$, la cui equazione è

(B) $$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 = \sum_i \rho_i r_i^2 .$$

Se la conica (A) è un'ellisse immaginaria, la (B) sarà un'ellisse reale e viceversa. Se una di esse è un'iperbole reale, anche l'altra è un'iperbole reale: esse hanno allora gli stessi assintoti, e l'asse immaginario dell'una è situato sull'asse focale dell'altra.

Le coniche (A) e (B) godono di una proprietà assai notevole. Per un punto P qualunque del piano passa una delle coniche di cui si è parlato, e la sua equazione è

$$x^2 \sum_i \rho_i u_i^2 + y^2 \sum_i \rho_i v_i^2 + \sum_i \rho_i r_i^2 = \sum_i \rho_i p_i^2 .$$

Indicando con $x_0\ y_0$ le coordinate di un punto qualunque della conica (A) o della conica (B), e con x, y le coordinate di P, si può scrivere la formola

$$(4') \qquad \sum_i \rho_i p_i^2 = (x^2 \mp x_0^2) \sum_i \rho_i u_i^2 + (y^2 \mp y_0^2) \sum_i \rho_i v_i^2$$

che dà la quantità $\sum_i \rho_i p_i^2$ relativa ad un punto P qualunque del piano in funzione delle coordinate di esso punto e delle coordinate di un punto qualunque di una delle due coniche. I segni superiori si riferiscono alla conica (A), gli inferiori alla conica (B). Il punto di coordinate x_0, y_0 può essere un punto qualunque di una delle due coniche (A) e (B); possiamo quindi scegliere quello in cui esse tagliano l'asse focale, allora $y_0 = 0$ ed x_0 diventa il semiasse focale; se inoltre x è l'ascissa del punto in cui la conica passante per P taglia l'asse focale, la formola (4') si riduce alla

$$\sum_i \rho_i p_i^2 = (x^2 \mp x_0^2) \sum_i \rho_i u_i^2 .$$

Disegnata una delle due coniche (A) e (B), questa formola offre un metodo semplicissimo per determinare graficamente la quantità $\sum_i \rho_i p_i^2$ relativa ad un punto qualunque P del piano: e le due coniche hanno, a questo riguardo, analogia colla *Conica dei momenti nulli* e colla *Conica centrale* nella teoria geometrica dei momenti d'inerzia. Dal punto di vista delle operazioni grafiche non è forse inutile notare che, essendo $u_i^2 + v_i^2 = 1$, fra le costanti $\sum_i \rho_i u_i^2$ e $\sum_i \rho_i v_i^2$ passa la relazione

$$\sum_i \rho_i u_i^2 + \sum_i \rho_i v_i^2 = \sum_i \rho_i .$$

M. Canonica.

Sui fondamenti della Geometria.

Nota di G. Peano

Numerosi trattati di Geometria veggono la luce ogni anno in Italia e all'estero; spesso ne arrivano alla redazione della Rivista, con domanda di una recensione.

Ora questi nuovi trattati non sono, in generale, perfezionamenti di quelli già pubblicati; ma vi si ripetono, sotto varie forme, le cose contenute in altri, e non si tien conto di quelle osservazioni e studii speciali fatti sui fondamenti della Geometria, i quali studii, benchè fatti con scopo puramente scientifico, pur tuttavia fin d'ora permettono, in certa misura, di semplificare, rendendoli più rigorosi, i principii della Geometria.

In questa nota mi propongo appunto di trattare sommariamente quei punti in cui si può effettivamente raggiungere il doppio scopo del rigore e della semplicità; e di far notare agli insegnanti ed agli studiosi che, anche nella matematica più elementare ci sia ancor vasto campo di ricerche per loro natura interessanti, e che possono essere immediatamente utili, perfezionando i metodi di insegnamento. Questi studii non esigono vaste cognizioni, ma logica rigorosa.

È ben noto che, in Geometria, non tutto si può definire; ciò è esplicitamente detto da più autori.

Però varia assai presso i diversi autori il numero e la natura degli enti geometrici non definiti.

Affinchè risulti ben chiaro quali enti si definiscono in un trattato qualunque, e quali no, si osservi che i termini, che trovansi in esso, appartengono in parte alla Grammatica generale, o Logica; sono tali i termini *è*, *sono*, *e*, *o*, *non* . . . Chi si propone la loro classificazione ricostruisce la logica matematica.

Considereremo come termini geometrici tutti i termini che compaiono in un libro di geometria, e che non appartengono alla logica generale.

E il primo lavoro a farsi si è la distinzione di questi termini, o

delle idee che essi rappresentano, in idee *primitive*, che non si definiscono, e in idee *derivate*, che si definiscono.

Dire che l'oggetto, o nome x, si può definire, significa che, combinando convenientemente i termini esprimenti le idee primitive coi termini di logica, si può formare un'espressione identica a quella indicata col nome x.

Se in una definizione oltre al termine che si vuol definire, comparisce qualche termine che non è stato definito, nè classificato fra le idee primitive, si deve conchiudere che la classificazione non fu bene eseguita.

È chiaro che le idee primitive si debbano ridurre al minimo numero; e che per idee primitive si debbano assumere idee semplicissime, e comuni a tutti gli uomini; esse debbono avere il loro nome in tutte le lingue. Chi incomincia lo studio della Geometria deve già possedere queste idee primitive; non è punto necessario che conosca le idee derivate, che saranno definite man mano si progredirà nello studio.

Premesse queste osservazioni generali, passeremo rapidamente in rassegna le idee che nei comuni trattati si dànno come primitive.

Sul concetto di spazio.

In quasi tutti i trattati italiani moderni si introduce per primo il concetto di *spazio*, dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobile, ecc., proprietà queste parimenti non definite.

Ritenendo pertanto il concetto di spazio come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di Geometria nella lingua d'Euclide ed Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine *spazio*, nel senso in cui lo si usa negli odierni trattati.

In conseguenza una prima e notevole semplificazione si ottiene col sopprimere puramente e semplicemente il termine *spazio*, gli aggettivi *omogeneo*, *illimitato* e tutti i postulati che legano quel soggetto con questi attributi.

Questa osservazione sulla inutilità del termine *spazio*, in Geometria, riuscirà strana agli autori che incominciano il loro libro col parlare dello spazio.

Però l'esempio di Euclide e di tanti altri che non ne parlano affatto, è del tutto convincente. In seguito si vedrà meglio il perchè della superfluità di questo termine.

Intanto però, nel presente articolo critico, si continuerà ad usare il termine *spazio* nel significato usuale.

Sui concetti di linea, superficie, solido.

Euclide definisce la linea, la superficie e il solido mediante altrettanti termini non definiti *lunghezza, larghezza* e *altezza.*

Molte altre definizioni furono in seguito proposte, ma tutte lasciano a desiderare.

Così da più autori chiamasi *solido* una parte dello spazio, e *superficie* il limite d'un solido. Ma anche i punti che stanno su d'una superficie o su d'una linea si trovano nello spazio, e quindi sono una parte dello spazio. I punti la cui distanza da un punto fisso è razionale, costituiscono una parte dello spazio; ciò che separa questa parte dello spazio dal rimanente spazio, cioè il contorno di questo gruppo di punti (attribuendo a queste parole il significato preciso che hanno nella teoria dei gruppi di punti), è lo spazio intero, invece di essere una superficie.

Spetta a Möbius (*) l'osservazione, che si possono dare superficie che hanno una sola faccia, od una sola banda; vale a dire, per usare termini dell'uso comune, se si colorisce la superficie, a partire da un suo punto, con continuità, senza mai attraversare l'orlo della superficie, si finirà per aver colorita tutta la superficie, da ambe le parti di ogni punto di essa. Un esempio di siffatta superficie si forma intagliando il rettangolo ABCD, e poi riunendo i lati AB e CD, in guisa che C venga in A e B in D. Una siffatta superficie non può costituire con altre superficie comunque prese, il limite d'un solido.

A D

B C

Si vede così che i concetti di solido, superficie, linea, in generale, siano alquanto indeterminati; e per far vedere meglio questa indeterminazione, già altra volta, come esempio (**) diedi l'espressione analitica d'un punto, che si muove con continuità col variare d'una variabile numerica, e tale che la linea descritta dal punto copre l'intero piano, e ogni arco di linea copre un'area piana; e indicai pure l'espressione analitica d'una curva di cui ogni arco occupa un volume.

(*) *Einseitige Polyëder*. Gesammelte Werke, II Band., pag. 519.

(**) *Sur une courbe* ... Math. Ann. Bd. 36, pag. 157. Vedasi pure KILLING, *Grundlagen der Geometrie*, Paderborn, 1893, ove queste questioni sono profondamente discusse.

Queste difficoltà si evitano facilmente col non parlare di solido, superficie, linea in generale, ma parlando solamente della retta, del piano, della sfera, ... cioè di quelle linee, superficie e solidi che compaiono effettivamento in Geometria elementare, lasciando alla matematica superiore lo studio di questi enti in generale.

Liberatici così dai concetti inutili e mal determinati, l'esame dei concetti fondamentali di Geometria acquista notevole semplicità.

Geometria di Posizione.

La semplificazione diventa più grande se anzitutto ci occupiamo solo di quel gruppo di proposizioni in cui non comparisce l'idea del moto, e quindi nemmeno quella di lunghezza o di altre grandezze geometriche; questo gruppo di proposizioni costituisce la Geometria di Posizione.

Il Pasch, nel suo importante libro *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Leipzig, 1882) giunse a sviluppare la Geometria di Posizione assumendo tre soli concetti primitivi, cioè il *punto*, il *segmento rettilineo* e la porzione finita di *piano*. Ma il terzo di questi concetti si può ridurre ai precedenti assumendo per definizione del piano, o d'una sua parte, una delle ben note sue generazioni. Sicchè, ammessi i due concetti, di punto e di segmento rettilineo, si possono definire tutti gli altri enti, e sviluppare tutta la Geometria di Posizione.

Invece di dire « c è un punto del segmento ab » è forse più comodo dire « c giace fra a e b »; sicchè tutta la geometria considerata basa sul concetto di *punto*, e sulla relazione fra tre punti a, b, c espressa dalla frase « c giace fra a e b ». Questi concetti si debbono ottenere coll'esperienza.

In seguito si farà anche uso delle notazioni di logica matematica, e per indicare le due idee primitive, scriveremo

p invece di « punto »,
$c \varepsilon ab$ invece di « c giace fra a e b ».

Un trattato di Geometria potrebbe cominciare con parole come le seguenti:

« Il punto si segna dagli agrimensori, sul terreno, con una palina
« o con una pietra (termine). Sulla carta, sul legno, ... con un segno
« fatto con un corpo terminato in punta. In agrimensura si verifica
« che un punto c giace fra a e b, quando una persona, posta in a,
« vede che l'oggetto c copre b. Dai disegnatori, fabbri, ... per ricono-
« scere questa relazione fra i tre punti si adopera lo strumento detto
« *rigo*; alcuna volta si usa una corda ben tesa ... ».

Premessi questi od altri consimili schiarimenti, od anche soppressili del tutto, bisognerà determinare le proprietà dell'ente non definito p, e della relazione $c \, \varepsilon \, ab$, mediante assiomi, o postulati. L'osservazione la più elementare ci indica una lunga serie di proprietà di questi enti; a noi non resta che a raccogliere queste cognizioni comuni, ordinarle, ed enunciare come postulati quelle sole che non si possono dedurre da altre più semplici.

Nel mio opuscolo « I principii di Geometria » (*) pubblicai l'analisi di queste proposizioni fondamentali, fatta colla logica matematica. I postulati ivi introdotti per trattare la geometria di posizione sono in numero di 17, ciascuno dei quali è un'affermazione semplice. I primi 11 coincidono in sostanza con quelli proposti dal Pasch. Credo cosa utile il riportarli qui di seguito. I numeri dei postulati, e tutte le citazioni si riferiscono al mio opuscolo anzidetto, che sarà indicato colla abbreviazione « Geom ».

Postulati I-VII.

Post. I. « Si può segnare un punto »

$$\mathrm{p} \, -\!= \Lambda \, .$$

Post. II. « Segnato un punto a, possiamo segnare un nuovo punto x, diverso da a »

$$a \, \varepsilon \, \mathrm{p} \, . \supset : x \, \varepsilon \, \mathrm{p} \, . \, x \, -\!= a \, . -\!=_x \Lambda \, .$$

Post. III. « Fra due punti coincidenti non giace alcun punto »

$$a \, \varepsilon \, \mathrm{p} \, . \supset . \, aa = \Lambda \, .$$

Post. IV. « Fra due punti distinti giacciono dei punti »

$$a \, , b \, \varepsilon \, \mathrm{p} \, . \, a \, -\!= b \, . \supset . \, ab \, -\!= \Lambda \, .$$

Post. V. « Se il punto c giace fra a e b, esso giace pure fra b ed a; ossia il segmento ba è identico ad ab »

$$a \, , b \, \varepsilon \, \mathrm{p} \, . \, c \, \varepsilon \, ab \, . \supset . \, c \, \varepsilon \, ba \, .$$

Post. VI. « Il punto a non giace fra a e b; ossia l'estremo d'un segmento non è interno al segmento stesso »

$$a \, , b \, \varepsilon \, \mathrm{p} \, . \supset . \, a \, - \varepsilon \, ab \, .$$

(*) Torino, Bocca, 1889. Havvi qualche lieve diversità di notazioni fra le formole di questo opuscolo, e le corrispondenti della presente nota.

La relazione fondamentale fra tre punti a, b, c espressa dalla frase « b giace fra a e c », come è enunciata, ha per soggetto il punto intermedio b; noi vogliamo darle un'altra forma in guisa che abbia per soggetto un estremo c. Perciò porremo:

Definizione. « Invece di dire che b sta fra a e c, diremo che c sta sul raggio $a'b$ »

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{p} . \supset : c \varepsilon a'b . = . b \varepsilon ac . \qquad \text{(Geom. § 2 P1)}$$

La relazione $b \varepsilon ac$ si può anche risolvere rispetto ad a, poichè (Post. V) basta scriverla sotto la forma $b \varepsilon ca$, onde, per la definizione ora introdotta, $a \varepsilon c'b$.

Il raggio $a'b$ è adunque l'ombra del punto b rischiarato da a. Invece di dire « raggio $a'b$ » spesso diremo « il prolungamento del segmento ab dalla parte di b », ovvero più semplicemente « il prolungamento di ab ». Il prolungamento di ba è il raggio $b'a$.

Post. VII. « Dati due punti a e b distinti, esistono punti del raggio $a'b$; ossia un segmento si può prolungare da una qualunque delle due parti »

$$a, b \varepsilon \mathrm{p} . a -= b . \supset . a'b -= \Lambda .$$

I postulati finora introdotti non esigono alcun schiarimento. Essi hanno differente importanza, come si vedrà in seguito, quando saranno adoperati.

Postulati VIII-XI.

L'osservazione comune ci indica molte altre proprietà dei segmenti e dei raggi. Eccone le principali.

1. $a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset . ac = ab \cup \iota b \cup bc .$ (Geom. § 7 P4)
2. » $\supset . ab \cap bc = \Lambda .$ (Geom. § 7 P35)

« Dati due punti a e c, e un punto b fra essi, allora il segmento ac resta scomposto nel segmento ab, nel punto b e nel segmento bc; i segmenti ab e bc non hanno alcun punto comune ».

3. $a, b \varepsilon \mathrm{p} . c, d \varepsilon ab . \supset . cd \supset ab .$ (Geom. § 7 P45)

« Se i punti c e d appartengono al segmento ab, tutto il segmento cd giace in ab ».

4. $a, b \varepsilon \mathrm{p} . \supset . ab \cap a'b = \Lambda .$ (Geom. § 6 P19)
5. » $\supset . a'b \cap b'a = \Lambda .$ (Geom. § 6 P21)

« Dati due punti a e b, il segmento ab ed un suo prolungamento

non hanno alcun punto comune; e i due prolungamenti del segmento ab non hanno alcun punto comune ».

6. $a, b, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset . a'c = b'c .$ (Geom. § 9 P3)
7. » $. \supset . a'b = bc \cup \iota c \cup b'c .$ (Geom. § 8 P4)

« Dati tre punti a, b, c se b giace fra a e c, allora i raggi $a'c$ e $b'c$ coincidono; e il raggio $a'b$ consta del segmento bc, del punto c, e del raggio $b'c$ ».

8. $a, b \varepsilon \mathrm{p} . c, d \varepsilon a'b . \supset . cd \supset a'b .$ (Geom. § 8 P14)

« Se c e d sono punti del raggio $a'b$, l'intero segmento cd giace sul raggio $a'b$ ».

Analizzando queste proposizioni, si scorge anzitutto che esse sono dei gruppi di affermazioni, e non delle affermazioni semplici.

Così, nella tesi della prop. 1 si ha l'eguaglianza fra due classi; ora un'eguaglianza $a = b$ equivale all'insieme delle due proposizioni $a \supset b$, $b \supset a$; quindi la prop. 1 è equivalente al sistema delle prop. 9 e 10 che seguono:

9. $a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset . ab \cup \iota b \cup bc \supset ac .$ (Geom. § 6 P5)
10. » $. \supset . ac \supset ab \cup \iota b \cup bc .$ (Geom. § 7 P3)

La proposizione 9 alla sua volta, in virtù dell'identità di logica $a \cup b \supset c . = . a \supset c . b \supset c$ (Introduction au Formulaire, § 12, prop. 4'), si scinde in tre proposizioni:

11. $a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset . ab \supset ac .$ (Geom. § 6 P3)
12. » $. \supset . \iota b \supset ac .$
13. » $. \supset . bc \supset ac .$ (Geom. § 6 P4)

La 11, ove non si vogliano altri segni che i primitivi p, e $c \varepsilon ab$, diventa

$$a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . \supset : d \varepsilon ab . \supset_d . d \varepsilon ac$$

o, importando l'ipotesi (Introd. § 12 prop. 13)

$$a, c \varepsilon \mathrm{p} . b \varepsilon ac . d \varepsilon ab . \supset . d \varepsilon ac ;$$

e cambiando lettere, cioè leggendo b, c, d invece di d, b, c, onde avere la corrispondenza fra l'ordine alfabetico delle lettere, e la successione dei punti, si avrà

Post. VIII. $a, d \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ad . b \varepsilon ac . \supset . b \varepsilon ad$,

e siccome non sappiamo ridurre a forma più semplice questa proposizione, nè la sappiamo dedurre dalle precedenti, la assumeremo come postulato.

La prop. 12 si può leggere $b \varepsilon ac . x = b . \supset . x \varepsilon ac$, che è un'identità logica.

La prop. 13 si ottiene dalla 11 scambiando a con c, ed osservando che $ca = ac$, in virtù del post. V. Sicchè la prop. 13 è conseguenza dei postulati V ed VIII.

La prop. 10, ove tutto si esprima coi segni primitivi, e cambiando lettere, diventa

Post. IX. $a , d \varepsilon \mathrm{p} . b , c \varepsilon ad . \supset : b \varepsilon ac . \cup . b = c . \cup . b \varepsilon cd$,

che assumeremo come postulato. Pertanto la prop. 1 ha dato luogo a due nuovi postulati ; e precisamente

Post V . Post VIII . Post IX . ɔ . prop 1 .

Nel postulato VIII al posto di d si legga b; si avrà:

$$a , b \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ab . b \varepsilon ac . \supset . b \varepsilon ab .$$

Ma, pel post. VI, $b - \varepsilon ba$, e quindi (post. V) $b - \varepsilon ab$; onde la tesi è assurda ; perciò sarà assurda l'ipotesi (Form. I, § 3 P13) .

$$a , b \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ab . b \varepsilon ac . = \Lambda \qquad \text{(Geom. § 6 P18)}$$

la quale è conseguenza dei postulati V, VI e VIII. Questa proposizione si enuncia:

Teorema. « È assurdo che tre punti a , b , c siano tali che b giaccia fra a e c, e c fra a e b ».

Esportando la prima parte dell'ipotesi di questo teorema, e risolvendo la terza rispetto a c, si avrà:

$$a , b \varepsilon \mathrm{p} . \supset : c \varepsilon ab . c \varepsilon a'b . =_c \Lambda ,$$

ossia (Introduction, § 16 P2, e Formulario, I, § 4 P3)

$$a , b \varepsilon \mathrm{p} . \supset : c \varepsilon (ab \frown a'b) . =_c \Lambda$$

da cui, eliminando il c (Introd., § 16 P5),

$$a , b \varepsilon \mathrm{p} . \supset . ab \frown a'b = \Lambda \qquad \text{(Geom. § 6 P19)}$$

cioè

Teorema. « Dati due punti a e b, il segmento ab ed il suo prolungamento dalla parte di b non hanno alcun punto comune ». Con uno scambio di lettere si ha che il segmento ab non ha nessun punto comune col suo prolungamento dalla parte di a.

Se invece, nel teorema indicato con § 6 P18 si risolvono le proposizioni rispetto ad a , esso assume la forma :

$$b , c \varepsilon \mathrm{p} . a \varepsilon b'c . a \varepsilon c'b . = \Lambda ,$$

onde, esportando come prima:

$$b, c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, \supset : a \,\varepsilon\, b'c \,.\, a \,\varepsilon\, c'b \,.\, =_a \Lambda ,$$

da cui eliminando a, collo stesso processo con cui si è eliminato or ora il c, si avrà:

$$b, c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, \supset \,.\, b'c \frown c'b = \Lambda$$

e leggendo a e b al posto di b e c, si avrà:

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, \supset \,.\, a'b \frown b'a = \Lambda , \qquad \text{(Geom. § 6 P21)}$$

cioè:

Teorema. « Dati due punti a e b, non solo, come già si è dimostrato, il segmento ab non ha nessun punto comune coi suoi prolungamenti da ambe le parti, ma nemmeno questi prolungamenti hanno alcun punto comune ».

Così le proprietà espresse dalle proposizioni 4 e 5 sono conseguenza dei postulati V, VI e VIII.

Si ha il seguente

Teorema. « Dati due punti a e d, se c sta fra a e d, e b fra a e c, allora c sta fra b e d ».

$$a, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, c \,\varepsilon\, ad \,.\, b \,\varepsilon\, dc \,.\, \supset \,.\, c \,\varepsilon\, bd \,. \qquad \text{(Geom. § 7 P5)}$$

Infatti dalle ipotesi fatte, e dal post. VIII si trae $b \,\varepsilon\, ad$.

$$\mathrm{Hp} \,.\, \supset \,.\, b \,\varepsilon\, ad \,.$$

Ora dall'ipotesi $b \,\varepsilon\, ac$, e dal post. VI, si deduce che b è distinto da c:

$$\mathrm{Hp} \,.\, \supset \,.\, c - = b \,.$$

Dall'ipotesi $b \,\varepsilon\, ac$, e § 6 P18 si trae:

$$\mathrm{Hp} \,.\, \supset \,.\, c - \varepsilon\, ab \,.$$

Quindi si ha:

$$(\alpha) \qquad \mathrm{Hp} \,.\, \supset \,.\, a, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, b, c \,\varepsilon\, ad \,.\, c - = b \,.\, c - \varepsilon\, ab \,.$$

Ora il post. IX, ove si scambi b con c, e si trasportino due parti dal secondo nel primo membro, diventa

$$(\beta) \qquad a, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, b, c \,\varepsilon\, ad \,.\, c - \varepsilon\, ab \,.\, c - = b \,.\, \supset \,.\, c \,\varepsilon\, bd \,.$$

Le (α) e (β) sono le premesse d'un sillogismo, la cui conclusione è

$$\mathrm{Hp} \,.\, \supset \,.\, c \,\varepsilon\, bd$$

che è il teorema a dimostrarsi. Esso dipende dai post. V, VI, VIII, IX.

La proprietà espressa dalla prop. 2 si può enunciare

$$a, c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, b \,\varepsilon\, ac \,.\, d \,\varepsilon\, ab \,.\, d \,\varepsilon\, bc = \Lambda ,$$

ed essa è conseguenza dei postulati finora introdotti.

Invero, pel teorema ora dimostrato (Geom. § 7 P5), si ha:

(α) $a, c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, b \,\varepsilon\, ac \,.\, d \,\varepsilon\, ab \,.\, \supset .\, b \,\varepsilon\, dc$; (post. V, VI, VIII, IX)

moltiplicando i due membri per $d \,\varepsilon\, bc$ si ha:

(β) $a, c \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, b \,\varepsilon\, ac \,.\, d \,\varepsilon\, ab \,.\, d \,\varepsilon\, bc \,.\, \supset .\, b \,\varepsilon\, dc \,.\, d \,\varepsilon\, bc$. »

Ma una delle proposizioni già dimostrate (Geom. § 6 P18) è

(γ) $b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, b \,\varepsilon\, dc \,.\, d \,\varepsilon\, bc \,. = \Lambda$ (post. V, VI, VIII)

da (β) e (γ) si deduce il teorema a dimostrarsi, che è conseguenza dei postulati V, VI, VIII, IX. Anche la proprietà espressa dalla prop. 3 si può dimostrare, e dedurre dai postulati III, V, VIII, IX.

Teorema. « Se sopra un segmento ab si prendono due punti c e d, l'intero segmento cd è contenuto in ab ». In simboli

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, c, d \,\varepsilon\, ab \,.\, \supset .\, cd \supset ab$. (Geom. § 7 P45)

Infatti, nelle ipotesi enunciate, in virtù del postulato IX, o d sta fra a e c, o coincide con c, o giace fra c e b.

Ma, se d giace fra a e c, il segmento cd sarà contenuto in ca; ma poichè c giace fra a e b, il segmento ca sarà contenuto in ab; quindi cd sarà contenuto in ab.

Se d coincide con c, il segmento cd è nullo, e quindi è contenuto in ogni classe.

Se d giace fra c e b, sarà $cd \supset bc$; ma $bc \supset ab$; quindi $cd \supset ab$.

Dunque, qualunque sia la posizione dei punti c e d in ab, sempre il segmento cd è contenuto in ab.

In modo analogo si possono scomporre in proposizioni semplici le proprietà affermate dalle proposizioni 6, 7, 8; si troverà un gruppo di proposizioni fra cui due sole si debbono assumere come postulati, e sono

Post. X. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, c, d \,\varepsilon\, a'b \,.\, \supset .\, c = d \,.\cup.\, c \,\varepsilon\, bd \,.\cup.\, a \,\varepsilon\, bc$.

« Se c e d sono due punti del prolungamento di ab, allora o essi coincidono, o c sta fra b e d, ovvero d sta fra b e c ».

Post. XI. $a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, b \,\varepsilon\, ac \,.\, c \,\varepsilon\, bd \,.\, \supset .\, c \,\varepsilon\, ad$.

« Se b sta fra a e c, e c fra b e d, allora c sta fra a e d ».

Definizione della retta.

Finora si sono considerati semplicemente dei segmenti e dei raggi. In più modi si può definire la retta illimitata. Si può ad esempio porre:

Definizione. « Essendo a e b due punti distinti, dicesi retta deter-

minata da a e da b la figura formata dal segmento ab, dai suoi estremi a e b, e dai sui prolungamenti $a'b$ e $b'a$ ».

$$a,b \,\varepsilon\, \mathrm{p} . a -= b . \supset . \mathrm{retta}(a,b) = b'a \cup \iota\, a \cup ab \cup \iota\, b \cup a'b . \quad \text{(Geom. § 9 P8)}$$

Si osservi che retta (a, b) è una classe di punti; e la formola $c\, \varepsilon$ retta (a, b) si leggerà « c è un punto della retta ab ».

Si ha immediatamente retta (a, b) = retta (b, a), poichè scambiando a con b, non si fa altro che permutare le parti della retta.

Se c è un punto del segmento ab, sarà retta (a, b) = retta (a, c). Invero, dalle ipotesi fatte si avrà

$$b'a = c'a \,.\, ab = ac \cup \iota\, c \cup cb \,.\, a'c = cb \cup \iota\, b \cup a'b \,;$$

sostituendo e raggruppando convenientemente le parti in cui è scomposta la retta ab, si forma la retta ac. Analogamente se c è un punto del raggio $a'b$, ovvero del raggio $b'a$, sarà sempre retta(a,b)=retta(a,c); onde:

$$a,b \,\varepsilon\, \mathrm{p} . a -= b . c \,\varepsilon\, \mathrm{retta}(a,b) . c -= a . \supset . \mathrm{retta}(a,b) = \mathrm{retta}(a,c). \quad \text{(Geom. § 9 P13)}$$

Di qui risulta che una retta è determinata da due suoi punti; e due rette aventi due punti comuni coincidono.

Tre punti diconsi *collineari* se giacciono su d'una stessa retta. La condizione affinchè tre punti siano collineari è che o due coincidano, ovvero che uno appartenga al segmento determinato dagli altri due.

Il raggio, o semiretta $a'b$, come si è detto, è il raggio che va da b in direzione opposta di a. Nell'uso comune si parla spesso della semiretta che ha per origine a, e che contiene il punto b; la indicheremo in seguito con semiretta (a, b), e per abbreviazione Sr (a, b); sicchè

$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, a -= b \,.\, \supset . \mathrm{Sr}\,(a, b) = ab \cup \iota\, b \cup a'b \,.$$

Diremo complemento del raggio Sr (a, b) il raggio che va da a in direzione opposta di b, cioè porremo

$$\mathrm{Co\,Sr}\,(a, b) = b'a \,.$$

Si avrà

$$\mathrm{retta}\,(a, b) = \mathrm{Sr}\,(a, b) \cup \iota\, a \cup \mathrm{Co\,Sr}\,(a, b)\,.$$

Sull'indipenpenza dei postulati della retta.

Le proposizioni finora esaminate costituiscono una parte della Geometria, che si potrebbe chiamare Geometria della retta. L'analisi di queste proposizioni, e la loro scomposizione in postulati si deve in sostanza al prof. M. Pasch. Havvi qualche diversità fra quanto precede

e le trattazioni del Pasch, come può assicurarsi chiunque esamini i due lavori; però non credo di arrestarmi su queste leggiere differenze.

La prima questione scientifica che si presenta si è se le proposizioni assunte come postulati siano effettivamente indipendenti, ovvero se si possano ridurre fra loro.

Un lavoro fu pubblicato su questo soggetto dal Dott. VAILATI, col titolo *Sui principî fondamentali della Geometria della retta* (Rivista di Matematica, tomo II, pag. 71). Ivi l'A. studia il sistema di punti d'una retta fissa considerati come seguentisi in un senso, sicchè abbia un significato la frase: « il punto b segue il punto a ». Mediante questa relazione fra due punti l'A. esprime quella indicata colla frase: « il punto c giace fra a e b », e ne ricava tutte le proprietà da tre proposizioni primitive. Ma questa riduzione non è applicabile ai punti dello spazio, poichè la relazione fondamentale fra tre punti, espressa dalla frase « il punto c giace fra a e b » non si sa esprimere mediante una relazione fra due punti soli.

Si può provare l'indipendenza di alcuni postulati da altri, mediante esempi. Gli esempi per provare l'indipendenza dei postulati si ottengono attribuendo ai segni non definiti, che qui sono il punto, e la relazione fra tre punti espressa con $c \varepsilon ab$, dei significati affatto qualunque; e se si trova che i segni fondamentali, in questo nuovo significato, soddisfino ad un gruppo di proposizioni primitive, e non a tutte, si dedurrà che queste non sono conseguenze necessarie di quelle; ossia che il secondo gruppo di proposizioni esprimono proprietà dei punti e della relazione fondamentale $c \varepsilon ab$ che ancora non erano espresse da quelle.

Quindi per provare l'indipendenza di n postulati, bisognerebbe portare n esempi di interpretazione dei segni non definiti (nel nostro caso p, e $c \varepsilon ab$) ciascuno dei quali soddisfi a $n - 1$ postulati, e non al rimanente.

Siffatto complesso di esempi mi riuscì possibile costrurre per dimostrare l'indipendenza delle proprietà che si assunsero per caratteristiche dei numeri interi (Vedasi il mio articolo *Sul concetto di numero*, Rivista di Matematica, t. I, pag. 87). Qui invece siamo ben lungi dallo avere completata questa prova.

Ecco alcuni esempi:

1. Se con p si intende numero positivo, Q (ovvero numero reale q, o numero razionale positivo R, o numero razionale r), e con $c \varepsilon ab$ si intende cha c è compreso fra a e b, cioè $c \varepsilon a^{-}b$, esclusi gli estremi, sono verificati tutti i postulati dall'1 all'11. Il segno $a'b$, se $a > b$, indica l'insieme dei numeri minori b, e se $a < b$, l'insieme nei numeri

maggiori di b. La retta ab coincide col sistema dei numeri considerati. Lo stesso avviene se si considerano i punti d'una curva aperta, i quali cioè si possano mettere ordinatamente in corrispondenza coi numeri precedenti.

2. Se con p si intende numero intero (positivo o negativo) n, e con $c \varepsilon ab$ si intende ancora che l'intero c sia compreso fra a e b, sono verificati tutti i postulati precedenti, eccettuato il IV, poichè se a e b sono interi successivi, fra essi non è compreso alcun numero intero. Così è dimostrato che il post. IV non è conseguenza degli altri.

3. Se con p si intende l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1, compresi gli estremi, cioè l'intervallo θ, e con $c \varepsilon ab$ si intende sempre che c è compreso fra a e b, saranno verificati tutti i postulati precedenti, eccettuato il VII; questo pertanto è indipendente dagli altri.

4. Con p si intenda l'insieme dei punti che stanno sulle tre semirette aventi la stessa origine; con $c \varepsilon ab$ la frase « c giace sul più breve cammino che unisce i due punti a e b, questo cammino essendo fatto sulle semirette date ». Sono verificati tutti i postulati precedenti, eccettuato il X; poichè se a, b, c, d hanno la disposizione della figura, è vero che b sta sul più breve cammino fra a e c e fra a e d, ma non ne risulta che c e d coincidano, ovvero che c appartenga al segmento bd, ovvero d al segmento bc.

5. Se con p intendiamo numero intero positivo, N, e con $c \varepsilon ab$ la relazione « c è un multiplo comune di a e di b », saranno soddisfetti i postulati 1, 2, 4, 5, 8, 11; se dicendo c è un multiplo di a, si esclude il caso $c = a$, vale a dire si intende $c \varepsilon (\mathrm{N}+1) \times a$, sarà ancora vero il postulato 6; gli altri non sono verificati.

6. Se con p intendiamo i punti dello spazio ordinario, e con $c \varepsilon ab$ intendiamo « il punto c è equidistante da a e da b », allora ab rappresenta il piano perpendicolare alla retta da a a b, nel suo punto medio, e $a'c$ la superficie sferica di centro c e passante per a. Sono verificati i postulati 1, 2, 4, 5, 6, 7, e non gli altri. Nel postulato 6 però si deve supporre $a - = b$.

7. Se con p intendiamo i punti dello spazio ordinario, e con $c \varepsilon ab$ intendiamo « l'angolo acb è retto, e c è distinto da a e da b », allora ab rappresenta la superficie sferica di diametro ab, e $a'c$ il piano passante per c e perpendicolare alla retta ab. Sono verificati i postulati dall'1 al 7, e non i successivi.

Così si può continuare; ma in questo istante noi possiamo solamente

affermare che non si sanno scomporre le proposizioni assunte per postulati in altre più semplici; nè si è provata la loro indipendenza.

Geometria del piano.

Scriveremo p_2 invece della parola *retta*.

Essendo a, b, c dei punti, scriveremo $(a, b, c) \varepsilon \mathrm{Coll}$, o anche $a, b, c \varepsilon \mathrm{Coll}$, per dire a, b, c sono punti collineari.

Post. XII. $r \varepsilon \mathrm{p}_2 . \supset : x \varepsilon \mathrm{p} . x - \varepsilon r . -=_x \Lambda .$

Post. XIII. $a,b,c \varepsilon \mathrm{p}.(a,b,c) - \varepsilon \mathrm{Coll} . d \varepsilon bc . e \varepsilon ad . \supset : f \varepsilon ac . e \varepsilon bf . -=_f \Lambda .$

Post. XIV. » » » $. f \varepsilon ac . \supset : e \varepsilon ad . e \varepsilon bf . -=_e \Lambda .$

Cioè: « Data una retta r, si può segnare un punto x fuori di essa ».

« Se a, b, c sono tre punti non collineari, e se d è un punto del segmento bc, ed e un punto di ad, allora esiste un punto f appartenente al segmento ac, tale che e giaccia fra b ed f; vale a dire il segmento ac e il prolungamemto di be hanno un punto comune ».

« Avendo a, b, c lo stesso significato, se d è un punto di bc, ed f un punto di ac, esiste un punto e comune ai segmenti ad e bf ».

Prima di procedere oltre, introdurremo alcune notazioni.

Definizione. « Se a è un punto, e k una figura, o classe di punti, con ak intendiamo l'insieme dei punti che stanno sui segmenti che vanno da a ai varii punti di k ».

$$a \varepsilon \mathrm{p} . k \varepsilon \mathrm{Kp} . \supset . ak = \mathrm{p} \cap \overline{x \varepsilon} (y \varepsilon k . x \varepsilon ay . -=_y \Lambda) . \quad \text{(Geom. § 2 P3)}$$

In conseguenza, essendo a, b, c dei punti non collineari, con $a(bc)$ si intende l'insieme dei punti che stanno sui segmenti che uniscono a ai varii punti di bc.

Questa definizione è applicabile anche se tutti i punti considerati giacciono su d'una retta. Così $a(ab) = ab$ (Geom. § 6 P16). La scrittura $a(a'b)$ rappresenta il raggio che ha per origine a e che contiene b:

$$\mathrm{Sr}\,(a, b) = aa'b .$$

Indipendentemente da ogni postulato geometrico sussistono le proposizioni:

$$a \varepsilon \mathrm{p} . h, k \varepsilon \mathrm{Kp} . h \supset k . \supset . ah \supset ak . \quad \text{(Geom. § 3 P10)}$$

$$\text{» » } . \supset . a(h \cup k) = ah \cup ak . \quad \text{(Geom. § 3 P13)}$$

« Date due figure h e k, se la prima è parte della seconda, anche la proiezione della prima da un punto a è contenuta nella proiezione della seconda; e la proiezione della somma logica delle due figure è la somma logica delle proiezioni delle medesime ».

Il postulato XIII contiene nell'ipotesi la lettera d, che non comparisce nella tesi. Quindi con un procedimento di logica (Introduction, § 18 prop. 10), essa si può trasformare in:

$$a,b,c \varepsilon \mathrm{p} . (a,b,c) - \varepsilon \mathrm{Coll} : d \varepsilon bc . e \varepsilon ad . - =_d \Lambda :\supset: f \varepsilon ac . e \varepsilon bf . - =_f \Lambda .$$

« Dati i punti non collineari a, b, c, se si può determinare un punto d appartenente al segmento bc, e tale che e sia un punto di ad, allora si può determinare un punto f di ac, tale che e sia un punto di bf ».

Ma, per la definizione precedente,

$d \varepsilon bc . e \varepsilon ad . - =_d \Lambda$ equivale a $e \varepsilon a(bc)$
e $f \varepsilon ac . e \varepsilon bf . - =_f \Lambda$ » $e \varepsilon b(ac)$,

onde la proposizione precedente diventa:

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{p} . (a, b, c) - \varepsilon \mathrm{Coll} . e \varepsilon a(bc) . \supset . e \varepsilon b(ac) .$$

Esportando le due prime parti dell'ipotesi, questa si trasforma in

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{p} . (a, b, c) - \varepsilon \mathrm{Coll} . \supset : e \varepsilon a(bc) . \supset_e . e \varepsilon b(ac)$$

ovvero

» » $. \supset . a(bc) \supset b(ac) .$

Se in questa si scambiano a con b, si avrà

» » $. \supset . b(ac) \supset a(bc) .$

Moltiplicandole logicamente membro a membro, si ha infine

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{p} . (a, b, c) - \varepsilon \mathrm{Coll} . \supset . a(bc) = b(ac) \quad \text{(Geom. § 10 P6)}$$

cioè:

Teorema. « Se a, b, c sono punti non collineari, il triangolo che si ottiene proiettando da a il segmento bc coincide con quello che si ottiene proiettando da b il segmento ac ». D'altra parte (post. V) si ha che $bc = cb$, onde $a(bc) = a(cb)$. Scriviamo abc invece di $a(bc)$. Pertanto nella successione abc è permesso di permutare il primo punto col secondo, ed il secondo col terzo; onde è permesso di invertire comunque l'ordine dei vertici del triangolo.

Teorema. « Dati tre punti non collineari a, b, c, e preso fra ab un punto p, e su ac un punto q, tutto il segmento pq appartiene al triangolo abc ».

$$a, b, c \varepsilon \mathrm{p} - \mathrm{Coll} . p \varepsilon ab . q \varepsilon ac . \supset . pq \supset abc . \quad \text{(Geom. § 10 P10)}$$

Infatti, poichè $q \varepsilon ac$, ne risulta $pq \supset pac$, per la definizione di $p(ac)$. Ma $pac = cap$, pel teorema precedente.

Dall'ipotesi $p \varepsilon ab$, e dal postulato VIII si ricava $ap \supset ab$; onde $cap \supset cab$. Infine si ha $cab = abc$.

Dunque $pq \supset pac \,.\, pac = cap \,.\, cap \supset cab \,.\, cab = abc$; da cui $pq \supset abc$.

La proposizione precedente sussiste pure se a, b, c sono collineari, purchè a non appartenga al segmento bc.

Definizione. « Una figura k dicesi *convessa*, se il segmento che unisce due punti di essa è tutto contenuto in essa ».

$k \,\varepsilon\, \mathrm{Conv} \,.=:\, k \,\varepsilon\, \mathrm{Kp} : x, y \,\varepsilon\, k \,.\, \supset_{x,y} .\, xy \supset k$. (Geom. § 2 P14)

Senza bisogno di postulati geometrici si dimostrano le seguenti proposizioni:

Teorema. « La figura comune a due figure convesse è una figura convessa ».

$h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Conv} \,.\supset.\, h \frown k \,\varepsilon\, \mathrm{Conv}$. (Geom. § 3 P31)

Teorema. « Se a, b, c sono punti d'una figura convessa, il triangolo abc è tutto contenuto in essa; e se a, b, c, d sono quattro punti d'una figura convessa, il tetraedro $abcd$ fa parte di essa ».

$k \,\varepsilon\, \mathrm{Conv} \,.\, a, b, c \,\varepsilon\, k \,.\supset.\, abc \supset k$. (Geom. § 3 P33)
» $.\, a, b, c, d \,\varepsilon\, k \,.\supset.\, abcd \supset k$. (» 34)

Alcune proposizioni già enunciate nella Geometria della retta, introducendo il concetto di figure convesse, si semplificano. Così abbiamo:

« Il segmento compreso fra due punti a e b è una figura convessa; come pure lo stesso segmento cui si aggiunga un estremo, o tutti e due. Un raggio è una figura convessa, anche se gli si aggiunge l'origine. Ogni retta è una figura convessa ».

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\supset.\, ab, ab \cup \iota a, ab \cup \iota a \cup \iota b \,\varepsilon\, \mathrm{Conv}$. (Geom. § 7 P46,47,48)
» $a'b, a'b \cup \iota b \,\varepsilon\, \mathrm{Conv}$. (Geom. § 8 P15, 16)
» $\mathrm{retta}\,(a, b) \,\varepsilon\, \mathrm{Conv}$. (Geom. § 9 P17)

Ritornando alla Geometria del piano, l'ultimo teorema dimostrato si trasforma in quest'altro:

Teorema. « Se si proietta una figura convessa k da un punto a fuori di essa, la figura risultante ak è pure convessa ».

$k \,\varepsilon\, \mathrm{Conv} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, a \,-\varepsilon\, k \,.\supset.\, ak \,\varepsilon\, \mathrm{Conv}$. (Geom. § 10 P13)

Ne risulta che un triangolo abc, ove $a \,-\varepsilon\, bc$, è figura convessa.

Teorema. « Dati tre punti a, b, c non collineari, se p è un punto del triangolo abc, allora questo triangolo resta scomposto nel punto p, nei segmenti pa, pb, pc, e nei triangoli pab, pbc, pca ».

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\, p \,\varepsilon\, abc \,.\supset.\, abc = \iota p \cup pa \cup pb \cup pc \cup pab \cup pbc \cup pca$.
(Geom. § 10 P26)

Infatti per definizione, se $p \,\varepsilon\, abc$, esiste un punto d di bc, tale che $p \,\varepsilon\, ad$.

Ora se $d \varepsilon bc$, sarà $bc = bd \cup \iota d \cup dc$; onde proiettando,

$$abc = abd \cup ad \cup adc .$$

E se p è un ad, sarà $ad = ap \cup \iota p \cup pd$; onde $abd = bad = bap \cup bp \cup bpd$, e $adc = cad = cap \cup cp \cup cpd$. Sostituendo nell'espressione di abc si avrà questo triangolo scomposto in parti nel modo indicato.

Teorema. « Presi nell'interno del triangolo abc due punti distinti p e q, il raggio $p'q$ incontra il perimetro del triangolo ».

$$a,b,c \varepsilon \text{p}-\text{Coll}. p,q \varepsilon abc . p -= q . \supset . p'q \frown (\iota a \cup ab \cup \iota b \cup bc \cup \iota c \cup ca) -= \Lambda .$$ (Geom. § 10 P27)

Infatti, poichè $p \varepsilon abc$, sarà, pel teorema precedente,

$$abc = \iota p \cup pa \cup pab \cup pb \cup pbc \cup pc \cup pca$$

e poichè $q \varepsilon abc$, e $q -= p$, sarà

$$q \varepsilon pa \cup pab \cup pb \cup pbc \cup pc \cup pca$$

cioè

$$q \varepsilon p (\iota a \cup ab \cup \iota b \cup bc \cup \iota c \cup ca) .$$

Ciò significa che q sta su qualche raggio che da p proietta il perimetro del triangolo. Ciò equivale alla proposizione a dimostrarsi.

Definizione. « Dato un punto a ed una figura k, con $a'k$ intendiamo la figura descritta dal raggio $a'y$, ove y coincida successivamente con tutti i punti della figura k, cioè l'ombra di k illuminata da a »:

$$a \varepsilon \text{p} . k \varepsilon \text{Kp} . \supset . a'k = \text{p} \frown \overline{x \varepsilon} (y \varepsilon k . x \varepsilon a'y . -=_y \Lambda) .$$ (Geom. §2 P4)

In conseguenza, essendo a, b, c tre punti non collineari, $a'bc$ rappresenta la figura descritta da $a'y$, ove y percorra il segmento bc: essa è limitata dal segmento bc e dai due raggi $a'b$ e $a'c$. La scrittura $a'b'c$, cioè $a'(b'c)$ rappresenta l'*angolo* limitato dai raggi $a'c$ e $b'c$. Se r è una retta non passante per a, $a'r$ rappresenta il *semipiano* limitato dalla retta r, e che non contiene a.

Indipendentemente da ogni postulato geometrico sussistono le proposizioni:

$$a \varepsilon \text{p} . h , k \varepsilon \text{Kp} . h \supset k . \supset . a'h \supset a'k .$$ (Geom. § 3 P11)

$$\text{»} \quad . \supset . a'(h \cup k) = a'h \cup a'k .$$ (» P14)

Ricorrendo al postulato XIV si dimostra

Teorema. « Se h è una figura convessa, e se a è un punto non appartenente ad h, allora la figura $a'h$ è convessa; come pure la $h \cup a'h$; come pure la $ah \cup h \cup a'h$ (Geom. § 11 P6, 7, 8).

Dati tre punti non collineari a, b, c, con piano (a, b, c) si può indicare per definizione, la figura costituita dai tre punti a, b, c, dai

segmenti ab, ac, bc, dai loro prolungamenti $a'b$, $b'a$, $a'c$, $c'a$, $b'c$, $c'b$, dal triangolo abc, dalle tre figure $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, e dagli angoli $a'b'c$, $b'c'a$, $c'a'b$.

Teorema. « Il piano (a, b, c) non si altera se al posto di a, b, c si mettono tre punti qualunque non collineari d, e, f del piano stesso », ossia

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\, d, e, f \,\varepsilon\, \text{piano}\,(a, b, c) \,.\, d, e, f - \varepsilon\, \mathrm{Coll} \,.\, \supset .$$
$$\text{piano}\,(a, b, \mathrm{c}) = \text{piano}\,(d, e, f) \qquad \text{(Geom. § 11 P23)}$$

Daremo un cenno della dimostrazione di questa proposizione, rimandando per lo sviluppo completo all'opuscolo menzionato.

Supponiamo anzitutto che, essendo a, b, c non collineari, d sia un punto di bc. Allora, dalla Geometria della retta, risulta

(1) $bc = bd \cup \iota d \cup dc$.

Proiettando si ha:

(2) $abc = abd \cup ad \cup adc$
(3) $a'bc = a'bd \cup a'd \cup a'dc$
(4) $b'c'a = b'd'a \cup d'a \cup d'c'a$.

Si ha

(5) $d'b = c'b$

da cui

(6) $a'd'b = a'c'b$.

Si ha, sempre dalla Geometria della retta,

(7) $b'd = dc \cup \iota c \cup b'c$

da cui

(8) $a'b'd = a'dc \cup a'c \cup a'b'c$.

Ricorrendo ai due postulati XIII e XIV si dimostra che

(9) $b'ad = adc \cup ac \cup b'ac$. (Geom. § 11 P15)

Trasformando convenientemente questa, si ha:

(10) $d'ab = c'ab \cup c'a \cup c'd'a$. (Geom. § 11 P16)

Le prop. (1) ... (10) dicono che le diverse parti costituenti il piano (a, b, c), convenientemente raggruppate, formano il piano (a, b, d), cioè

(11) $d \,\varepsilon\, bc \,.\, \supset .\, \text{piano}\,(a, b, c) = \text{piano}\,(a, b, d)$. (Geom. § 11 P17)

Si scambi nella (11) c con d e si ricordi che se $d \,\varepsilon\, bc$, dire che

a, b, c non sono collineari, equivale a dire che non lo sono a, b, d. Essa diventa:

$$c \varepsilon bd . \supset . \text{piano}(a, b, d) = \text{piano}(a, b, c)$$

ovvero

(12) $d \varepsilon b'c . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Scambiando in questa b con c, si ha:

$$d \varepsilon c'b . \supset . \text{piano}(a, c, b) = \text{piano}(a, c, d) .$$

Ora piano (a, c, b) = piano (a, b, c), dalla definizione del piano; essendo poi b fra a e c, per la 11, piano (a, c, d) = piano (a, b, d); dunque

(13) $d \varepsilon c'b . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Le prop. (11), (12), (13) dicono che se si prende il punto d sul segmento bc, o su uno qualunque dei suoi prolungamenti $b'c$ o $c'b$, sempre i due piani coincidono. Quindi, comunque si prenda d sulla retta bc, purchè distinto da b, sempre i piani abc ed abd coincidono.

(14) $d \varepsilon \text{retta}(ab) . d -= b . \supset . \text{piano}(a,b,c) = \text{piano}(a,b,d)$. (Geom. § 11 P18)

Ne risulta

(15) $d \varepsilon abc . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Infatti, dall'ipotesi si deduce che esiste un punto p tale che $p \varepsilon bc . d \varepsilon ap$. Quindi per la (11) piano (a,b,c) = piano (a,b,p), e piano (a,b,p) = piano (a,b,d).

(16) $d \varepsilon a'bc . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Infatti esisterà un punto p tale che $p \varepsilon bc$, $d \varepsilon a'p$; per la (11) sarà piano (a,b,c) = piano (a,b,p), per la (12), piano (a,b,p) = piano (a,b,d).

(17) $d \varepsilon a'b'c . \supset . \text{piano}(a, b, c) = \text{piano}(a, b, d)$.

Di qui si deduce che qualunque sia il punto d del piano a, b, c, purchè non collineare con a e b, sarà sempre piano (a,b,c)=piano(a,b,d).

Se ora e è un nuovo punto del piano, non collineare con a, b, d, sarà piano (a, b, d) = piano (a, d, e); ed infine se f è un punto non collineare con d ed e, sarà piano (a, d, e) = piano (d, e, f); quindi piano (a, b, c) = piano (d, e, f).

Definizione. « Quattro punti diconsi complanari (per abbreviazione Cmp.) se giacciono in un medesimo piano ».

Risulta dalle cose dette che la condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro punti siano complanari è o che tre di essi siano collineari, ovvero che uno di essi sia interno al triangolo determinato

dagli altri tre, ovvero che i segmenti di una delle coppie che si ottengono unendo a due a due i punti dati si incontrino:

$$a, b, c, d \varepsilon \mathrm{p} . \supset : a, b, c, d \varepsilon \mathrm{Cmp} . = . a, b, c \varepsilon \mathrm{Coll} . \cup . a, b, d \varepsilon \mathrm{Coll} . \cup . a, c, d \varepsilon \mathrm{Coll} . \cup . b, c, d \varepsilon \mathrm{Coll} . \cup . a \varepsilon bcd . \cup . b \varepsilon acd . \cup . c \varepsilon abd . \cup . d \varepsilon abc . \cup . ab \frown cd - = \Lambda . \cup . ac \frown bd - = \Lambda . \cup . ad \frown bc - = \Lambda . \qquad \text{(Geom. § 11 P28)}$$

Teorema. « Se la retta r ha comune col piano p due punti a e b distinti, l'intera retta r giace nel piano p » (Geom. § 11 P29).

Infatti, se c è un punto del piano p non collineare con a e b, il piano p coincide col piano determinato dai tre punti a, b, c. Ma il piano a, b, c, per definizione, contiene la retta ab, cioè la retta r; dunque la retta r giace nel piano p.

Data una retta r, ed un punto a fuori di essa, si ha a considerare la figura $a'r$ che dicesi un semipiano; e la figura $r'ra$ che è pure un semipiano. Porremo

$$\mathrm{Sp}\,(r, a) = r'ra$$
$$\mathrm{Co\,Sp}\,(r, a) = a'r .$$

Si ha

$$r \varepsilon \mathrm{p}_2 . a \varepsilon \mathrm{p} . a - \varepsilon r . b \varepsilon \mathrm{Sp}(r,a) . \supset . \mathrm{Sp}(r,a) = \mathrm{Sp}(r,b) \qquad \text{(Geom. § 11 P35)}$$
$$\text{» » » » } . \supset . \mathrm{CoSp}(r,a) = \mathrm{CoSp}(r,b) \qquad \text{» P33)}$$
$$\text{» » » } . b \varepsilon \mathrm{CoSp}(r,a) . \supset . \mathrm{Sp}(r,b) = \mathrm{CoSp}(r,a) \qquad \text{» P34)}$$
$$\text{» » » } . \supset . \mathrm{piano}(r,a) = r \cup \mathrm{Sp}(r,a) \cup \mathrm{CoSp}(r,a) .$$

Geometria solida.

Post. XV. « Dato un piano h, si può segnare un punto a fuori di esso ».

Scriveremo p_3 invece del termine *piano*; sicchè

$$h \varepsilon \mathrm{p}_3 . \supset : a \varepsilon \mathrm{p} . a - \varepsilon h . - =_a \Lambda .$$

Dati i punti non complanari a, b, c, d, ha significato la scrittura $a(bcd)$, che indicheremo più brevemente con $abcd$, e che è il tetraedro luogo dei segmenti che vanno da a ai varii punti del triangolo bcd.

Teorema I. « Se a, b, c, d sono punti non complanari, i tetraedri $abcd$ e $bacd$ coincidono ».

$$a, b, c, d \varepsilon \mathrm{p} - \mathrm{Compl} . \supset . abcd = bacd .$$

Infatti, per definizione di $abcd$ si ha:

(1) $x \varepsilon abcd . = : y \varepsilon bcd . x \varepsilon ay . - =_y \Lambda$

cioè, dire che x è un punto del tetraedro, equivale a dire che si può prendere un punto y della base bcd tale che x sia un punto del segmento ay. Ma per definizione del triangolo bcd si ha

$$y \varepsilon bcd . = : z \varepsilon cd . y \varepsilon bz . - =_z \Lambda .$$

Sostituendo si ha:

(2) $$x \varepsilon abcd . = .\therefore z \varepsilon cd . y \varepsilon bz . - =_z \Lambda : x \varepsilon ay : - =_y \Lambda$$

cioè, dire che x è un punto del tetraedro, equivale dire che si può determinare y in guisa che si può determinare un punto z del segmento cd tale che y stia fra b e z, e che y sia tale che x stia fra a ed y. Il secondo membro di quest'eguaglianza si trasforma, servendoci dell'identità 5 del § 18 dell'*Introduction*, in

$$x \varepsilon abcd . = : z \varepsilon cd . y \varepsilon bz . x \varepsilon ay . - =_{y, z} \Lambda$$

cioè, se x è un punto del tetraedro, si possono determinare i due punti y e z in guisa che z appartenga a cd, y a bz, e x ad ay. Questa proposizione, colla stessa identità logica si trasforma in

(3) $$x \varepsilon abcd . = .\therefore z \varepsilon cd : y \varepsilon bz . x \varepsilon ay . - =_y \Lambda : - =_z \Lambda$$

cioè, dire che x è un punto del tetraedro, equivale a dire che si può determinare un punto z di cd in guisa che si possa determinare un punto y del segmento bz tale che x giaccia fra a ed y. Ma si ha, per la definizione del triangolo

$$y \varepsilon bz . x \varepsilon ay . - =_y \Lambda : = . x \varepsilon abz ;$$

perciò l'ultima eguaglianza si trasforma in

(4) $$x \varepsilon abcd . = : z \varepsilon cd . x \varepsilon abz . - =_z \Lambda$$

la quale si è ottenuta dalla prima, cioè dalla definizione, con pure trasformazioni logiche. Ora, poichè a, b, z non sono collineari, dal postulato XIII si è dedotto $abz = baz$; onde

(5) $$x \varepsilon abcd . = : z \varepsilon cd . x \varepsilon baz . - =_z \Lambda .$$

Se nella (4) scambiamo a con b si ha:

(6) $$x \varepsilon bacd . = : z \varepsilon cd . x \varepsilon baz . - =_z \Lambda .$$

I secondi membri della (5) e (6) essendo uguali, deduciamo

(7) $$x \varepsilon abcd . = . x \varepsilon bacd ,$$

donde, operando con $\overline{x \varepsilon}$ sui due membri, si ha la formula a dimostrarsi.

Il lettore può dimostrare facilmente le proposizioni che seguono:

II. « Se e è un punto interno al tetraedro $abcd$, questo tetraedro viene scomposto nel punto e, nei quattro segmenti che vanno da e ai vertici

del tetraedro, nei sei triangoli *eab*, ... formati da *e* cogli spigoli del tetraedro, e nei quattro tetraedri di vertice *e* e di base le faccie del tetraedro dato ».

III. « Il prolungamento d'un segmento contenuto in un tetraedro incontra sempre la sua superficie ».

IV. $a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Comp} \,.\, e \,\varepsilon\, bcd \,.\, f \,\varepsilon\, ad \,.\, \supset .\, ae \frown bcf \,-\!= \Lambda$.

Dimostreremo ancora il seguente

TEOREMA V. « Se in un piano *q* sono contenute due rette *ab* e *cd*, e se *e* è un punto fuori del piano *q*, i piani *eab* e *ecd* hanno comune una retta »:

$$q \,\varepsilon\, \mathrm{p}_3 \,.\, a, b, c, d \,\varepsilon\, q \,.\, a -\!= b \,.\, c -\!= d \,.\, e \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, e -\!\varepsilon\, q \,.\, \supset : r \,\varepsilon\, \mathrm{p}_2 \,.\, r \supset \mathrm{piano}\,(e, a, b) \,.\, r \supset \mathrm{piano}\,(e, c, d) \,.\, -\!=_r \Lambda \,.$$ (Geom. pag. 38)

Infatti, poichè i punti *a*, *b*, *c*, *d* sono complanari, o tre di essi sono collineari, o uno di essi è interno al triangolo determinato dagli altri tre, o si incontrano i segmenti *ab* e *cd*, ovvero *ac* e *bd*, ovvero *ad* e *bc*. (Geom. § 11 P28)

Se *a*, *b*, *c* sono collineari, allora la retta *ec* giace nei due piani dati.

Se *a* è interno al triangolo *bcd*, ciò vuol dire che il raggio $a'b$ e il segmento *cd* si incontrano in un punto *f*, e la retta *ef* giace nei due piani dati.

Se i segmenti *ab* e *cd* si incontrano in un punto *f*, la retta *ef* giace nei due piani.

In tutti questi casi semplicissimi è così dimostrato il teorema, ed è anzi determinata la retta cercata mediante il suo punto d'incontro col piano *q*. Rimangono a considerarsi gli ultimi due casi, in cui o *ac* incontra *bd*, o *ad* incontra *bc*; i quali si riducono l'uno all'altro collo scambio delle lettere *c* e *d*. Se le rette *ab* e *cd*, che giacciono in uno stesso piano, si incontrassero, la dimostrazione si può dare come le precedenti; ma in quanto segue non faremo alcuna ipotesi sull'incontrarsi o meno delle rette indefinite. Si badi incidentalmente che non abbiamo ancora parlato delle parallele condotte da un punto ad una retta, e non sappiamo se ne esista una o più.

Supponiamo adunque che i punti *a*, *b*, *c*, *d* siano tali che esista un punto *h* comune ai segmenti *ad* e *bc*, cioè $h \,\varepsilon\, ad \,.\, h \,\varepsilon\, bc$.

Si prenda sul prolungamento di *ae* un punto *m*, sicchè sia $m \,\varepsilon\, a'e$, cosa possibile pel postulato VII.

Poichè i punti *m*, *a*, *d* non sono collineari, *e* è un punto di *ma*, ed *h* un punto di *ad*, ne risulta, pel postulato XIV, che esiste un punto *n* appartenente ai segmenti *ed* ed *mh*.

Poichè i punti *m*, *b*, *c* non sono collineari, ed *h* è un punto di *bc*, ed *n* un punto di *mh*, esisterà (postulato XIII) un punto *f* giacente

su mb, e tale che n giaccia su cf. Dico che la retta ef è la retta cercata.

Infatti, poichè $e \varepsilon ma$, si ha piano (e, a, b) = piano (m, a, b). Ma f è un punto di mb; dunque f appartiene al piano (e, a, b).

E poichè n è un punto di ed, ed f un punto di $c'n$, sarà f un punto del piano (c, e, d).

Dunque il punto f giace nei due piani eab ed ecd, e la rettta ef giacerà pure nei medesimi.

Se le rette ab e cd si incontrano effettivamente in un punto x, questo sarà un punto della retta ef; e così si ritrova il teorema di Desargues sui triangoli omologici, che si può enunciare:

Se fra i dieci punti e, a, b, c, d, h, m, n, x, di cui i primi quattro non sono complanari, passano nove fra le relazioni:
$h \varepsilon ad \,.\, h \varepsilon bc \,.\, e \varepsilon am \,.\, n \varepsilon ed \,.\, n \varepsilon mh \,.\, f \varepsilon mb \,.\, n \varepsilon cf \,.\, a \varepsilon xb \,.\, c \varepsilon xd \,.\, e \varepsilon xf$, passerà pure la rimanente.

Di questi dieci punti uno comparisce nelle dieci relazioni, tre volte come interno; due punti compaiono ciascuno due volte come interni, ed una come estremi del segmento; tre punti compaiono ciascuno una volta come interni, e due come estremi; quattro punti compaiono sempre come estremi.

Dicesi che tre rette, non giacenti tutte in uno stesso piano, appargono ad una stessa stella, se a due a due sono complanari. Se due di esse si incontrano, allora anche la terza passa pel loro punto d'intersezione. La costruzione precedente permette di condurre la retta passante pel punto e, e appartenente alla stella determinata dalle due rette ab e cd.

Si dimostra il teorema dei triangoli omologici anche per punti di un piano; la costruzione precedente risolve il problema di unire il punto e col punto inaccessibile d'incontro di due rette date, e la figura è tutta contenuta nel foglio del disegno, se questo è rettangolare o almeno convesso.

Il teorema dei triangoli omologici, nel piano, è però conseguenza del postulato XV, e quindi è un teorema di Geometria solida. Che esso non sia conseguenza dei postutati precedenti, risulta da ciò che se per p intendiamo i punti di una superficie, e con $c \varepsilon ab$ intendiamo di dire che il punto c sta sull'arco di geodetica che unisce i punti a e b, allora sono verificati tutti i postulati dall'I al XIV, e non sussiste sempre la proposizione sui triangoli omologici. Questa proposizione continua però a valere per le superficie a curvatura costante.

Arrivati al teorema di Desargues, si può continuare senz'altro lo studio della Geometria di posizione, i cui principii sono così analizzati. Ora si possono introdurre, mediante definizioni, i punti impropri o ideali, ecc. seguendo per es. il Pasch, nella sua opera citata.

Si è dimostrato il teorema V, il quale afferma che i piani che congiungono due rette giacenti in uno stesso piano con un punto fuori di questo piano, si incontrano secondo una retta. Per affermare che due piani qualunque, aventi un punto comune, hanno di comune una retta, occorre un nuovo postulato:

Postulato XVI. « Dato un piano p, ed un punto a fuori di esso, e preso un punto b sul prolungamento d'uno dei segmenti che vanno da a a qualche punto di p, allora comunque si prenda il punto x dello spazio, o esso giace nel piano p, o il segmento ax incontra il piano p, o il segmento bx incontra il piano p »:

$$p \varepsilon \mathrm{p}_3 . a \varepsilon \mathrm{p} . a - \varepsilon p . b \varepsilon a'p . x \varepsilon \mathrm{p} . \supset . x \varepsilon p . \cup . ax \cap p - = \Lambda . \cup . bx \cap p - = \Lambda .$$

Solo dopo questo postulato si può parlare delle due *bande* del piano.

La scrittura $a'p$ rappresenta il semispazio limitato del piano p, dalla parte opposta del punto a.

E arrivati al semispazio, è facile lo scorgere che cosa si intenda colla parola *spazio*. « Lo spazio è il luogo dei punti, o l'insieme di tutti i punti, o la classe dei punti ». Questa frase si traduce in simboli con « spazio = punto », benchè nella lingua nostra i due termini, spazio e punto, soddisfino a regole grammaticali distinte, come i termini « uomo e umanità », « soldato ed esercito », ecc.; in questi esempi, ed in analoghi, c'è nella lingua nostra una doppia nomenclatura; un termine (punto, soldato, ecc.) è usato specialmente come attributo; l'altro termine (spazio, esercito,...) come soggetto.

In alcune ricerche successive occorre il postulato detto della *continuità* della retta. Si può enunciare sotto la forma:

Post. XVII. « Data una figura convessa h, un punto a appartenente ad essa, ed un punto b fuori di essa, si può determinare un punto x interno al segmento ab, o coincidente con uno dei suoi estremi a, b, tale che il segmento ax appartenga alla figura h, e il segmento xb sia tutto fuori di h »:

$$h \varepsilon \mathrm{Conv} . a, b \varepsilon \mathrm{p} . a \varepsilon h . b - \varepsilon h . \supset : x \varepsilon ab \cup \iota a \cup \iota b . ax \supset h . bx \supset - h . - =_x \Lambda .$$

Esso si può pure enunciare sotto la forma

$$a , b \varepsilon \mathrm{p} . k \varepsilon \mathrm{Kp} . k - = \Lambda . k \supset ab . \supset .\cdot. x \varepsilon ab \cup \iota b . k \cap xb = \Lambda : y \varepsilon ax . \supset_y . k \cap yb - = \Lambda : - =_x \Lambda .$$

« Dati due punti a e b, e una classe k di punti, classe effettivamente esistente, e contenuta nel segmento ab, allora si può determinare un punto x appartenente al segmento ab, o coincidente con b, tale che nessun punto della classe k appartenga al segmento xb, ma tale che comunque si prenda il punto y fra a ed x, sempre esistono punti della classe k compresi fra y e b ».

Per ricavare la seconda forma dalla prima, basta porre $h = ak \cup \iota a$, cioè chiamisi h la figura che si ottiene proiettando da a i varii punti di k, cui si aggiunga il punto a. Sarà h una figura convessa, contenente il punto a, e non contenente b; quindi, applicando il postulato XVII, si deduce la prop. a dimostrarsi.

E prima di abbandonare questo soggetto, sarà ancora utile un'osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinchè questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche. La Geometria di posizione, o proiettiva, poi, è una parte della Geometria generale; quindi i suoi postulati si debbono trovare fra quelli assunti per la Geometria generale.

In conseguenza, sotto il punto di vista pratico, non parmi lecito l'assumere ad es. come postulato su cui fondare la Geometria proiettiva il seguente:

« Due rette giacenti in uno stesso piano hanno sempre un punto comune », poichè questa proposizione non si verifica coll'osservazione, ed è anzi in contraddizione coi teoremi di Euclide.

La Geometria proiettiva parte dai postulati della Geometria elementare, e, con opportune *definizioni*, introduce nuovi enti, detti punti ideali (sia nella Geometria Euclidea, che nella non Euclidea), e ne risulta così che i nuovi enti ottenuti soddisfano alle proposizioni precedenti.

Sulle figure congruenti.

Analizzati così i principii di quella parte della geometria che è la Geometria di posizione, il nostra lavoro non sarebbe completo se non dicessimo qualche parola dei fondamenti della Geometria metrica, in cui comparisce il concetto di figure *eguali*, o *sovrapponibili*, o, come diremo abitualmente, *congruenti*, e quindi il concetto della sovrapposizione, o trasporto, o moto d'una figura.

Noi vediamo, nel mondo fisico, dei corpi rigidi a muoversi col variare del tempo. Possiamo studiare la successione delle infinite posizioni che assume il corpo; ovvero possiamo limitarci ad esaminare i rapporti fra due posizioni della figura, la prima e l'ultima, senza occuparci delle posizioni intermedie assunte dal corpo nel passare dall'una all'altra. Questo solo studio particolare è fatto da Euclide, e si può considerare come studio geometrico. Il primo studio, più generale e molto più complicato, fa parte della Cinematica, e si può escludere dalla

Geometria. Quindi mi pare conveniente di escludere da un libro di geometria elementare le seguenti proposizioni e simili:

« Un punto movendosi descrive una linea ».

« Un punto che percorra la retta, non può passare dall'una banda all'opposta di un punto fisso m di questa retta senza coincidere una volta con esso ».

Mettendoci adunque dal primo punto di vista, se m è un moto, ed a è un punto dello spazio, risulta determinato un nuovo punto, che indicheremo con ma, e che si chiama « la nuova posizione che ha il punto a dopo il moto m ». Quindi il moto è una trasformazione di punti in punti; in simboli: moto $\supset$ p f p.

Invece di parlare del moto, si può parlare, come è chiaro, di figure eguali; il moto m è allora la corrispondenza per cui, dato un punto a della prima figura, risulta determinato l'omologo ma della seconda.

L'analisi del concetto di moto, e la determinazione dei postulati fondamentali, si può fare seguendo la solita via. Si scrivano tutte le proprietà che risultano dall'osservazione del moto fisico. Si scindano queste proposizioni in tante affermazioni semplici; e poi si esamini quali di queste affermazioni sono già implicitamente contenute nelle rimanenti. Procedendo avanti in qnesto esame, finchè sarà possibile, troveremo un gruppo di proposizioni esprimenti verità irreduttibili fra loro, e che costituiscono i postulati del moto.

Il Pasch, a pag. 101 della sua *neuere Geometrie,* più volte menzionata, stabilisce dieci postulati sul moto. Indichiamo col segno $\backsimeq$ la congruenza delle due figure fra cui sta quel segno; con (a, b), (a, b, c) ecc. la figura composta dei punti a e b, a, b e c, ... I postulati del Pasch sono:

1. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\supset.\, (a, b) \backsimeq (b, a)$

cioè un segmento ab si può trasportare in modo che a coincida con b, e b con a. Questo postulato dice che ogni segmento si può rovesciare.

2. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{p} - \mathrm{Coll} \,.\supset:\, b_1 \,\varepsilon\, \mathrm{Sr}(a, b) \,.\, (a, b_1) \backsimeq (a, c) \,.-=_{b_1} \Lambda$.

Dati tre punti a, b, c non collineari, si può portare il raggio ac su ab; ed il punto c verrà ad assumere una posizione b_1 su ab, tale che ab_1 sia congruente ad ac.

3. $a, b, c, a_1, b_1, c_1 \,\varepsilon\, \mathrm{p} \,.\, (a, b, c) \backsimeq (a_1, b_1, c_1) \,.\, c \,\varepsilon\, ab \,.\supset.\, c_1 \,\varepsilon\, a_1b_1$.

Date due terne di punti a, b, c, e a_1, b_1, c_1, se le figure (a, b, c) e (a_1, b_1, c_1) sono congruenti, e se c giace nel segmento fra a e b, anche c_1 giace fra a_1 e b_1.

4. Se il punto c_1 giace fra a e b, e si prolunga il segmento ac_1

del segmento $c_1 c_2$ congruente ad ac_1, e questo d'un nuovo segmento $c_2 c_3$ eguale ai precedenti, e così via, si arriverà sempre ad un segmento $c_n\, c_{n+1}$ che conterrà il punto b.

5. Se nella figura abc i segmenti ac e bc sono congruenti, anche le figure abc e bac sono congruenti: $a,b,c\ \varepsilon\ \mathrm{p}.ac \backsimeq bc . \supset . (a,b,c) \backsimeq (b,a,c)$. In conseguenza l'angolo abc si può rovesciare.

6. Se due figure sono congruenti, anche le parti omologhe sono congruenti.

7. Due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.

8. Date due figure congruenti α e β, e preso un punto x, si può determinare un punto y in guisa che la figura che si ottiene unendo alla figura α il punto x sia congruente colla figura ottenuta aggiungendo alla β il punto y.

9. Dato un triangolo fgh, ed un segmento ab congruente ad fg, ed un semipiano limitato dalla retta ab, si può in questo semipiano determinare uno ed un sol punto c, tale che il triangolo abc sia congruente ad fgh.

10. Se a, b, c, d sono punti non complanari, ed e è un punto diverso da d, le figure $abcd$ ed $abce$ non sono congruenti.

Accenneremo qui ad una nuova via per trattare del moto, considerandolo come una speciale affinità.

Affinità.

Dicesi affinità (abbreviato in Aff), ogni corrispondenza m fra punto e punto dello spazio, tale che se il punto c giace fra a e b, anche fra i loro corrispondenti mc, ma ed mb passi la stessa relazione.

1. $\mathrm{Aff} = (\mathrm{p\,f\,p}) \frown \overline{m\ \varepsilon}\, [a\,,b\ \varepsilon\ \mathrm{p}\,.\,c\ \varepsilon\ ab\,.\supset_{a.b,c}.\, mc\ \varepsilon\ (ma)\,(mb)]\,.$

Ne risulta

2. $m\ \varepsilon\ \mathrm{Aff}\,.\,a\,,b\ \varepsilon\ \mathrm{p}\,.\,a -= b\,.\supset.\,ma -= mb\,.$

« Se m è un'affinità, a due punti distinti a e b corrispondono due punti ma ed mb pure distinti ». Invero se a e b sono distinti, si potrà determinare un punto c compreso fra essi (post. IV); quindi per def. dell' Aff, anche mc sarà compreso fra ma ed mb, e quindi (post. III) ma ed mb sono distinti.

3. $m\ \varepsilon\ \mathrm{Aff}\,.\,a\,,b\ \varepsilon\ \mathrm{p}\,.\,c\ \varepsilon\ a'b\,.\supset.\,mc\ \varepsilon\ (ma)'\,(mb)\,.$

« Se il punto c sta sul prolungamento di ab, anche mc sta sul prolungamento di (ma) (mb) ». Questa proposizione si ottiene dalla definizione dell'affinità, scambiando b con c.

A tre punti collineari corrisondono, nell'affinità, punti collineari; a punti complanari, punti complanari.

4. $m \varepsilon \mathrm{Aff} . a, b, c \varepsilon \mathrm{p\,Coll} . \supset . ma, mb, mc \varepsilon \mathrm{Coll}$.

5. » $. a, b, c \varepsilon \mathrm{p} . d \varepsilon abc . \supset . md \varepsilon (ma)(mb)(mc)$.

6. » $. a, b, c\, d \varepsilon \mathrm{p} . e \varepsilon abcd . \supset . me \varepsilon (ma)(mb)(mc)(md)$.

7. $m, n \varepsilon \mathrm{Aff} . \supset . mn \varepsilon \mathrm{Aff}$.

Cioè se m, n sono due affinità, anche il loro prodotto è un'affinità, vale a dire se di una figura si fa la figura affine coll'affinità n, e di questa si fa la figura affine coll'affinità m, allora la terza figura è pure affine alla prima.

Fra le corrispondenze è pure a considerarsi l'*identità*, per cui ad ogni ente si fa corrispondere sè stesso. Indichiamola con ω, cioè poniamo, qualunque sia a,

$$\omega a = a .$$

Si avrà che l'identità è pure un'affinità, ossia

8. $\omega \varepsilon \mathrm{Aff}$.

Se m è un'affinità, ogni punto del segmento ab ha per corrispondente un punto del segmento $(ma)(mb)$; ed inoltre (prop. 2), a punti distinti corrispondono punti distinti; quindi la figura corrispondente al segmento ab è contenuta nel segmento $(ma)(mb)$; possiamo noi affermare che essa sia il segmento $(ma)(mb)$? Ecco una questione di cui non conosco la soluzione.

Postulati del moto.

Scriveremo μ invece della parola *moto*; e porremo i postulati seguenti:

Post. 1. $\mu \supset \mathrm{Aff}$.

« Ogni moto è un'affinità ». Ciò equivale a dire che:

(1) $m \varepsilon \mu . a, b \varepsilon \mathrm{p} . c \varepsilon ab . \supset . mc \varepsilon (ma)(mb)$, Esso è il post. 3 del Pasch.

Quindi pel moto sussistono tutte le proprietà dell'affinità gia viste.

Post. 2. $\omega \varepsilon \mu$.

« L'identità è un moto », cioè a dire ogni figura è congruente a sè stessa. È l'assioma (o cognizione comune) VII di Euclide, libro I.

Post. 3. $m \varepsilon \mu . \supset . \overline{m} \varepsilon \mu$.

« Se m è un moto, anche la trasformazione inversa, $\overline{m}$, è pure un

moto », cioè se la figura A si può portare a coincidere colla B, anche la B si può portare a coincidere colla A; ossia se la figura A è congruente colla B, anche la B è congruente colla A.

Dalla proprietà (1) si deduce, esportando le due prime parti dell'ipotesi:

$$m \varepsilon \mu \,.\, a, b \varepsilon \mathrm{p} \,.\, \mathrm{O} \,.\, m(ab) \mathrm{O} (ma)(mb) \qquad (\alpha)$$

cioè il segmento ab, dopo il trasporto è contenuto nel segmento determinato dai punti ma ed mb. Se in questa, al posto di m leggo $\overline{m}$, ed al posto di a e b leggo ma ed mb, si ha:

$$\overline{m} \varepsilon \mu \,.\, ma, mb \varepsilon \mathrm{p} \,.\, \mathrm{O} \,.\, \overline{m}\big((ma)(mb)\big) \mathrm{O} (\overline{m}\, ma)(\overline{m}\, mb)$$

ossia osservando che dall'ipotesi $m \varepsilon \mu \,.\, a, b \varepsilon \mathrm{p}$, si deduce $\overline{m} \varepsilon \mu \,.\, ma$, $mb \varepsilon \mathrm{p}$, e che $\overline{m}\, ma = a$, $\overline{m}\, mb = b$, si ha:

$$m \varepsilon \mu \,.\, a, b \varepsilon \mathrm{p} \,.\, \mathrm{O} \,.\, (ma)(mb) \mathrm{O}\, m(ab). \qquad (\beta)$$

Dalle proposizioni α e β si ricava:

(2) $$m \varepsilon \mu \,.\, a, b \varepsilon \mathrm{p} \,.\, \mathrm{O} \,.\, m(ab) = (ma)(mb),$$

cioè il segmento ab, dopo il trasporto, coincide col segmento limitato dalle nuove posizioni di a e di b.

In conseguenza ogni figura ottenuta da più punti congiungendoli con segmenti, o prolungando questi segmenti, si trasforma, nel moto, nella figura analoga costituita colle nuove posizioni dei punti. Quindi, se m è un moto, $a, b, c, d \varepsilon \mathrm{p}$, si ha:

$$m(a'b) = (ma)'\, mb$$
$$m\, \mathrm{Sr}(a, b) = \mathrm{Sr}(ma, mb)$$
$$m\, \mathrm{retta}(a, b) = \mathrm{retta}(ma, mb)$$
$$m\, \mathrm{Co\, Sr}(a, b) = \mathrm{Co}\, m\, \mathrm{Sr}(a, b) = \mathrm{Co\, Sr}(ma, mb)$$
$$m(abc) = (ma)(mb)(mc)$$
$$m(abcd) = (ma)(mb)(mc)(md)$$
$$m\, \mathrm{piano}(a, b, c) = \mathrm{piano}(ma, mb, mc)$$
$$m\, \mathrm{Sp}(ab, c) = \mathrm{Sp}(ma, mb, mc)$$
$$m\, \mathrm{Co\, Sp}(ab, c) = \mathrm{Co}\, m\, \mathrm{Sp}(ab, c),$$

ecc.

Post. IV. $m, n \varepsilon \mu \,.\, \mathrm{O} \,.\, mn \varepsilon \mu$.

« Se m ed n sono moti, anche la loro successione è un moto », cioè se la figura A può portarsi a coincidere colla B, e la B può portarsi a coincidere colla C, anche la A può portarsi a coincidere colla C; in altri termini due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.

Il postulato II è conseguenza dei postulati III, IV e dell'esistenza d'un moto. Invero, se m è un moto, anche $\overline{m}$ è un moto, quindi anche $m\,\overline{m} = \omega$ è un moto.

Le proposizioni precedenti dicono che i moti costituiscono un gruppo delle trasformazioni dette affinità, gruppo che contiene l'identità, l'inverso d'ogni moto, e il prodotto, o successione di due moti.

Rimane a distinguere il gruppo dei moti delle altre affinità.

Perciò enuncieremo come postulati le seguenti cognizioni comuni.

Post. V. Dati due punti a, a_1, si può portare a in a_1:

$$a\,,a_1\,\varepsilon\,\mathrm{p}\,.\,\mathrm{Ɔ}:m\,\varepsilon\,\mu\,.\,ma=a_1\,.-=_m\Lambda\,.$$

Post. VI. Dati tre punti a, b, b_1 si può, tenendo fisso il punto a, far coincidere il raggio ab col raggio ab_1:

$$a,b,b_1\,\varepsilon\,\mathrm{p}\,.\,a-=b\,.\,a-=b_1\,.\,\mathrm{Ɔ}:m\,\varepsilon\,\mu\,.\,ma=a\,.\,m\mathrm{Sr}(a,b)=\mathrm{Sr}(a,b_1)\,.-=_m\Lambda\,.$$

Post. VII. Dati i due punti distinti a e b, e i punti c e c_1 fuori della retta ab, si può, tenendo fisso il punto a e il raggio (a,b), far coincidere il semipiano $(ab\,,c)$ con $(ab\,,c_1)$:

$$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{p}\,.\,a-=b\,.\,c\,,c_1\,\varepsilon\,\mathrm{p}-\mathrm{retta}\,(a\,,b)\,.\,\mathrm{Ɔ}:m\,\varepsilon\,\mu\,.\,ma=a\,.\,m\,\mathrm{Sr}(a,b) = \mathrm{Sr}\,(a\,,b)\,.\,m\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)=\mathrm{Sp}\,(ab\,,c_1)-=_m\Lambda\,.$$

I postulati V, VI e VII si possono riunire in questa sola proposizione:

Teorema. Dati i punti a, b, c non collineari, ed i punti a_1, b_1, c_1 non collineari, si può sempre determinare un moto, che trasformi a in a_1, il raggio $(a\,,b)$ in raggio $(a_1\,,b_1)$, e il semipiano $(ab\,,c)$ in semipiano $(a_1b_1\,,c_1)$.

$$a\,,b\,,c\,\varepsilon\,\mathrm{p}-\mathrm{Coll}\,.\,a_1\,,b_1\,,c_1\,\varepsilon\,\mathrm{p}-\mathrm{Coll}\,.\,\mathrm{Ɔ}:m\,\varepsilon\,\mu\,.\,ma=a_1\,.\,m\,\mathrm{Sr}\,(a,b) = \mathrm{Sr}\,(a_1\,,b_1)\,.\,m\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)=\mathrm{Sp}\,(a_1b_1\,,c_1)\,.-=_m\Lambda\,.$$

Ora dovremo dire che questo moto è determinato:

Post. VIII. $a\,,b\,,c\,\varepsilon\,\mathrm{p}-\mathrm{Coll}\,.\,m\,,n\,\varepsilon\,\mu\,.\,ma=na\,.\,m\,\mathrm{Sr}\,(a\,,b)=n\,\mathrm{Sr}\,(a\,,b)\,.\,m\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)=n\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)\,.\,\mathrm{Ɔ}\,.\,m=n\,.$

Indicheremo con $\begin{pmatrix} a_1 & \mathrm{Sr}\,(a_1\,,b_1) & \mathrm{Sp}\,(a_1b_1\,,c_1) \\ a & \mathrm{Sr}\,(a\,,b) & \mathrm{Sp}\,(ab\,,c) \end{pmatrix}$ quel moto che trasforma a in a_1, la $\mathrm{Sr}\,(a\,,b)$ in $\mathrm{Sr}\,(a_1\,,b_1)$, e il $\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)$ in $\mathrm{Sp}\,(a_1b_1\,,c_1)$; cioè porremo

Def. $a\,,b\,,c\,\varepsilon\,\mathrm{p}-\mathrm{Coll}\,.\,a_1,b_1,c_1\,\varepsilon\,\mathrm{p}-\mathrm{Coll}\,.\,\mathrm{Ɔ}\,.\begin{pmatrix} a_1 & \mathrm{Sr}\,(a_1,b_1) & \mathrm{Sp}\,(a_1b_1,c_1) \\ a & \mathrm{Sr}\,(a,b) & \mathrm{Sp}\,(ab,c) \end{pmatrix} = \mu \frown \overline{m\,\varepsilon}\,[ma=a_1\,.\,m\,\mathrm{Sr}\,(a\,,b)=\mathrm{Sr}\,(a_1\,,b_1)\,.\,m\,\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)=\mathrm{Sp}\,(a_1b_1\,,c_1)]\,.$

I postulati V-VIII si possono condensare in questa unica proposizione:

$$a,b,c\,\varepsilon\,\mathrm{p}-\mathrm{Coll}\,.\,a_1\,,b_1\,,c_1\,\varepsilon\,\mathrm{p}-\mathrm{Coll}\,.\,\mathrm{Ɔ}\,.\begin{pmatrix} a_1 & \mathrm{Sr}(a_1,b_1) & \mathrm{Sp}(a_1b_1,c_1) \\ a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \end{pmatrix}\varepsilon\,\mu\,.$$

Simmetria assiale.

Siano a, b, c tre punti non collineari.

L'identità ω sarà rappresentata da

$$(1) \qquad \omega = \begin{pmatrix} a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \\ a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \end{pmatrix}.$$

Noi considereremo tre moti assai importanti, che chiameremo α, β, γ, e sono:

$$(2) \qquad \alpha = \begin{pmatrix} a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Co\,Sp}(ab,c) \\ a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \end{pmatrix} = \left(a, \mathrm{Sr}(a,b), \frac{\mathrm{Co\,Sp}(ab,c)}{\mathrm{Sp}(ab,c)} \right)$$

$$(3) \qquad \beta = \begin{pmatrix} a & \mathrm{Co\,Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \\ a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \end{pmatrix} = \left(a, \frac{\mathrm{Co\,Sr}(a,b)}{\mathrm{Sr}(a,b)}, \mathrm{Sp}(ab,c) \right)$$

$$(4) \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & \mathrm{CoSr}(a,b) & \mathrm{CoSp}(ab,c) \\ a & \mathrm{Sr}(a,b) & \mathrm{Sp}(ab,c) \end{pmatrix} = \left(a, \frac{\mathrm{CoSr}(a,b)}{\mathrm{Sr}(a,b)}, \frac{\mathrm{CoSp}(ab,c)}{\mathrm{Sp}(ab,c)} \right).$$

Gli ultimi membri di queste eguaglianze sono modi abbreviati per indicare un moto, quando alcuni elementi rimangono fissi. Si ha immediatamente

$$(5) \qquad \alpha^2 = \omega. \qquad \beta^2 = \omega. \qquad \gamma^2 = \omega.$$

$$(6) \qquad \alpha\beta = \beta\alpha = \gamma. \qquad \alpha\gamma = \gamma\alpha = \beta. \qquad \beta\gamma = \gamma\beta = \alpha.$$

cioè ciascuno dei moti α, β, γ ripetuto due volte, produce l'identità; e la successione di due di essi produce il terzo.

Infatti si ha, per definizione di α, $\alpha a = a$, onde $\alpha^2 a = \alpha a = a$.

Dalla definizione si ha pure $\alpha \mathrm{Sr}(a,b) = \mathrm{Sr}(a,b)$, onde $\alpha^2 \mathrm{Sr}(a,b) = \mathrm{Sr}(a,b)$.

Dalla definizione si ha $\alpha \mathrm{Sp}(ab,c) = \mathrm{Co\,Sp}(ab,c)$; onde $\alpha^2 \mathrm{Sp}(ab,c) = \alpha \mathrm{Co\,Sp}(ab,c) = \mathrm{Co}\,\alpha\,\mathrm{Sp}(ab,c) = \mathrm{Co\,Co\,Sp}(ab,c) = \mathrm{Sp}(ab,c)$.

Pertanto il moto α^2 lascia inalterati a, $\mathrm{Sr}(a,b)$, $\mathrm{Sp}(ab,c)$, perciò esso è l'identità ω.

Analogamente si provano le altre eguaglianze.

Teorema. « Il moto α lascia fisso ogni punto b della retta ab ».

$$(7) \qquad \alpha b = b.$$

Infatti, poichè $b \varepsilon \mathrm{Sr}(a,b)$, la quale semiretta non si altera col moto α, anche αb apparterrà a $\mathrm{Sr}(a,b)$. Ora $\mathrm{Sr}(a,b) = ab \cup \iota b \cup a'b$, vale a dire il punto αb o giacerà nel segmento ab, o coincide col suo estremo b, o giace nel suo prolungamento $a'b$.

Se αb giace nel segmento ab, $\alpha^2 b$ giacerà nel segmento $a(\alpha b)$, e

quindi a maggior ragione (post. VIII della Geom.) giacerà nel segmento ab; ma $\alpha^2 b$ coincide con b; ed il punto b non appartiene al segmento ab; dunque è assurdo che αb giaccia in ab.

Scambiando in questo ragionamento b con αb, si prova che è assurdo il dire che αb giaccia sul prolungamento di ab.

Dunque αb coincide con b.

Definizione. Dicesi che il raggio ab è perpendicolare al raggio ac, e scriveremo $\mathrm{Sr}(a, b) \perp \mathrm{Sr}(a, c)$, se tenendo fisso il punto a e il raggio ab, e scambiando il semipiano (ab, c) nel suo complemento, il raggio (a, c) si trasforma nel suo complemento:

$$(8)\qquad \mathrm{Sr}(a,b) \perp \mathrm{Sr}(a,c) .=. \left(a, \mathrm{Sr}(a,b), \frac{\mathrm{CoSp}(ab,c)}{\mathrm{Sp}(ab,c)}\right)\mathrm{Sr}(a,c)=\mathrm{CoSr}(a,c).$$

Ne risulta

$$(9)\qquad \mathrm{Sr}(a,b) \perp \mathrm{Sr}(a,c) .=. \mathrm{Sr}(a,b) \perp \mathrm{CoSr}(a,c) .=. \mathrm{CoSr}(a,b) \perp \mathrm{Sr}(a,c)$$

cioè se il primo raggio è perpendicolare al secondo, il primo è pure perpendicolare al complemento del secondo; invero se la trasformazione considerata α trasforma il saggio ac nel suo complemento, poichè $\alpha^2=\omega$, essa trasformerà pure il complemento nel raggio stesso. E se il primo raggio è perpendicolare al secondo, anche il complemento del primo è perpendicolare al secondo, poichè la trasformazione α non si altera scambiando il raggio ab col suo complemento.

In conseguenza, date due rette ab ed ac, diremo che la prima è perpendicolare alla seconda, se esse si incontrano in un punto a, e se prendendo sia sulla prima che sulla seconda retta uno dei raggi partenti da a, il raggio preso sulla prima è perpendicolare a quello preso sulla seconda; poichè questa proprietà è indipendente dalla scelta dei raggi considerati.

Teorema. Essendo a, b, c punti non collineari, la retta ab è perpendicolare alla retta che unisce il punto c col punto αc, essendo α la trasformazione $\left(a, \mathrm{Sr}\, ab, \frac{\mathrm{Co\,Sp}\,(ab, c)}{\mathrm{Sp}\,(ab, c)}\right)$:

$$(10)\qquad \text{retta}\,(a, b) \perp \text{retta}\,(c, \alpha c).$$

Infatti, poichè c appartiene a $\mathrm{Sp}\,(ab, c)$, il quale, pel moto α, si trasforma nel suo complemento, il punto αc appartiene a $\mathrm{CoSp}(ab,c)$; quindi il segmento $c\,(\alpha c)$ incontra la retta (a, b) in un punto x, che ha per corrispondente sè stesso. Dunque $\alpha\,\mathrm{Sr}\,(x,c)= \mathrm{Sr}\,(x, \alpha c)=\mathrm{CoSr}(x,c)$; dunque il raggio (x, c) colla rotazione α si trasforma nel suo complemento, ossia la retta ab è perpendicolare alla xc, cioè alla $c\,(\alpha c)$.

Questa proposizione permette di risolvere il problema: « Data la

retta ab, ed il punto c fuori di essa, segnare sulla retta ab il punto x tale che $ab \perp xc$ ».

Si osservi che il segmento $c(\alpha c)$ si può rovesciare, poichè colla trasformazione α, c va in αc, ed αc in c.

Teorema. Nel piano abc esiste un raggio ax che non si altera col moto β:

$$(11) \qquad x \varepsilon \mathrm{Sp}(ab, c) . \beta \mathrm{Sr}(a, x) = \mathrm{Sr}(a, x) . -=_x \Lambda .$$

Infatti prendasi nel semipiano (ab, c) un punto qualunque c. Siano βb e βc i corrispondenti di b e di c nella trasformazione β. Poichè b sta su $\mathrm{Sr}(a, b)$, che nel moto β si trasforma nel suo complemento, βb starà su $\mathrm{Co}\,\mathrm{Sr}(a, b)$; e poichè il semipiano (ab, c) si trasforma in sè stesso, e c appartiene a questo semipiano, anche βc vi apparterrà.

Se βc appartiene al raggio (a, c), il raggio (a, c) avrà per corrispondente $(a, \beta c)$ ossia lo stesso raggio (a, c); dunque il raggio (a, c) non varia nel movimento β, e la proposizione è dimostrata.

Se βc non appartiene al raggio (a, c), le rette $(b, \beta b)$ e $(c, \beta c)$ non hanno alcun punto comune; poichè se x è un punto comune a queste rette, anche βx sarà un punto comune alle due rette; e sarà $\beta x -= x$, poichè l'uno di questi punti sta su $\mathrm{Sr}(a, b)$, e l'altro sul suo complemento; quindi le due rette distinte date avrebbero due punti comuni, il che è assurdo.

Pertanto, essendo b, βb, c, βc complanari, e le rette $(b, \beta b)$ e $(c, \beta c)$ non incontrandosi, ne avviene che o il segmento $b(\beta c)$ incontra $c(\beta b)$, o il segmento bc incontra $(\beta b)(\beta c)$. Sia x il loro punto d'incontro. Poichè colla trasformazione β il primo segmento si trasforma nel secondo, ed il secondo nel primo, ne risulta che il punto x non varia colla trasformazione β; e quindi il raggio ax non si altera col moto β.

Quindi il moto β si può ridurre alla forma

$$\left(a, \mathrm{Sr}(a, x), \begin{matrix} \mathrm{Co}\,\mathrm{Sp}(ax, b) \\ \mathrm{Sp}(ax, b) \end{matrix}\right)$$

ossia ha la stessa forma del moto α, in cui al posto di b e di c si legga x e b.

La proposizione precedente permette di risolvere il problema:

Data una retta ab, ed un piano abc, passante per essa, innalzare nel punto a la retta ax, contenuta nel piano abc, e tale che $ax \perp ab$.

Teorema. Il movimento γ fa corrispondere ad ogni punto d del piano abc un punto del complemento del raggio ad:

$$(12) \qquad d \varepsilon \text{piano}(a, b, c) . d -= a . \supset . \gamma d \varepsilon \mathrm{Co}\,\mathrm{Sr}(a, d) .$$

Infatti se d appartiene al Sp (ab, c), poichè γ Sp(ab,c)=CoSp(ab,c), γd apparterrà a Co Sp (ab, c); perciò il segmento $d (\gamma d)$ che unisce due punti appartenenti a bande diverse della retta ab, incontra questa retta in un punto x, tale che $x \varepsilon d (\gamma d)$ e $x \varepsilon$ retta (a, b).

Il punto x della retta ab, o coincide con a, o giace su Sr (a, b), o su Co Sr (a, b).

Se $x \varepsilon$ Sr (a, b), e $x \varepsilon d (\gamma d)$, operando colla γ, si ha:

$$\gamma x \varepsilon \text{Co Sr} (a, b) \text{ e } \gamma x \varepsilon (\gamma d) d,$$

dunque il segmento $d (\gamma d)$, che incontra il raggio (a, b) in x, incontra pure il suo prolungamento in γx, il che è assurdo.

Parimenti è assurdo che $d (\gamma d)$ incontri Co Sr (a, b); dunque $d (\gamma d)$ incontra la retta (a, b) precisamente in a, ossia $a \varepsilon d (\gamma d)$, da cui $\gamma d \varepsilon d'a$, c. v. d.

A Sr (a, d) corrisponderà perciò γ Sr (a,d)=Sr $(a, \gamma d)$=Co Sr (a,d).

Teorema. Se il raggio ac è perpendicolare al raggio ab, sarà il raggio ab perpendicolare ad ac:

(13) $\quad a, b, c \varepsilon \text{p} - \text{Coll} . \text{Sr} (a, c) \perp \text{Sr} (a, b) . \supset . \text{Sr} (a, b) \perp \text{Sr} (a, c)$.

In altre parole, se facendo rotare ab attorno ad ac di 180°, il raggio ab si trasforma nel suo complemento, viceversa facendo rotare ac attorno ad ab di 180°, il raggio ac si trasforma nel suo complemento. Infatti si tratta di dimostrare che α Sr (a, c) = Co Sr (a, c). Ora il moto α equivale al moto $\gamma \beta$; quindi α Sr $(a, c) = \gamma \beta$ Sr (a, c). Ma β Sr(a,c) = Sr (a, c), poichè nella trasformazione β il raggio (a, c) non varia; dunque α Sr $(a, c) = \gamma$ Sr (a, c). Ma γ Sr (a, c) = Co Sr (a, c); dunque α Sr (a, c) = Co Sr (a, c).

Teorema 14. Gli angoli piani, opposti al vertice, sono eguali.

Infatti essendo a, b, c tre punti non collineari, l'angolo formato da Sr (a, b) e Sr (a, c) ove si applichi il movimento γ, si trasforma nell'angolo formato da Co Sr (a, b) e Co Sr (a, c), che è l'opposto al vertice dell'angolo precedente.

Teorema. Essendo a, b, c, d quattro punti non complanari, se la retta ab è perpendicolare sia alla ac che alla ad, allora la retta ab è perpendicolare ad ogni retta ae contenuta nel piano acd.

(15) $\quad a, b, c, d \varepsilon \text{p} - \text{Compl} . \text{Sr} (a, b) \perp \text{Sr} (a,c) . \text{Sr} (a, b) \perp \text{Sr} (a,d)$.
$e \varepsilon \text{piano} (a, c, d) . e -= a . \supset . \text{Sr} (a, b) \perp \text{Sr} (a, e)$.

Infatti, dalle ipotesi fatte, risulta che la trasformazione

$$\alpha = \left(a, \text{Sr} (a, b), \frac{\text{Co Sp} (a, b, c)}{\text{Sp} (ab, c)}\right)$$

è tale che $\alpha \operatorname{Sr}(a,c) = \operatorname{Co}\operatorname{Sr}(a,c)$, e $\alpha \operatorname{Sr}(a,d) = \operatorname{Co}\operatorname{Sr}(a,d)$; quindi $\alpha \operatorname{Sp}(ac,d) = \operatorname{Co}\operatorname{Sp}(ac,d)$; quindi

$$\alpha = \left(a\,, \frac{\operatorname{Co}\operatorname{Sr}(a,c)}{\operatorname{Sr}(a,c)}\,, \frac{\operatorname{Co}\operatorname{Sp}(ac,d)}{\operatorname{Sp}(ac,d)}\right),$$

ossia la trasformazione α si ottiene dalla γ, ove alle lettere a, b, c si sostituiscano a, c, d. Perciò essendo e un punto del piano acd diverso da a, sarà $\alpha \operatorname{Sr}(a,e) = \operatorname{Co}\operatorname{Sr}(a,e)$, ossia $\operatorname{Sr}(a,b) \perp \operatorname{Sr}(a,e)$.

La retta ab, perpendicolare a due rette ac e ad contenute in un piano, e quindi perpendicolare a tutte le rette ae contenute in esso, dicesi perpendicolare al piano.

Teorema 16. Essendo a, b, c, d quattro punti non complanari, il moto $\alpha = \left(a\,, \operatorname{Sr}(a,b)\,, \frac{\operatorname{Co}\operatorname{Sp}(ab,c)}{\operatorname{Sp}(ab,c)}\right)$ trasforma il semipiano (ab,d) nel suo complemento.

$$\alpha \operatorname{Sp}(ab,d) = \operatorname{Co}\operatorname{Sp}(ab,d).$$

Infatti il piano perpendicolare ad ab in a incontri il semipiano (ab,d) secondo $\operatorname{Sr}(a,e)$. Si avrà $\alpha \operatorname{Sr}(a,e) = \operatorname{Co}\operatorname{Sr}(a,e)$; quindi $\alpha \operatorname{Sp}(ab,e) = \operatorname{Co}\operatorname{Sp}(ab,e)$; ossia $\alpha \operatorname{Sp}(ab,d) = \operatorname{Co}\operatorname{Sp}(ab,d)$.

In conseguenza il moto chiamato α non varia se al posto di a mettiamo un punto qualunque della retta (a,b); e non varia se al posto di c mettiamo un punto qualunque dello spazio. Esso è perciò caratterizzato dalla sola retta ab. Il moto α dicesi *simmetria* rispetto all'asse ab, o rotazione di 180° attorno ad ab.

Se la retta ab si chiama r, il moto α si chiamerà S_r. La simmetria assiale è un movimento assai importante poichè ogni moto è il prodotto di due simmetrie. Si ha $S_r^2 = \omega$, e $S_r = \overline{S_r}$, cioè una simmetria ripetuta due volte dà l'identità, ed ogni simmetria è l'inversa di sè stessa.

Il moto β si è visto che si ottiene dall'α con una permutazione di lettere; quindi detta ac la retta $\perp$ alla retta ab contenuta nel piano abc, sarà $\beta = S_{ac}$. Anche il moto γ è una simmetria assiale. Infatti in a si conduca il piano perpendicolare alla ab, che incontri il piano abc secondo ac; in esso si innalzi la perpendicolare ad alla ac. Sarà $\operatorname{Sr}(a,d) \perp \operatorname{Sr}(a,c)$ per costruzione; e $\operatorname{Sr}(ad) \perp \operatorname{Sr}(a,b)$, poichè $\operatorname{Sr}(a,b)$ è perpendicolare ad ogni $\operatorname{Sr}(a,d)$ contenuta nel piano perpendicolare al primo. Ora $\gamma \operatorname{Sr}(a,d) = \alpha\beta \operatorname{Sr}(a,d)$, poichè $\gamma = \alpha\beta$. Ma, essendo $\operatorname{Sr}(a,d) \perp \operatorname{Sr}(a,c)$, sarà $\beta \operatorname{Sr}(a,d) = \operatorname{Co}\operatorname{Sr}(a,d)$, ed essendo $\operatorname{Sr}(a,d) \perp \operatorname{Sr}(a,b)$, sarà $\alpha \operatorname{Sr}(a,d) = \operatorname{Co}\operatorname{Sr}(a,d)$, quindi $\alpha \operatorname{Co}\operatorname{Sr}(a,d) = \operatorname{Sr}(a,d)$; onde $\gamma \operatorname{Sr}(a,d) = \operatorname{Sr}(a,d)$, ossia $\operatorname{Sr}(a,d)$ si riproduce inalterato col moto γ.

Adunque, dati tre assi a due a due perpendicolari, il prodotto della

simmetria rispetto al primo per la simmetria rispetto al secondo dà la simmetria rispetto al terzo.

Traslazione.

Essendo a, b, c punti non collineari, pongasi

$$\tau = \begin{pmatrix} b & \mathrm{Co\,Sr}(b, a) & \mathrm{Sp}(ab, c) \\ a & \mathrm{Sr}(a, b) & \mathrm{Sp}(ab, c) \end{pmatrix}.$$

Il moto τ dicesi la traslazione lungo la retta ab, nel piano abc che trasporta a in b.

Teorema 1. I punti a, τa, $\tau^2 a$, ... τ^{-1}, $\tau^{-2} a$, ... stanno sulla retta ab, ed essendo m un intero positivo, o nullo, o negativo, il punto $\tau^m a$ giace fra $\tau^{m-1} a$ e $\tau^{m+1} a$.

Infatti, per definizione, $\tau a = b$; e poichè b sta su $\mathrm{Sr}(a, b)$, la quale ha per corrispondente $\mathrm{Co\,Sr}(b, a) = a' b$, τb giacerà su $a'b$, cioè $\tau b \,\varepsilon\, a'b$, ossia $b \,\varepsilon\, a(\tau b)$, o ancora $\tau a \,\varepsilon\, a(\tau^2 a)$.

Moltiplicando per τ^{n-1} si avrà $\tau^n a \,\varepsilon\, (\tau^{n-1} a)(\tau^{n+1} a)$, che è la proposizione a dimostrarsi.

Si deduce che se p, q, r sono interi, n, e $p < q < r$, il punto $\tau^q a$ giace fra $\tau^p a$ e $\tau^r a$.

Teorema 2. Essendo a, b, c punti non collineari, e d un punto del prolungamento di ab, si può determinare un numero intero positivo n, in guisa che il punto d giaccia fra a e la posizione che assume a dopo n traslazioni $\tau = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\mathrm{Sp}(ab, c)$:

$$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{p-Coll} \,.\, d \,\varepsilon\, a'b \,.\, \supset : n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, d \,\varepsilon\, a(\tau^n a) \,.\, -=_n \Lambda \,.$$

Infatti, poniamo per assurdo che qualunque sia il numero n, sempre d sia fuori del segmento compreso fra a e $\tau^n a$.

Allora consideriamo l'insieme dei punti τa, $\tau^2 a$, ... cioè $\tau^{\mathrm{N}} a$; e diciamolo k, cioè poniamo $k = \tau^{\mathrm{N}} a$.

La classe k è una classe di punti compresi fra a e d, effettivamente esistente. Dunque, pel postulato della continuità, esisterà un punto x appartenente al segmento ad, o coincidente con d, tale che fra x e d non giacciono punti della classe k, ma tale che preso un punto qualunque y fra a ed x, esistono punti della classe k compresi fra y ed x, o coincidenti con x.

Poichè colla trasformazione τ la retta ab non varia, e x appartiene a questa retta, anche $\tau^{-1} x$ vi apparterrà; perciò $\tau^{-1} x$ o coincide con x, o si trova sul raggio (x, a), o sul suo complemento $a'x$.

Ma se $\tau^{-1} x$ coincide con x, ossia $x = \tau x$, la trasformazione τ che

lascia inalterato il punto x, il raggio (x, a), e il semipiano (xa, c), è l'identità, il che è assurdo perchè la trasformazione τ fa corrispondere al punto a il punto diverso b.

Se $\tau^{-1}x$ appartiene al raggio (x, a), esisterà qualche punto della classe k compreso fra $\tau^{-1}x$ e x, o coincidente con x; cioè esisterà un intero n tale che $\tau^n a \,\varepsilon\, (\tau^{-1}x)\, x$; eseguendo l'operazione τ, sarà $\tau^{n+1}a \,\varepsilon\, x\,(\tau x)$; ora x è compreso fra $\tau^{-1}x$ e τx; $\tau^{-1}x$ è compreso fra a ed x; dunque τx sarà sul prolungamento $a'x$; e $\tau^{n+1}a$ che è compreso fra x e τx, sarà pure sul prolungamento $a'x$, ossia sul segmento xd; vale a dire esistono punti $\tau^{n+1}a$ che stanno fra x e d, cosa assurda colla ipotesi fatta, che x sia tale che fra esso e d non giacciano punti della classe $k = \tau^{N} a$.

Se $\tau^{-1}x$ appartiene al raggio $a'x$, τx apparterrà al suo complemento $\mathrm{Sr}\,(x, a)$; quindi fra τx ed x esisteranno punti della classe k. Sia n un intero tale che $\tau^n a$ sia compreso fra τx ed x, cioè $\tau^n a \,\varepsilon\, (\tau x)\, x$; sarà $\tau^{n-1}a$ compreso fra x e $\tau^{-1}x$, quindi $\tau^{n-1}a$ appartiene al raggio $a'x$, ossia esistono punti della classe k compresi fra x e d, il che è in contraddizione coll'ipotesi fatta.

Dunque il supporre che qualunque si sia il numero n, il punto $\tau^n a$ giaccia sempre fra a e d conduce sempre ad un assurdo; ossia esiste un numero n tale che d giaccia fra a e $\tau^n a$.

Fra i valori di n che soddisfano a queste condizioni havvi il minimo; dettolo n, se d non è un punto della serie $\tau^N a$, esso punto giacerà fra $\tau^{n-1}a$ e $\tau^n a$.

Teorema 3. Essendo d un punto del raggio $a'b$, τd appartiene al raggio $a'd$.

La cosa è chiara se il punto d appartiene alla serie $\tau^N a$.

Se d non vi appartiene, si determini il numero n in guisa che d sia compreso fra $\tau^n a$ e $\tau^{n+1}a$:

$$d \,\varepsilon\, (\tau^n a)\,(\tau^{n+1}a).$$

Sarà

$$\tau d \,\varepsilon\, (\tau^{n+1}a)\,(\tau^{n+2}a). \qquad (\alpha)$$

Ora $\tau^{n+2}a$ appartiene al raggio $a'\,(\tau^{n+1}a)$; dunque

$$(\tau^{n+1}a)\,(\tau^{n+2}a) \supset a'\,(\tau^{n+1}a). \qquad (\beta)$$

Il punto d sta fra a e $\tau^{n+1}a$, dunque

$$a'\,(\tau^{n+1}a) \supset a'd. \qquad (\gamma)$$

Dalle (α) (β) (γ) si deduce la proposizione a dimostrarsi.

Ne risulta che se un moto di traslazione fa corrispondere al punto a un punto b, ad un punto d del raggio $a'b$ non può far corrispondere un punto interno al segmento ad.

Teorema 4. Essendo a, b, c tre punti non collineari, si dia al segmento ab prima la traslazione τ che porta a in b, poi lo si rovesci attorno alla perpendicolare by alla ab, contenuta nel piano abc. Allora il punto b verrà a coincidere con a; ossia ogni segmento si può rovesciare:

$$\mathrm{S}_{by}\, \tau\, b = a\,.$$

Infatti, dicasi σ il moto considerato

$$\sigma = \mathrm{S}_{by}\, \tau = \begin{pmatrix} b & \mathrm{Sr}\,(b\,,a) \\ a & \mathrm{Sr}\,(a\,,b) \end{pmatrix} \mathrm{Sp}\,(ab\,,c)\Big)$$

e sia $d = \sigma\, b$. Si vuol dimostrare che $d = a$.

Poichè b appartiene a $\mathrm{Sr}(a,b)$, alla quale corrisponde in τ la $\mathrm{Sr}(b,a)$, il punto $\sigma\, b = d$ apparterrà a $\mathrm{Sr}\,(b\,, a)$, vale a dire o giace sul segmento ba, o coincide con a, o giace sul prolungamento di ba.

Se $d\, \varepsilon\, ba$, sarà $\sigma^2\, a = d$; $\sigma^2\, \mathrm{Sr}\,(a\,, b) = \sigma\, \mathrm{Sr}\,(b\,, a) = \mathrm{Sr}\,(\sigma\, b\,, \sigma\, a) = \mathrm{Sr}\,(d\,, b)$; $\sigma^2\, \mathrm{Sp}\,(ab\,, c) = \mathrm{Sp}\,(ab\,, c)$; dunque

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} d & \mathrm{Sr}\,(d\,,b) & \mathrm{Sp}(ab\,,c) \\ a & \mathrm{Sr}\,(a\,,b) & \end{pmatrix},$$

ossia σ^2 è una traslazione. Essendo $d\, \varepsilon\, ba$, sarà $\sigma\, d\, \varepsilon\, (\sigma\, b)\, (\sigma\, a)$, cioè $\sigma\, a\, \varepsilon\, db$.

Noi abbiamo così una traslazione σ^2 che al punto a fa corrispondere $\sigma^2\, a = d$, che sta fra a e b, e al punto b fa corrispondere $\sigma^2\, b = \sigma\, d$, che sta fra d e b, il che è assurdo. Dunque il punto d non può giacere fra a e b.

Analogamente si prova che d non può appartenere al prolungamento di ba. Dunque il punto d coincide con a.

Se nell'espressione di σ^2 si legge a al posto di d, si ha $\sigma^2 = \omega$.

Si può scrivere

$$\sigma = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}, \mathrm{Sp}\,(ab\,, c)\Big)\,.$$

Teorema 5. Il moto $\sigma = \mathrm{S}_{by}\, \tau$ è la simmetria attorno ad un certo asse xz contenuto nel piano abc, e perpendicolare alla retta ab.

Infatti si consideri il moto

$$\mathrm{S}_{ab}\, \sigma = \begin{pmatrix} b & , & a & , & \mathrm{Co\, Sp}\,(ab\,, c) \\ a & , & b & , & \mathrm{Sp}\,(ab\,, c) \end{pmatrix}.$$

Si ha $(\mathrm{S}_{ab}\, \sigma)^2 = \omega$. Sia c un punto qualunque del piano abc, e sia $c_1 = (\mathrm{S}_{ab}\, \sigma)\, c$.

Poichè a $\mathrm{Sp}\,(ab\,, c)$ corrisponde il suo complemento, c_1 giacerà ri-

spetto alla retta ab da banda opposta a quella in cui giace c; dunque il segmento cc_1 incontra la retta ab in un punto x. Il punto x non varia col moto $S_{ab}\,\sigma$; invero questo moto conserva inalterata la retta ab; al segmento cc_1 fa corrispondere c_1c, cioè il segmento stesso; quindi anche il loro punto d'incontro è fisso:

$$S_{ab}\,\sigma\,x = x\,.$$

Moltiplico per S_{ab}, ed osservo che $(S_{ab})^2 = \omega$, e $S_{ab}\,x = x$, poichè S_{ab} lascia inalterati tutti i punti di ab; e trovo

$$\sigma\,x = x\,.$$

Dunque il moto σ lascia inalterato il punto x, trasforma il raggio xa nel suo complemento, e lascia fisso il $\mathrm{Sp}\,(xa\,,c)$, cioè

$$\sigma = \left(x\,, \frac{\mathrm{Co\,Sr}\,(x\,,a)}{\mathrm{Sr}\,(x\,,a)}\,, \mathrm{Sp}\,(xa\,,c)\right)$$

perciò σ è la simmetria attorno all'asse xz perpendicolare alla retta ab nel punto x, e contenuto nel piano abc:

$$\sigma = S_{xz}\,.$$

Teorema 6. Ogni moto di traslazione τ è il prodotto di due simmetrie assiali, i cui assi sono perpendicolari ad ab, e contenuti nel piano abc.

Invero, dall'ultima formula, sostituendo a σ il suo valore, si ha:

$$S_{by}\,\tau = S_{xz}\,,$$

e moltiplicando avanti per S_{by},

$$\tau = S_{by}\,S_{xz}\,,$$

che dimostra la proposizione enunciata.

Rotazioni.

Essendo a, b, c punti non collineari, pongasi

$$\sigma = \left(a\,, \frac{\mathrm{Sr}\,(a\,,c)}{\mathrm{Sr}\,(a\,,b)}\,, \frac{\mathrm{Co\,Sp}\,(ac\,,b)}{\mathrm{Sp}\,(ab\,,c)}\right).$$

Il moto σ dicesi la rotazione attorno al punto a, nel piano abc, che trasporta il raggio $(a\,,b)$ sul raggio $(a\,,c)$.

Dicesi angolo compreso fra i raggi ab e ac, essendo a, b, c tre punti non complanari, la figura piana seguente:

$$\mathrm{Ang}\big(\mathrm{Sr}(a,b),\mathrm{Sr}(a,c)\big) = \mathrm{Sp}(ab,c) \frown \mathrm{Sp}(ab,c) = abc\,.\smile bc \smile a'bc$$

Si dimostrano, in modo analogo a quanto si è fatto per le traslazioni, le proposizioni seguenti:

Teorema 1. Se i raggi $\sigma\,\mathrm{Sr}(a, b)$, $\sigma^2\,\mathrm{Sr}(a, b)$, ... $\sigma^m\,\mathrm{Sr}(a, b)$ appartengono tutti al semipiano (ab, c), allora ognuno di essi è compreso nell'angolo formato dal raggio precedente col seguente.

Teorema 2. Essendo d un punto del semipiano (ab, c), allora o il raggio (a, d) è uno dei raggi $\sigma^N\,\mathrm{Sr}(a, b)$, ovvero è compreso nell'angolo formato da due di questi raggi successivi.

Teorema 3. Essendo d un punto del semipiano (ab, c), esterno all'angolo di ab con ac, cioè se $d\,\varepsilon\,\mathrm{Ang}\big(\mathrm{Sr}(a, c), \mathrm{Co}\,\mathrm{Sr}(a, b)\big)$, il raggio $\sigma\,\mathrm{Sr}(a, d)$ non appartiene all'angolo dei raggi (a, b) e (a, d).

Teorema 4. Se sulla figura (a, b, c) si fa prima la rotazione σ, poi la simmetria S_{ac}, il raggio ab verrà in ac, e il raggio ac in ab, sicchè l'angolo si può rovesciare.

Teorema 5. Il moto $\mathrm{S}_{ac}\,\sigma$ ora considerato è la simmetria attorno ad un certo asse ax (bisettrice dell'angolo bac)

$$\mathrm{S}_{ac}\,\sigma = \mathrm{S}_{ax}\,.$$

Teorema 6. Ogni rotazione σ è il prodotto di due simmetrie assiali

$$\sigma = \mathrm{S}_{ac}\,\mathrm{S}_{ax}\,.$$

Si vede facilmente che con nuove combinazioni di questi moti si possono ottenere nuove proprietà; si ha così un vasto campo di studii e ricerche. Esaminando quanto precede dal solo punto didattico, dobbiamo confessare che questa trattazione non ha ancora assunto quella semplicità che è necessaria per essere introdotta negli elementi. Studii ulteriori possono semplificare le singole parti, con più opportune combinazioni di postulati.

Pur tuttavia nutro fiducia che alcune delle osservazioni fatte possano essere utili per la pubblicazione di trattati elementari; e sarò lieto del mio lavoro se esso contribuirà a rendere più esatte le definizioni e dimostrazioni di Geometria elementare, e ad analizzare meglio i concetti su cui basa questa scienza.

Giuseppe Battaglini

Cenno necrologico di Ernesto Pascal

Io non voglio qui scrivere una biografia completa di Giuseppe Battaglini, e nemmeno fare un'analisi dei suoi lavori di matematica (*). Io, che gli fui per tanti anni scolaro ed amico devoto ed affezionato, voglio solo qui sciogliere un debito del cuore, e dire quelle cose che mi si affollano alla mente, ancora tutta piena dei carissimi ricordi di lui.

Di Giuseppe Battaglini, a chi per poco lo conoscesse da vicino, appariva subito la nota più alta e più spiccata del carattere; amare la scienza e la scuola sopra ogni altra cosa.

Per la scuola non c'era sacrificio cui egli non si sottomettesse con un vigore che perfino negli ultimi anni non lo abbandonò mai e poteva dirsi giovanile.

Ed invero, pensando di lui non si può non pensare per prima cosa a lui come maestro.

Si sarebbe detto che egli non viveva che per la sua scuola e pei suoi giovani, e gli sarebbe parsa vana l'opera sua di scienziato se non fosse stata accompagnata dall'opera sua di maestro. La quale opera sua di maestro era tanto efficace che quell'amore e quell'entusiasmo per la scienza da cui egli era animato e che formava l'occupazione unica della sua mente, egli finiva col trasfonderlo nei giovani suoi.

Una grandissima parte dei giovani matematici che occupano ora dei posti distinti nell'insegnamento sono stati scolari suoi, e hanno da lui ricevuto le prime ispirazioni, i primi incoraggiamenti e i primi aiuti; quegli aiuti e quegli incoraggiamenti ai quali lo si trovava sempre disposto.

(*) Una bella necrologia con molti dati biografici è comparsa da pochi giorni nei Rendiconti di Palermo per cura del Prof. Torelli.

Egli amava circondarsi di una schiera di giovani e intrattenersi con loro di soggetti matematici; faceva loro conoscere nuovi lavori; li metteva al corrente delle quistioni più vitali della scienza, faceva loro in poche parole il quadro di una teoria; prendeva occasione da questa per proporre loro qualche problema e per incitarli ad occuparsene; faceva insomma tutto quello che si può fare per invogliare alle ricerche originali, e non dimenticando neanche di essere poi benignamente indulgente coi principianti, di cui mai sprezzava i primi passi.

Le quistioni di cui s'intratteneva egli coi giovani non erano mai quistioni elementari, ma riguardavano sempre i maggiori problemi della geometria e dell'analisi, chè anzi egli sdegnava di occuparsi di cosucce che avessero l'aria di esercizi di scuola, e tutto ciò che avesse aspetto di grande e di nuovo lo attraeva irresistibilmente.

L'entusiasmo per gli studi in lui fu sempre giovanile, e non trascurò mai fatica per intraprendere qualunque nuovo studio e per imparare qualunque ramo delle matematiche che gli sembrasse utile. Ed in questo fu mirabilmente aiutato da una grande elasticità d'ingegno per modo che potette applicarsi perfino ad insegnare le discipline più disparate; egli insegnò calcolo e geometria superiore, insegnò analisi superiore e meccanica razionale, geometria analitica e teoria delle macchine, insomma egli insegnò quasi tutte le parti delle matematiche pure e anche qualcuna delle applicate.

Egli che aveva tutto imparato da sè senza l'aiuto di alcun maestro, aveva quella dote così caratteristica degli uomini che si formano da sè, il non schivare nessun lavoro per quanto fosse pesante, ed io mi ricordo che perfino negli ultimi anni egli conservò l'abitudine di trascrivere tutta intera su di un foglio di carta la lezione che veniva a recitare nella scuola, e dettava lezioni tutti i giorni, e spesso anche più volte in un giorno.

Era laborioso al massimo grado e diligente, e avrebbe voluto che tutti, e massime i giovani, fossero stati come lui; ma questo non sempre gli accadeva di trovare, ed egli se ne rattristava amaramente, e non trascurava occasione per lamentarsene.

Egli diceva spesso di invidiare i giovani di adesso che possono aver tanti mezzi e tanti aiuti per studiare cose nuove, mentre a' suoi tempi egli non aveva potuto avere nessun aiuto e avea dovuto da sè procacciarsi faticosamente la sua carriera. Egli apparteneva ancora a quegli uomini che non si adattano per nessuna ragione al mondo, alle circostanze ed ai tempi, e tutto quello scetticismo invadente ora l'animo dei giovani, quello stato sempre più decadente delle nostre Università, coi loro frequenti tumulti, colla crescente indisciplinatezza, tutto questo assieme di cose lo esasperava al massimo grado, e chi

gli era intimo vedeva che non si trattava di una esasperazione passeggera, ma che egli ne soffriva davvero internamente; e le sue interminabili lamentazioni se erano qualche volta eccessive, rivelavano però sempre un'anima candida, che vuole il bene e il meglio ad ogni costo, e non sa adattarsi a vedere il mondo qual'è.

Il nostro povero Battaglini fu laborioso ed ebbe fama di esserlo; fece parte di innumerevoli Commissioni ed i lavori più faticosi erano sempre affidati a lui. Ed egli tutto disimpegnava con zelo, con modestia, e sopratutto con un'onestà senza pari.

Ho detto con modestia; ed è difficile infatti trovare chi più di lui schivò gli onori, cercò sempre di porsi da parte, non si pose mai in prima linea, e mai cercò di profittare per sè della sua condizione e dei vantaggi personali che questa gli avrebbe potuto arrecare; la sua vita fu spesa tutta per gli altri ed egli si privò per sè perfino delle più innocenti soddisfazioni.

Mi ricordo di una lettera che egli mi scrisse una volta quando io stavo a Göttingen.

Egli mi diceva modestamente di invidiare la mia fortuna nell'aver potuto andare così lontano a studiare cose nuove, e che si sarebbe egli, vecchio com'era, reputato molto felice se avesse potuto in un momento liberarsi di tutti i suoi impegni e di tutte le sue infermità, e venire anche lui ad inscriversi umilmente fra gli scolari di Göttingen; è difficile trovare una maggior modestia in un vecchio a sessantaquattro anni come lui, e che aveva percorsa già tutta una luminosa carriera scientifica.

Gli piacque piuttosto vivere lontano dai rumori del mondo e chiuso nelle sue geniali meditazioni e nei suoi studii, dei quali mai si mostrò sfiduciato o stanco, anche negli ultimi anni quando la mente non più gli rendeva quello stesso aiuto di una volta.

E degli uomini che vivono separati, lontani dalle brighe e dagli affari, egli aveva la nota sopra tutte caratteristica; egli, bisogna notar ancor questo per formarsi intero il concetto di tutti i lati della mente sua, in qualche cosa mostrava una grande semplicità; si figurava ostinatamente un mondo tutto diverso dal reale; un mondo nel quale tutti non fossero preoccupati che delle idee di giustizia e di onestà, un mondo senza inciampi per chi volesse percorrere la via del bene. Una volta egli, preoccupato delle sorti dell'insegnamento, e credendo di potervi porre riparo in qualche maniera, s'impegnò di formulare un progetto nel quale si modificava dalle fondamenta tutto l'ordinamento degli studi matematici nelle Università; lo presentò alla Facoltà di Napoli e volle che la Facoltà lo presentasse al ministro, ed era fermamente convinto che quel problema intorno cui da tanti anni si affaticavano

e si affaticano inutilmente ministri e Parlamenti, egli lo potesse risolvere con una deliberazione della Facoltà. Quel progetto fu respinto senza neanche prenderlo in esame, ed a lui parve cosa strana e non se ne sapeva spiegare il perchè; ad un'altro sarebbe parsa cosa naturalissima.

Un altro lato rimarchevole della sua mente fu la sua avversione a certi nuovi concetti di geometria a cui egli ne' suoi studii giovanili non si era abituato, p. es., l'introduzione dei concetti di spazii a più dimensioni; ed è rimarchevole questo lato, perchè, come ho già detto, il suo spirito conservò sino a tardi una freschezza e una vigoria giovanile, ed era anzi per natura aperto a tutto ciò che avesse aspetto di novità. Egli accettò tutte le idee nuove, se le appropriò, vi collaborò con ardore; una sola fu l'idea nuova cui non si volle mai adattare: e fu la convenienza dell'introduzione di spazii a più dimensioni. Ma la predilezione per una parte piuttosto che per un'altra delle matematiche non lo accecò mai però al punto da farlo diventare passionato, e da renderlo parziale nei frequenti giudizii che dovette pronunziare sul valore dei giovani matematici.

Egli aveva provato per tempo, e a sue spese, come pesava l'ingiustizia, e aveva imparato a tenersene lontano e a non farsi fuorviare da personali simpatie o da estranei interessi.

Aveva cominciato la sua carriera, circa quarant'anni fa, a Napoli, presentandosi ad un concorso pubblico per la cattedra di Geometria analitica all'Università, e si era visto, in questo concorso, posposto a chi valeva meno di lui. Quest'atto d'ingiustizia, che non sarà così facilmente dimenticato, gli rimase per tutta la vita così fortemente impresso nella mente, che ogni volta che si trovò poi a dover giudicare gli altri, gli parve sempre non leggero còmpito il suo, e ci si impegnò con l'animo più scrupoloso; e se qualcuno potette essere da lui qualche volta discorde nel giudizio, tutti però dovettero sempre ammirare in lui una lealtà a tutta prova, un amore disinteressato, fermo, sincero per la giustizia, indipendente da ogni pregiudizio di scuole e da ogni idea di regionalismo, da qualsiasi interesse insomma che non fosse un elevato interesse di studii e di scienza.

Nel movimento matematico italiano degli ultimi trent'anni, Giuseppe Battaglini rappresenta una parte senza dubbio assai importante, e la rappresenta sia come maestro e ispiratore di una schiera numerosissima di giovani matematici, sia come scienziato, indagatore paziente e ricercatore laborioso e geniale.

Sono quasi un centinaio le pubblicazioni accademiche che portano il suo nome, e sono sparse massimamente nei Rendiconti dell'Accademia di Napoli, dell'Accademia dei Lincei e nei volumi del Giornale

di Matematiche di Napoli, di cui fu uno dei fondatori, e dopo pochi anni ne divenne poi il direttore.

Le sue prime memorie sono del 1851, e sono stampate negli Annali di Tortolini; riguardano i problemi sui poligoni iscritti ad una conica; il maggior numero delle sue pubblicazioni è fra gli anni dal 1862 al 1876, che furono gli anni più fecondi della sua carriera scientifica. Quando egli si poneva a studiare un argomento, non lo abbandonava finchè non lo avesse considerato da tutti i lati, ed è perciò che le sue Memorie sono in gran parte legate fra loro, e molte di esse congiunte insieme formano un tutto organico, sviluppano ampiamente tutta una teoria.

Vi sono una quindicina di Memorie dal 1864 sino al 1868, che si seguono l'una all'altra senza interruzione e che trattano della teoria delle forme algebriche e della interpretazione geometrica di tutte le forme invariantive di queste; si comincia colle forme binarie di 1° e 2° grado e si giunge sino alle forme ternarie di grado qualunque.

Degli stessi anni sono le sue Memorie sui sistemi di rette. In una di queste egli iniziò lo studio di quello speciale complesso di 2° grado che poi ha preso nome da lui, e la cui equazione si esprime mediante la somma dei quadrati delle coordinate. Egli aveva creduto, mediante un computo di costanti, che a tal forma potesse ridursi un qualunque complesso quadratico, ma il Klein poi in una Memoria celebre stampata nel 2° volume dei Mathematische Annalen mostrò la erroneità di questa opinione. Su questo complesso il Battaglini tornò poi molti anni dopo in una nota stampata nei Lincei (1878). Posteriori a queste e tutte del medesimo anno 1869 sono otto Memorie di Meccanica razionale, in cui si propose di ricostruire, dal punto di vista della nuova geometria Plückeriana, di cui egli fu uno dei più appassionati cultori, tutte le formole di statica, cinematica e dinamica.

In tre Memorie di Geometria Proiettiva (dal 1873 al 1875) egli si propose di ricavare le proprietà proiettive delle figure servendosi del concetto delle reti geometriche di Möbius; e così sarebbe poi lunga, ed io non mi son qui proposto di farla, l'analisi di tutti gli altri numerosi suoi lavori che trattano della partizione dei numeri, dei determinanti, di proprietà di curve e superficie speciali, di geometria immaginaria, della dipendenza conica fra due figure, delle forme bilineari, dei connessi, dell'equazione differenziale ellittica, ecc., ecc.

Negli ultimi anni si pose a studiare la teoria dei reciprocanti di Sylvester, e pubblicò all'Accademia dei Lincei una Nota in cui si proponeva di applicare quella teoria alla ricerca dei cosidetti punti sestatici di una curva, ricerca già fatta per altra via dal Cayley.

Si era poi anche impegnato a scrivere un trattato di geometria ana-

litica e lo aveva ideato su di un piano nuovo, con indirizzo diverso dal comune; ci si era appassionato e ne parlava molto spesso, e aveva già cominciato a scriverne parecchi fogli. Ma le forze già gli venivan meno, ed egli, vista l'impossibilità di continuare tutto il lavoro, si decise alla fine di pubblicare nel suo giornale quel poco che aveva già scritto.

Con lui l'Università di Napoli ha perduto una delle sue glorie maggiori; egli era stato in quell'Università il vero novatore della matematica, portando nella scuola un alito fecondo di vita nuova, portando in mezzo ai giovani quell'entusiasmo per la matematica nuova, quell'amore e quella sete di novità da cui egli era così fortemente dominato, quell'interessamento vivo per tutti i più alti e più vitali problemi della geometria e dell'analisi moderna.

Ed io fo voti che non tardi a sorgere in quella Università un qualunque monumento che ricordi ai posteri

la cara e buona immagine paterna

di Giuseppe Battaglini, perchè è giusto che nella scuola restino perennemente scolpite nel marmo le care sembianze di chi per la scuola spese efficacemente tutta la vita sua.

Pavia, maggio 1894.

Sugli insiemi continui e sugli insiemi connessi.

Nota di EUGENIO MACCAFERRI *a Bologna.*

1. Ricorderemo anzitutto che secondo la terminologia stabilita dal CANTOR un insieme (finito) γ, ad un numero qualunque di dimensioni, si dice *continuo* se esso è

1°) *perfetto*, cioè identico al suo derivato γ', e

2°) *ben concatenato*, cioè siffatto che preso un numero positivo ε piccolo a piacere, per due punti A, A′ di γ esiste un numero (finito) ν di punti A_1, A_2,... A_ν di γ tali che le distanze (*) AA_1, A_1A_2,... $A_\nu A'$ risultino tutte $< \varepsilon$ (**).

Alla condizione che l'insieme γ sia perfetto si può sostituire quella che sia *chiuso*, cioè che contenga ogni suo punto limite, giacchè manifestamente un insieme chiuso e ben concatenato è anche perfetto.

Per gli insiemi ad una dimensione rappresentati dai punti di una retta (*insiemi lineari*) è chiaro che l'insieme formato da tutti i punti di un intervallo o segmento di retta, estremi compresi, è un insieme lineare continuo. — Inversamente, è facile vedere che ogni insieme lineare continuo γ è formato da tutti i punti di un intervallo o segmento di retta, estremi compresi. Infatti, tale insieme γ ammetterà per limiti inferiore e superiore due punti A e B che appartengono a γ' e quindi a γ; di più ogni altro punto C compreso tra A e B apparterrà pure a γ, giacchè in caso contrario non apparterrebbe neppure a γ', epperò esisterebbe un intervallo di lunghezza finita λ racchiudente C e che non

---

(*) È noto che in uno spazio ad n dimensioni (x_1, x_2, ... x_n) la distanza di due punti $A(a_1, a_2, \dots a_n)$, $B(b_1, b_2, \dots b_n)$ è definita dal valore positivo di $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\dots+(a_n-b_n)^2}$. A questa espressione il JORDAN (*Cours d'Analyse*, t. I, 2ᵉ éd.) sostituisce l'altra $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\dots+|a_n-b_n|$ che è infinitesima dello stesso ordine della precedente quando B tende ad A, e la chiama *écart*.

(**) G. CANTOR, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, Acta mathem., vol. 2°, pag. 406.

conterrebbe alcun punto di γ, ciò che è escluso per essere γ ben concatenato (*).

2. Dimostro ora che

« Se si hanno $n\,[n \geqq 2]$ funzioni (reali e ad un valore) continue

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots\ x_n = x_n(t)$$

« di un parametro (reale) t che varia tra due valori assegnati t_0 e T « $[t_0 \leqq t \leqq T]$, escluso il caso che esse siano tutte per l'intero inter- « vallo $t_0\,T$ delle costanti, — nello spazio ad n dimensioni $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ « l'insieme dei punti $(x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$ è un insieme continuo, « secondo la definizione del Cantor (**). »

Suppongo per semplicità $n = 2$, ma il procedimento che seguo vale per n qualunque.

Essendo adunque x, y le coordinate cartesiane ortogonali dei punti di un piano, si consideri l'insieme γ dei punti rappresentati dalle due funzioni continue $x = x(t)$, $y = y(t)$, ove t è un parametro che varia tra due valori assegnati t_0 e T.

L'insieme γ è chiuso. Invero, sia P un punto limite dell'insieme γ. Preso un numero positivo arbitrario ρ, considero la successione infinita di cerchi concentrici, di centro P e di raggi

$$\rho,\ \frac{\rho}{2},\ \frac{\rho}{2^2}, \ldots\ \frac{\rho}{2^n}, \ldots .$$

Tali cerchi contengono tutti dei punti di γ: come limiti superiori dei parametri t dei punti di γ interni a tali cerchi avremo una successione infinita di valori

$$\tau_0,\ \tau_1,\ \tau_2, \ldots\ \tau_n, \ldots$$

decrescenti, o almeno non crescenti. Sia τ il limite della successione (τ_n): per la continuità delle funzioni $x(t)$, $y(t)$ il punto $x(\tau)$, $y(\tau)$ di γ non può essere che il punto P.

L'insieme γ è ben concatenato. Invero, per la continuità uniforme delle $x(t)$, $y(t)$ nell'intervallo (reale) $t_0\,T$, preso un ε piccolo a piacere,

(*) Jordan, loc. cit., pag. 27.

(**) L'insieme γ dei punti $(x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$, definito sopra, si dice che costituisce una *linea continua* nello spazio ad n dimensioni $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, sicchè il teorema si può enunciare brevemente dicendo che « in uno spazio ad n dimensioni una linea continua costituisce un insieme continuo ».

potremo dividere tale intervallo in un numero finito d'intervalli $t_0 t_1$, $t_1 t_2$,... t_νT in ognuno dei quali (estremi compresi) sia

$$| x(t) - x(t') | < \varepsilon, \quad | y(t) - y(t') | < \varepsilon;$$

sicchè se si considerano i punti A_0, A_1, A_2,... A_ν, A' di γ che corrispondono ai valori t_0, t_1, t_2,... t_ν, T di t, avremo che le distanze A_0A_1, A_1A_2, ... $A_\nu A'$ sono tutte $< \varepsilon\sqrt{2}$, onde l'insieme è ben concatenato.

Segue che l'insieme γ è continuo come volevo dimostrare (*).

3. Pongo la seguente definizione:

« Si dirà che un insieme (finito) γ ad n dimensioni (x_1, x_3,... x_n)
« è *connesso*, se essendo A(a_1, a_2,... a_n), B(b_1, b_1,... b_n) due punti
« qualunque di γ, si possono formare n funzioni (reali e ad un valore)
« continue

$$(\alpha) \qquad x_1 = x_1(t), \; x_2 = x_2(t), \ldots \; x_n = x_n(t),$$

« tali che mentre t (reale) varia da t_0 a T [$t_0 \leqq t \leqq$ T], il punto
« M($x_1(t)$, $x_2(t)$,... $x_n(t)$) varî da A a B appartenendo sempre a γ (**). »

Osserviamo che senza fare alcuna restrizione alla definizione posta, possiamo supporre che le funzioni (α) siano tali che il punto A non corrisponda che al solo valore iniziale t_0 di t, e parimenti il punto B non corrisponda che al solo valore finale T di t (***).

Supponiamo infatti che i punti A($x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, ... $x_n(t_0)$), B(x_1(T), x_2(T),... x_n(T)) corrispondano a più valori di t: è chiaro che i valori di t che dànno il punto A e quelli che dànno il punto B costituiscono (per la continuità delle (α)) due insiemi chiusi, e quindi potremo considerare il massimo t'_0 del primo insieme e il minimo T' del secondo insieme. E manifestamente le n funzioni continue date (α) per t variabile da t'_0 a T' [$t'_0 \leqq t \leqq$ T'] sono tali che per ogni valore di t si

---

(*) Quando già il presente articolo era in bozze mi sono accorto che il teorema di questo § 2 è compreso nel teorema che si trova nel Jordan, loc. cit., a pag. 51. A sua volta il teorema del Jordan corrisponde nella sua prima parte al teor. III, pag. 66, vol. 2° delle *Lezioni di analisi infinitesimale* (1893) del prof. G. Peano.

(**) Cioè, quando $n \geqq 2$, se si può condurre tra A e B una *linea continua* i cui punti appartengano tutti a γ.

(***) Cioè, quando $n \geqq 2$, possiamo supporre che la linea continua che unisce A e B non abbia per *punti multipli* i due punti A e B.

ha un punto dell'insieme γ e che i punti A e B corrispondono ai soli valori t'_0 e T' (*).

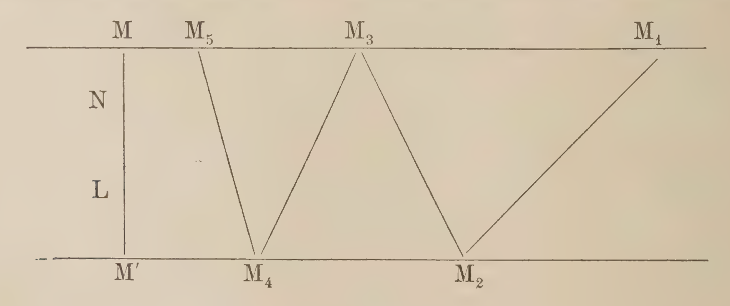
4. È manifesto che un insieme connesso, secondo la definizione data, è sempre ben concatenato, ma non si può asserire che, viceversa, ogni insieme ben concatenato sia connesso.

Ora è interessante vedere se esiste o no una relazione tra il concetto di *insieme continuo* secondo il Cantor e quello di *insieme connesso* definito a § 3.

In primo luogo il concetto di connesso non contiene quello di continuo, giacchè l'insieme dei punti di un segmento esclusi i punti estremi, l'insieme dei punti di un'area esclusi i punti del contorno, ecc... sono manifestamente insieme connessi, ma non sono continui. Tuttavia si può asserire che « un insieme connesso e chiuso è sempre un insieme continuo ».

Un insieme lineare continuo essendo formato da tutti i punti di un segmento di retta (§ 1) è manifestamente un insieme connesso, — avendosi in tal caso per le funzioni (α) di § 3 la $x_1 = t$. Ma in generale per gli insiemi a più dimensioni il concetto di continuo non contiene quello di connesso, *come l'intuizione potrebbe far credere*, ciò che è mostrato dal seguente esempio di un insieme continuo che non è connesso, secondo la definizione data a § 3.

Si considerino due rette parallele qualsivoglia e sia M M' un segmento perpendicolare ad entrambe e che le incontri nei suoi due estremi M, M'.



(*) Essendo data una linea continua λ tra due punti A e B avente un *numero finito* di punti multipli, è chiaro che, procedendo in modo analogo a quello sopra, si può sempre formare con punti della λ una nuova linea continua tra A e B non avente alcun punto multiplo. Sarebbe interessante vedere se, essendo data una qualsivoglia linea continua tra A e B avente *infiniti* punti multipli, è possibile o no in qualche modo formare con punti di essa una linea continua tra A e B priva di punti multipli. Non credo che la questione sia stata risoluta, nè sia facile risolversi.

Su le due parallele prendiamo a partire da M, M' due successioni di segmenti

$$MM_1, \quad MM_3, \quad MM_5, \ldots \quad MM_{2n-1}, \ldots$$
$$M'M_2, \quad M'M_4, \quad M'M_6, \ldots \quad M'M_{2n}, \ldots$$

misurati rispettivamente dalle due successioni di numeri

$$1, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{5}, \ldots \ \frac{1}{2n-1}, \ldots$$
$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{6}, \ldots \ \frac{1}{2n}, \ldots$$

E consideriamo nel piano l'insieme γ di punti formato dal segmento MM' e dalla successione di segmenti

$$M_1M_2, \quad M_2M_3, \quad M_4M_5, \quad M_{2n-1}M_{2n}, \ldots$$

Manifestamente tale insieme è chiuso e ben concatenato, cioè è continuo. Dico che esso non è connesso, secondo la definizione di § 3.

Infatti si prenda un punto arbitrario N sul segmento MM'. Se l'insieme γ è connesso, come supponiamo per un momento, esisteranno due funzioni (reali e ad un valore) continue $x = x(t)$, $y = y(t)$ per t variabile in un intervallo t_0T (estremi compresi), siffatte che mentre t varia da t_0 a T $[t_0 \leqq t \leqq T]$, il punto $P(x(t), y(t))$ appartenendo sempre a γ varia da $M_1(x(t_0), y(t_0))$ ad $N(x(T), y(T))$. Di più si può supporre, per ciò che abbiamo detto al § precedente, che i punti M_1 ed N corrispondano ai soli valori t_0 e T di t.

Supponiamo dunque che esistano tali funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$. L'insieme g rappresentato da esse dovendo essere un insieme continuo (§ 2) sarà formato: 1°) da tutti i segmenti $M_\nu M_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, giacchè se non contenesse tutti i punti di uno di questi segmenti, l'insieme g o non sarebbe chiuso o non sarebbe ben concatenato; e 2°) dal segmento MM' i cui punti sono punti limiti dei punti dei segmenti $M_\nu M_{\nu+2}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Dunque se esistono le funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, l'insieme g rappresentato da esse coincide coll'insieme dato γ.

Ora nella spezzata indefinita $M_1 M_2 M_3 \ldots M_\nu M_{\nu+1} \ldots$ se si considera il senso $M_1 M_2 M_3$ si ha che di due punti H, K di essa uno precede l'altro. Sia K il punto che viene dopo. Sia t'' *uno* dei parametri di K; dico che H avrà certamente un parametro $t' < t''$. Invero se si considera l'insieme g rappresentato dalle $x = x(t)$, $y = y(t)$ per t compreso tra t_0 e t'' $[t_0 \leqq t \leqq t'']$, questo insieme essendo continuo (§ 2) dovrà comprendere tutta la porzione di spezzata compresa tra il punto M_1 e il

punto K, e perciò dovrà contenere anche il punto H, il quale corrisponderà quindi necessariamente ad un parametro $t' < t''$.

Ciò posto si consideri un punto L del segmento MM' diverso da N: sia $\bar{t}$ il suo parametro massimo; avremo $\bar{t} < T$, l'eguaglianza esclusa giacchè le $x = x(t)$, $y = y(t)$ sono ad un valore. Se si dimostra che ciò è assurdo, se ne concluderà che non esistono le $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Si conducano per i punti L, N due parallele alle due rette parallele da cui siamo partiti, e si considerino le due successioni di punti

(1) $$L_1, L_2, L_3, \ldots L_\nu, \ldots,$$

(2) $$N_1, N_2, N_3, \ldots N_\nu, \ldots,$$

in cui le parallele condotte per L, N incontrano i segmenti

$$M_1 M_2, M_2 M_3, M_3 M_4, \ldots M_\nu M_{\nu+1}, \ldots;$$

tali due successioni (1), (2) hanno rispettivamente per punti limiti L, N. Ora consideriamo le due successioni formate l'una coi parametri massimi dei punti della (1), l'altra coi parametri minimi dei punti della (2)

(1') $$t_1, t_2, t_3, \ldots t_\nu, \ldots,$$

(2') $$T_1, T_2, T_3, \ldots T_\nu, \ldots;$$

È facile vedere che queste due successioni risultano entrambe crescenti ed hanno per limiti la (1') il parametro massimo $\bar{t}$ di L e la (2') il parametro T di N (*). Ma le (1'), (2') non possono avere limiti differenti, giacchè se fosse $\bar{t} < T$, cioè $\bar{t} = T - \lambda$ ove λ è un numero positivo, si dedurrebbe che in un determinato segmento $M_\nu M_{\nu+1}$ c'è un punto N_ν di parametro minimo $T_\nu > T - \frac{\lambda}{2}$, e quindi nei segmenti successivi $M_{\nu+1} M_{\nu+2}$, $M_{\nu+2} M_{\nu+3}$, ... non vi potrebbero essere dei punti aventi parametri $< T - \frac{\lambda}{2}$, ciò che è necessario affinchè la successione (1') abbia per limite $\bar{t} = T - \lambda < T - \frac{\lambda}{2}$.

(*) Invero, essendo le funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ continue, le due successioni

$$x(t_1), x(t_2), x(t_3), \ldots x(t_\nu), \ldots$$
$$y(t_1), y(t_2), y(t_3), \ldots y(t_\nu), \ldots$$

avranno per limiti rispettivamente $x(\bar{t})$, $y(\bar{t})$; e così le $x(T_\nu)$, $y(T_\nu)$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) avranno per limiti le $x(T)$, $y(T)$.

Risulta dunque escluso che esistano le due funzioni $x = x(t)$, $y = y(t)$ la cui esistenza è necessaria affinchè l'insieme γ considerato sia connesso, secondo la definizione data a § 3 (*).

Concludo che i due concetti di insieme continuo e di insieme connesso oltre ad essere differenti, non hanno tra loro alcuna relazione, cioè nessuno di essi è contenuto nell'altro.

È pure manifesto che non vi è alcuna relazione tra il concetto di connesso e quello di *semi-continuo* — insieme non chiuso, ma ben concatenato e tale che due suoi punti possono essere riuniti da un continuo (**). —

Noterò infine che si presenta la questione se non fosse forse conveniente sostituire alla definizione analitica di insieme connesso data a § 3, un'altra definizione meno restrittiva, per la quale si potesse concludere che ogni insieme continuo è anche connesso. Ma in tale questione non intendo di entrare ora, contentandomi d'averla indicata all'attenzione degli studiosi.

Bologna, maggio 1894.

EUGENIO MACCAFERRI.

(*) Come gentilmente mi suggerisce il prof. PEANO all'esempio citato di un insieme continuo non connesso si può aggiungere quest'altro: L'insieme formato dalla curva rappresentata dall'equazione

$$y = \text{sen}\frac{1}{x}$$

per x tale che $0 < |x| \leq M$, ove M è un numero positivo, e dal segmento dell'asse y compreso tra i punti di ordinate 1 e -1.

(**) CANTOR, loc. cit., pag. 407.

Lettera di E. Catalan.

Il 14 febbraio scorso moriva in Liegi, nella veneranda età di 80 anni, uno dei più illustri matematici, Eugenio Catalan, professore emerito dell'Università di Liegi, seguendo nella tomba, a brevi giorni d'intervallo, la compagna della sua vita.

Non è nostra intenzione di esaminare la lunga ed importante serie dei lavori pubblicati dal Catalan; i quali innalzarono il suo nome a sì alta fama, schiudendogli le porte delle principali Accademie e Società scientifiche, quali quelle del Belgio, di Tolosa, di Lilla, di Pietroburgo, di Torino, dei Lincei in Roma, di Amsterdam, ecc.

La sua vita fu tutta dedicata al lavoro. Ancora in gennaio di questo anno ci scriveva per indicare alcune correzioni ed aggiunte al Formulario di Matematica, le quali saranno pubblicate a suo tempo.

Per commemorare in qualche modo un tant'uomo, pubblichiamo qui una sua lettera, la quale può interessare i lettori.

(P).

Monsieur,

Je crois être d'accord avec vous sur ce premier point: bien que les mots *droite, plan, cercle*, etc. aient un sens clair, même pour les enfants, on doit, dans tout ouvrage didactique, les définir (si l'on peut). Il y a exception pour la droite. Tout le monde en a l'idée; et les définitions essayées n'y ajoutent rien. Mais voici où commence le désaccord. Vous pensez, comme M. Tannery, que cette définition: *une fraction est l'ensemble de deux nombres,* est plus satisfaisante que celle-ci: *une fraction est l'ensemble de parties égales de l'unité.* Je pense le contraire.

Revenant au premier point, j'ai si bien compris, il y a *cinquante ans* (au moins), la nécessité de *définir,* que, dans mes *Éléments de Géométrie,* (1843) j'ai défini les mots: *longueur*, *aire*, *volume*, *rapport de deux grandeurs incommensurables*, etc.; et que, dans mon petit *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre,* dont la 11[ième] édition vient de paraître, j'ai défini (et non démontré) les égalités $a \times -b = -ab$, $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$, etc.

J'ai cru devoir, également, changer la définition habituelle de $\sqrt{2}$, définition qui implique un cercle vicieux.

Ces idées, combattues d'abord, ont été adoptées depuis; à ce point qu'on s'est avisé, un beau jour, de les attribuer à M. M. DEDEKIND, CANTOR, etc. Vous pouvez, relativement à cette question, consulter le beau discours de M. Mansion, placé en tête de mes *Mélanges Mathématiques.*

Si vous pensez, Monsieur, que mes lettres puissent intéresser quelque lecteur de la *Rivista*, je vous en abandonne, bien volentier, la propriété.

Encore un mot. Dans la première page de votre intéressante ed instructive missive, vous dites: « le concept de nombre entier positif ». Croyez-vous qu'il y ait des nombres négatifs? Pour moi, je ne le crois pas. Un nombre étant le rapport des deux grandeurs (sous entendu de *même espèce*) est essentiellement positif. On doit dire: quantité négative, et non nombre *négatif*. De même, à ce qu'il me semble, *les imaginaires ne sont pas des quantités; car une imaginaire n'est, ni plus grande, ni plus petite qu'une autre.*

Je sais bien que mon opinion n'est guère partagée, même par d'illustres Géomètres; mais je suis un peu têtu.

Je voudrais, Monsieur, *comprendre* l'italien comme vous *écrivez* le français. Malheureusement ainsi que le disait Mansion, je suis un autodidacte; c'est-à-dire un *volontaire* de la science et de la littérature; le peu que je sais je l'ai appris, pour ainsi dire, dans les rues de Paris.

Perdonnez-moi cette longue lettre, fort décousue, et ayez-moi

votre dévoué vieux collègue
E. CATALAN.

Liège, 5 février 1892.

Catalogue of the University of Texas for 1893-4.

Questo Annuario di una delle più giovani e fiorenti Università degli Stati Uniti contiene informazioni non prive d'interesse per chi, dall'esame dell'organizzazione degli studi superiori in quei paesi che sotto tanti rapporti ci precedono nella via della civiltà, volesse trarre oroscopi sull'avvenire dei nostri ordinamenti universitari. Ecco alcuni particolari che mi sembrano degni d'attenzione a questo riguardo.

Per ciò che riflette la scelta dei corsi che lo studente deve frequentare in ciascun anno, è in vigore il cosìdetto *Course System*, che consiste in ciò: i corsi sono classificati secondo la loro importanza e divisi in corsi completi (*full courses*) e corsi equivalenti a due terzi o ad un terzo di corso completo (*two third courses, one third courses*): questi ultimi durano solo rispettivamente due o uno dei tre trimestri in cui è diviso l'anno scolastico (che va dal 29 settembre al 20 giugno).

Per ottenere ciascuna delle lauree alle quali gli studenti possono aspirare non occorre altro che aver frequentato regolarmente venti corsi completi o un numero equivalente tra corsi completi e corsi parziali. Così per esempio, per ottenere il grado di *Bachelor of Science*, che corrisponde alla nostra Laurea in Scienze matematiche e fisiche, lo studente deve aver frequentato:

a) Dieci corsi completi (o un numero equivalente di corsi parziali) riferentisi a qualche ramo della matematica, della fisica o delle scienze naturali.

b) Due corsi completi di lingue moderne.

c) Un corso completo di Storia o di Filosofia.

d) Altri quattro corsi su qualsiasi soggetto.

Di questi 20 corsi, solo $4\,{}^1/_3$ sono indicati come indispensabili (*prescribed*) per ottenere la laurea; quanto alla scelta degli altri e all'ordine in cui essi possono esser seguiti o distribuiti nei varî anni di studio è

lasciata piena libertà agli interessati. Spetta poi in particolare a ciascun professore d'indicare, ai giovani che intendono seguire le sue lezioni, quali sono i corsi a cui egli suppone che essi abbiano già assistito. Naturalmente si raccomanda agli studenti di procedere con cautela e dietro il consiglio dei loro professori *(with care and under advice)* alla composizione del gruppo di corsi che intendono seguire in ciascun anno. Tale gruppo non può constare di più di sei corsi completi (o d'un numero equivalente di corsi parziali) nè di meno di quattro.

L'insieme dei corsi che corrisponderebbe alla nostra facoltà di matematica viene a esser diviso in tre Sezioni o *Schools*, cioè: *School of pure mathematics* diretta dal professor Halsted, *School of Physics* diretta dal professor Macfarlane e *School of applied mathematics* (corrispondente alla nostra Scuola d'applicazione per gli Ingegneri) diretta dal professor Taylor.

Quanto alle materie che formano oggetto d'insegnamento nei corsi delle *Schools of mathematics*, due tratti caratteristici mi sembrano degni di esser segnalati:

1. Il largo posto che vi si fa a quelle parti della matematica che sono destinate a servire di strumento e di sussidio nelle ricerche di fisica e di meccanica (1).

Così, per esempio, vi è un corso speciale sui *Quaternioni* ($^2/_3$), uno (del Macfarlane $^3/_3$) sul *Calcolo geometrico (Space analysis)*: altri corsi sono dedicati all'esposizione delle opere classiche nei varî rami della Fisica matematica (la *Meccanica analitica* di Lagrange, la *Théorie de la Chaleur* di Fourier, *Electricity and Magnetism* di Clerk Maxwell).

2. Il maggior riconoscimento dell'efficacia degli studi matematici come disciplina mentale atta ad affinare e rinvigorire la mente e come necessaria preparazione intellettuale per chi voglia dedicarsi a qualunque ramo di ricerca scientifica compresi anche quelli nei quali le cognizioni acquistate nei corsi di matematica non trovano alcuna applicazione diretta. Così è fatto obbligo anche agli aspiranti alle altre lauree oltre a quelle di Scienze (cioè al grado di *Bachelor of Literature* o di *Bachelor of Arts*) di seguire $^4/_3$ di corso nella *School of pure mathematics* e un corso completo ($^3/_3$) nella *School of Physics* (2).

---

(1) Prominence is given to the practical utility of mathematics and its power as *the* instrument of scientific research.

(2) In the school of pure Mathematics special attention is given to the mental discipline of the Student. The development of intellectual powers and the formation of correct habits of thinking and reasoning are made a paramount objcet.

E allo stesso concetto parmi si debba attribuire l'istituzione di un corso speciale di *Logica matematica* (*Algebras of Logic*) e di un altro di *Storia della Matematica* (1).

G. VAILATI.

(1) Throughout the School very special attention is given to the historical development of the subject studied. Anche nelle altre Facoltà, per esempio quelle di Medicina, esistono cattedre destinate ed esporre la storia delle varie Scienze. Il professor J. M. PEIRCE, incaricato d'un corso sui *Quaternioni* e di un altro sulla *Logica matematica* nella *Harvard University* ha recentemente tradotto in inglese la *Storia della Meccanica* del MACH dell'Università di Praga (*Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, Leipzig, Brockhaus 1889) opera eccellente e che meriterebbe di esser conosciuta anche da noi. Il testo consigliato a quelli che seguono il corso di *Storia della matematica* è l'*History of mathematics* del CAJORI.

Nuove pubblicazioni.

Lezioni sulla teoria delle funzioni, dettate nella R. Università di Bologna dal Prof. S. PINCHERLE, raccolte ed ordinate da EUGENIO MACCAFERRI. — Parte I, Bologna 1893, litografata, pag. 301, L. 10.

E. MOSNAT. — *Problèmes de Géométrie analytique.* — Tome troisième: *Géométrie a trois dimensions.* Paris, Nony, 1894, pag. 400 in-8°.

FRANCESCO D'ARCAIS. — *Corso di Calcolo infinitesimale.* Vol. II: *Calcolo integrale.* Padova, Draghi, pag. XVI+693 - 1894, L. 11.

C. BURALI-FORTI. — *Logica matematica.* Manuali Hœpli, 1894, pag. VI+158, L. 1,50.

C. JORDAN. — *Cours d'Analyse de l'École Polytéchnique.* Deuxième édition. - Tome deuxième: *Calcul intégral.* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894, pag. XVIII+627.

GABRIEL ARNOUX. — *Arythmétique graphique.* Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894, pag. XXIII+175.

Sulle permutazioni relative ad una data.

Nota di GIACINTO MUSSO *a Genova.*

È noto che il numero delle permutazioni che si possono fare con n cose è dato dal prodotto

$$1 . 2 . 3 \ldots n .$$

Io designerò coi numeri $1, 2, \ldots n$, i posti rispettivi che queste n cose occupano in una qualunque di esse:

$$a, b, c, \ldots r, s, t$$

e mi propongo di determinare il numero di tutte quelle sole in cui le n cose considerate occupano un nuovo posto, diverso da quello a loro assegnato nella permutazione data. Tali permutazioni le dirò *permutazioni relative alla data,* o più brevemente *permutazioni relative.*

Nel caso per es. di 3 cose a, b, c, se si conviene, scrivendo

$$a_1, b_2, c_3$$

di dover intendere che a occupa il 1° posto, b il 2° e c il 3°, fra le possibili permutazioni che io cerco di determinare, ve ne sarà certamente una in cui b occuperà il 1° posto, e poi un'altra in cui il 1° posto sarà occupato da c. Ma fissato b al 1° posto, al 2° non potremo porre che c, e a verrà ad occupare il 3°. Fissato invece al 1° posto c, il 2° non potrà essere occupato che da a, e conseguentemente il 3° da b. In questo caso otteniamo così 2 permutazioni relative.

Ragionando in modo analogo, si troverebbe che il numero delle permutazioni relative di 4 cose è 9; che quello di 5 è 44, ecc.; e in generale, se si rappresenta con Q_n il numero delle permutazioni relative di n cose, che [1]:

$$Q_n = (n - 1)(Q_{n-1} + Q_{n-2}) .$$

---

[1] Questa formula è dovuta a Eulero. — v. Ed. Lucas, *Théorie des Nombres*. Paris, 1891, pag. 212.

Per la determinazione, però, di un tal numero, io mi propongo di seguire un'altra via, a dir vero indiretta; ma percorrendo la quale, oltre a giungere a dei risultati finali messi sotto una forma un po' differente, potremo vedere che esiste uno stretto legame fra il numero delle permutazioni relative di n cose, e quello dei termini dello sviluppo di un determinante di ordine n che non contengono a fattore nessun elemento principale.

Detti pertanto *elementi principali* di un determinante di ordine n gli n elementi che occupano la diagonale principale; e designato rispettivamente con S_n, S'_n, S''_n, S'''_n, ... $S^{(m)}_n$, il numero dei termini dello sviluppo del determinante, che contengono a fattore n, $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ... $(n-m)$, elementi principali, comincierò a questo scopo, a far vedere che si ha:

$$S_n = 1$$
$$S'_n = 0$$
$$S''_n = \Sigma\, n\, S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$
$$S'''_n = \Sigma \left\{ n\, S'_{n-1} + n(n-1)\, S_{n-2} \right\} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$
$$S^{\text{IV}}_n = \Sigma \left\{ n\, S''_{n-1} + n(n-1)\, S'_{n-2} + n(n-1)(n-2)\, S_{n-3} \right\} = \frac{3}{2}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$
$$S^{\text{V}}_n = \Sigma \left\{ n\, S'''_{n-1} + n(n-1)\, S''_{n-2} + n(n-1)(n-2)\, S'_{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)\, S_{n-4} \right\} = \frac{11}{6}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5}$$

. . . .

e in generale:

$$S^{(m)}_n = \Sigma \left\{ n\, S^{(m-2)}_{n-1} + n(n-1)\, S^{(m-3)}_{n-2} + \ldots + n(n-1)\ldots(n-m+5)\, S''_{n-m+4} + n(n-1)\ldots(n-m+4)\, S''_{n-m+3} + n(n-1)\ldots(n-m+3)\, S'_{n-m+2} + n(n-1)\ldots(n-m+2)\, S_{n-m+1} \right\}.$$

Che nello sviluppo di un determinante di ordine n non vi possa essere che un solo termine che contiene a fattore tutti gli elementi principali è evidente: comincierò quindi a far vedere che in esso sviluppo non vi può essere alcun termine che li contiene a fattore tutti meno uno.

Basta perciò osservare che si ottengono tutti i $n!$ termini dello sviluppo, permutando in tutti i modi possibili le n lettere, o gli n indici di uno qualunque di essi, per es.:

$$a_1\, b_2\, c_3 \ldots r_{n-2}\, s_{n-1}\, t_n$$

e che la più semplice permutazione è quella di cambiare fra loro due indici o due lettere. Si vede allora che se il termine precedentemente scritto è composto di soli elementi principali, sarà impossibile ottenerne altri che contengono a fattore $(n-1)$ di tali elementi.

Dopo ciò sarebbe facile calcolare il numero dei termini dello sviluppo che contengono a fattore $(n-2)$ elementi principali, perchè nel termine

$$a_1\, b_2\, c_3 \ldots r_{n-2}\, s_{n-1}\, t_n$$

composto di soli elementi principali noi potremo permutare fra loro l'indice 1 cogli $(n-1)$ restanti e ottenere $(n-1)$ termini di quelli che si cercano; l'indice 2 cogli indici $3, 4, \ldots (n-1), n$, e ottenerne altri $(n-2)$; poi l'indice 3 cogli indici $4, 5, \ldots (n-1), n$, e ottenerne ancora $(n-3)$, ecc., finalmente l'indice $(n-1)$ coll'indice n, e ottenerne *un* solo. In totale:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}\ ;$$

quanti cioè abbiamo annunciato doverne esistere.

Ma invece di procedere per questa via che in seguito non è più così semplice, cercherò di calcolare un tal numero per mezzo di considerazioni un po' diverse, le quali ci permettono di pervenire similmente a trovare il numero dei termini che nello sviluppo del determinante contengono a fattore $(n-3)$, $(n-4)$, ... $(n-m)$, elementi principali.

Essendo $n > r \geqq s$, definiremo con $\Delta_{r,s}$ un determinante di ordine r, facente parte dello sviluppo di uno di ordine n, e contenente fra i suoi r^2 elementi e nella sua diagonale principale *soltanto* s di quelli che nel determinante di ordine n summenzionato (e che per analogia dovremo indicare con $\Delta_{n,n}$) occupavano la diagonale analoga. Allora se adoperiamo le notazioni generiche e_{P} ed e_{N} per indicare rispettivamente gli elementi che *sono* e *non sono principali* nel determinante $\Delta_{n,n}$, quando si sviluppa quest'ultima secondo gli elementi di una qualunque delle sue linee, o una qualunque delle sue colonne, avremo evidentemente:

$$(a) \qquad \Delta_{n,n}=e_{\mathrm{P}}\,\Delta_{n-1,n-1}+(n-1)\,e_{\mathrm{N}}\,\Delta_{n-1,n-2}\,,$$

e siccome si è indicato con S''_n il numero dei termini dello sviluppo che contengono a fattore $(n-2)$ elementi principali, è facile vedere che si avrà:

$$(\mathrm{I}) \qquad S''_n=S''_{n-1}+(n-1)\,;$$

perchè essendo e_P elemento principale, il 1° termine del 2° membro della (a) ci darà tanti termini dello sviluppo aventi a fattore $(n-2)$ elementi principali, quanti ne contiene nel suo sviluppo il determinante $\Delta_{n-1,n-1}$, aventi però a fattore soltanto $(n-3)$ elementi principali; ed essendo e_N elemento non principale, e $\Delta_{n-1,n-2}$ un determinante di ordine $(n-1)$ i cui elementi della sua diagonale principale sono tutti principali eccettuato uno, ad ogni prodotto $e_N \Delta_{n-1,n-2}$, noi non otteniamo che un solo termine avente a fattore $(n-2)$ elementi principali: quello cioè che proviene dal prodotto degli elementi della diagonale principale nel determinante $\Delta_{n-1,n-2}$.

Ma: $S_{n-2} = 1$, epperciò potremo ancora scrivere:

$$S''_n = S''_{n-1} + (n-1) S_{n-2};$$

ossia, cambiando n in $n+1$:

$$S''_{n+1} = S''_n + n S_{n-1}.$$

Quest'ultima, integrata ci dà:

$$S''_n = \Sigma n S_{n-1} + C = \frac{n(n-1)}{2} + C;$$

e la costante essendo nulla, come si può scorgere dando ad n un valore particolare, avremo finalmente:

$$(1) \qquad S''_n = \Sigma n S_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{c. d. d.}$$

Vedremo ora, che si può determinare con un ragionamento analogo il numero dei termini dello sviluppo del determinante, che contengono a fattore $(n-3)$ elementi principali.

Passiamo anzitutto a stabilire una relazione analoga alla (a). Supposto che il determinante Δ abbia nella sua diagonale principale un elemento non principale, sviluppandolo secondo gli elementi della linea o della colonna che concorrono nel medesimo si ha:

$$(b) \qquad \Delta_{n,n-1} = e_N \Delta_{n-1,n-1} + (n-1) e_N \Delta_{n-1,n-2}.$$

Dopo ciò, siccome avremo similmente:

$$\Delta_{n-1,n-2} = e_N \Delta_{n-2,n-2} + (n-2) e_N \Delta_{n-2,n-3}$$

la (a) diventerà per sostituzione:

$$(a') \quad \Delta_{n,n} = e_P \Delta_{n-1,n-1} + (n-1) e_N e_N \Delta_{n-2,n-2} + (n-1)(n-2) e_N e_N \Delta_{n-2,n-3}$$

e da quest'ultima, siccome abbiamo indicato con S'''_n il numero dei

termini dello sviluppo che contengono a fattore $(n-3)$ elementi principali, è facile ricavare la relazione:

(II) $$S'''_n = S'''_{n-1} + (n-1)(n-2);$$

perchè basta osservare: anzitutto, che essendo e_P elemento principale, il 1° termine del 2° membro della (a') ci deve dare tanti termini dello sviluppo aventi a fattore $(n-3)$ elementi principali, quanti ne contiene nel suo sviluppo il determinante $\Delta_{n-1,n-1}$, aventi però a fattore $(n-4)$ elementi principali; poi, che essendosi dimostrato che un determinante di ordine n, non contiene nel suo sviluppo nessun termine avente a fattore $(n-1)$ elementi principali, il determinante $\Delta_{n-2,n-2}$ non ce ne fornisce nessuno; e finalmente che il determinante $\Delta_{n-2,n-3}$ non ce ne fornisce che uno solo: quello cioè proveniente dal prodotto degli elementi della diagonale principale.

Ma sappiamo che:

$$S'_{n-1} = 0; \; S_{n-3} = 1;$$

epperciò la (II) potremo scriverla anche così:

$$S'''_n = S'''_{n-1} + (n-1) S'_{n-2} + (n-1)(n-2) S_{n-3}$$

ossia, cambiando n in $n+1$:

$$S'''_{n+1} = S'''_n + n S'_{n-1} + n(n-1) S_{n-2}.$$

Quest'ultima, integrata ci dà:

$$S'''_n = \Sigma \left\{ n S'_{n-1} + n(n-1) S_{n-2} \right\} + C = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + C$$

e la costante essendo nulla, avremo finalmente:

(2) $$S'''_n = \Sigma \left\{ n S'_{n-1} + n(n-1) S_{n-2} \right\} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Come si sarà già potuto osservare, nello stesso modo che coll'aiuto della (b) noi abbiamo potuto, per via ricorrente, ridurre la (a) alla (a'), potremo ora trasformare la (a') in un'altra relazione che diremo (a''). Avremo cioè:

(a'') $$\Delta_{n,n} = e_P \Delta_{n-1,n-1} + (n-1) e_N e_N \Delta_{n-2,n-2} + (n-1)(n-2) e_N e_N e_N \Delta_{n-3,n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) e_N e_N e_N \Delta_{n-3,n-4},$$

dalla quale si deduce:

(III) $$S^{IV}_n = S^{IV}_{n-1} + (n-1)\frac{(n-2)(n-3)}{2} + (n-1)(n-2)(n-3)$$

o anche:

$$S^{IV}_n = S^{IV}_{n-1} + (n-1)S''_{n-2} + (n-1)(n-2)S'_{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)\,S_{n-4}$$

Cambiando poi n in $n+1$:

$$S^{IV}_{n+1} = S^{IV}_n + n\,S''_{n-1} + n\,(n-1)\,S'_{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,S_{n-3}$$

e integrando:

$$(3) \qquad S^{IV}_n = \Sigma\left\{n\,S''_{n-1} + n\,(n-1)\,S'_{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,S_{n-3}\right\} = \frac{3}{2}\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{4};$$

la costante essendo nulla.

Continuando si avrebbe:

$$(IV) \qquad S^{V}_n = S^{V}_{n-1} + (n-1)\frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{3} + (n-1)\,(n-2)\frac{(n-3)\,(n-4)}{2} + (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4);$$

o anche:

$$S^{V}_{n+1} = S^{V}_n + n\,S'''_{n-1} + n\,(n-1)\,S''_{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,S'_{n-3} + n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,S_{n-4}$$

e integrando:

$$(4) \qquad S^{V}_n = \Sigma\left\{n\,S'''_{n-1} + n\,(n-1)\,S''_{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,S'_{n-3} + n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,S_{n-4}\right\} = \frac{11}{6}\,\frac{n\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5};$$

ecc.; e in generale è facile vedere che sussisterà l'equazione alle differenze:

$$(R) \qquad S^{(m)}_n = S^{(m)}_{n-1} + (n-1)S^{(m-2)}_{n-2} + (n-1)\,(n-2)\,S^{(m-3)}_{n-3}(n-1)(n-2)(n-3)\,S^{(m-4)}_{n-4} + \ldots + (n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+4)\,S'''_{n-m+3} + (n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+3)\,S''_{n-m+2} + (n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+2)\,S'_{n-m+1} + (n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+1)\,S_{n-m}$$

perchè, se si suppone di voler determinare il numero $S^{(m)}_n$ dei termini che nello sviluppo di una determinante di ordine n contengono a fattore $(n-m)$ elementi principali, dalla relazione:

$$(a^{(m-2)}) \qquad \Delta_{n,n} = e_P\,\Delta_{n-1,n-1} + (n-1)\,e_N\left[e_N\,\Delta_{n-2,n-2} + (n-2)\,e_N\left(e_N\,\Delta_{n-3,n-3} + \ldots + (n-m+3)\,e_N\left\{e_N\,\Delta_{n-m+2,n-m+2} + (n-m+2)\,e_N\left(e_N\,\Delta_{n-m+1,n-m+1} + (n-m+1)\,e_N\,\Delta_{n-m+1,n-m}\right)\right\}\ldots\right)\right]$$

che si otterrebbe dalla (a'') per successive sostituzioni, in cui è d'uopo applicare la formola (b), si scorge che:

ep $\Delta_{n-1,n-1}$; $\Delta_{n-2,n-2}$; $\Delta_{n-3,n-3}$; ... $\Delta_{n-m+2,n-m+2}$; $\Delta_{n-m+1,n-m+1}$; $\Delta_{n-m+1\,.\,n-m}$ ci dànno rispettivamente $S^{(m)}_{n-1}$, $S^{(m-2)}_{n-2}$, $S^{(m-3)}_{n-3}$, ... S''_{n-m+2}, S'_{n-m+1} e S_{n-m} dei termini che cerchiamo.

Dalla (R), dopo aver cambiato n in $n+1$ si ha per l'integrazione:

$$(r) \qquad S^{(m)}_{n} = \Sigma \{ n\, S^{(m-\ )}_{n-1} + n(n-1)\, S^{(m-3)}_{n-2} + \dots n(n-1)\dots(n-m+5)\, S'''_{n-m+4} + n(n-1)\dots(n-m+4)\, S''_{n-m+3} + n(n-1)\dots(n-m+3)\, S'_{n-m+2} + n(n-1)\dots(n-m+2)\, S_{n-m+1} \} ;$$

la costante essendo nulla (1).

Abbiamo così delineata la via da percorrere per determinare il numero dei termini dello sviluppo di un determinante di ordine n, che contengono a fattore $(n-2)$, $(n-3)$ ... $(n-m)$, elementi principali. Ma conformemente a quanto si è già lasciato intravvedere in principio noi possiamo calcolare altrimenti un tal numero. E poichè, come si vedrà in seguito, lo troveremo espresso in funzione di quello delle permutazioni relative, dal confronto delle sue due espressioni potremo ottenere quest'ultimo.

---

(1) I simboli S_n, S'_n, S''_n, S'''_n, ... $S^{(m)}_n$ sono stati definiti per i casi in cui $n \geq 2$ e $m < n$.

Ora, siccome i primi membri delle equazioni alle differenze:

$$S''_n = S''_{n-1} + (n-1)\, S_{n-2}$$
$$S'''_n = S'''_{n-1} + (n-1)\, S'_{n-2} + (n-1)(n-2)\, S_{n-3}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S^{(m)}_n = S^{(m)}_{n-1} + (n-1)\, S^{(m-2)}_{n-2} + \dots$$

conserverebbero ancora un senso ben determinato, quando si facesse rispettivamente $n=2, 3, \dots m$, mentre cesserebbero di averne i secondi; occorre estendere tali definizioni ai casi in cui $n=0$, $n=1$, e $m>n$.

Converremo perciò che $S_n = 1$ e $S'_n = 0$, non solo per tutti i valori di $n \geq 2$, ma anche per i valori 0 e 1 di n; e che $S^{(m)}_n = 0$ per tutti i valori di $m > n$.

Queste convenzioni giovano per concludere in modo facile che tutte le costanti provenienti dall'integrazione delle equazioni alle differenze sono nulle.

Osservo da ultimo che i simboli precedenti potrebbero ancora definirsi per i valori negativi di n, ma mi dispenso dal farlo, non occorrendo al nostro scopo.

Si è già osservato che un determinante di ordine n contiene tanti termini nel suo sviluppo, quante sono le permutazioni che possono farsi con n cose; o in altri termini, che se:

$$a_1 b_2 c_3 \dots r_{n-2} s_{n-1} t_n$$

è un termine dello sviluppo di un determinante di ordine n, si ottengono tutti gli altri permutando in tutti i modi le lettere, e tenendo fermi gli indici; oppure permutando in tutti i modi gli indici, e tenendo ferme le lettere.

Noi supporremo per es. di permutare in tutti i modi gli indici; e di più che il termine precedentemente scritto sia tutto composto di elementi principali. Allora è evidente che il numero dei termini dello sviluppo del determinante aventi a fattore $(n-2)$ elementi principali, sarà uguale al numero delle combinazioni degli n elementi principali precedenti $(n-2)$ a $(n-2)$, moltiplicato per quello delle permutazioni relative di 2 cose. Indicando, per brevità, quest'ultimo numero colla lettera α, avremo

$$(1') \qquad S''_n = \alpha \frac{n(n-1)}{2!}.$$

Similmente, il numero dei termini dello sviluppo del determinante, aventi a fattore $(n-3)$ elementi principali, sarà uguale al numero delle combinazioni degli n elementi principali $(n-3)$ a $(n-3)$, moltiplicato per quello delle permutazioni relative di 3 cose; e se indichiamo quest'ultimo numero con β, avremo:

$$(2') \qquad S'''_n = \beta \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.$$

Si otterrebbe analogamente una nuova espressione per S^{IV}_n, S^{V}_n, ...; e cioè:

$$(3') \qquad S^{IV}_n = \gamma \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$(4') \qquad S^{V}_n = \delta \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

. . . .

e dal confronto delle (1) e (1'); (2) e (2'); (3) e (3'); (4) e (4'); ... si determineranno i valori di α, β, γ, δ, ... Si trova:

$$\alpha = 1, \ \beta = 2, \ \gamma = 9, \ \delta = 44, \ \dots$$

Ricordando la relazione di ricorrenza espressa dalla formula (r),

possiamo concludere la seguente regola pratica per determinare il numero delle permutazioni relative:

Il numero delle permutazioni relative di 2, 3, 4, 5, ... cose è uguale rispettivamente ad 1, 2, 3, 4, ... volte i numeratori delle frazioni seguenti:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{53}{24}, \frac{309}{120}, \dots$$

Infatti si ha:

$$1 = \frac{1}{1};\ 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6};\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{53}{24};$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{8} + \frac{11}{30} = \frac{309}{120}, \dots$$

Tali frazioni sono legate da relazioni ricorrenti. Ponendo:

$$1 + \frac{1}{2} = A_4;\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = A_5;$$

se si indica la successiva frazione con A_6, avremo:

$$A_5 + \frac{A_4}{4} = A_6$$

onde A_6 rimane espressa in funzione delle due frazioni che precedono.

Avremo ancora similmente [1]:

$$A_6 + \frac{A_5}{5} = A_7;\ A_7 + \frac{A_6}{6} = A_8;\ A_8 + \frac{A_7}{7} = A_9;\ \dots$$

Riguardo alle permutazioni relative possiamo ancora enunciare il seguente teorema:

Il numero delle permutazioni relative di n cose eguaglia quello dei termini dello sviluppo di un determinante di ordine n, che non contengono a fattore nessun elemento principale.

---

[1] Se indichiamo rispettivamente con $a_4, a_5, a_6, \dots$ i numeratori delle frazioni $A_4, A_5, A_6, \dots$ potremo scrivere:

$$A_4 = \frac{a_4}{2!};\ A_5 = \frac{a_5}{3!};\ A_6 = \frac{a_6}{4!};\ \dots$$

e se $Q_4, Q_5, Q_6, \dots$ sono i numeri delle permutazioni relative di 4, 5, 6, ... cose, avremo altresì:

$$Q_4 = 3\,a_4;\ Q_5 = 4\,a_5;\ Q_6 = 5\,a_6;\ \dots$$

Per la legge di ricorrenza che governa le frazioni $A_4, A_5, A_6, \dots$ sarà poi:

$$A_6 = \frac{a_5}{3!} + \frac{a_4}{2!}\,\frac{1}{4};\ A_7 = \frac{A_6}{4!} + \frac{a_5}{3!}\,\frac{1}{5};\ \dots$$

Per dimostrarlo consideriamo una permutazione qualunque delle n lettere $a, b, c, \dots r, s, t$

$$a_1 b_2 c_3 \dots r_{n-2} s_{n-1} t_n .$$

Noi potremo supporla formata cogli elementi principali di un determinante di ordine n, in quanto si è collocato a al 1° posto; b al 2°; c al 3°; ecc. ... Ma siccome per ottenere da essa una permutazione relativa qualunque, noi dobbiamo, per definizione, permutare le lettere $a, b, c, \dots r, s, t$, in modo tale che nessuna venga ad occupare il posto che prima le era assegnato, possiamo evidentemente concludere che dopo un tale cambiamento, le lettere $a, b, c \dots r, s, t$, cessano di essere elementi principali.

A simile risultato si poteva pervenire, del resto, ricorrendo alle formule trovate.

Basta infatti fare nelle (1), (2), (3), (4), ... rispettivamente $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, ... e si ottiene:

$$S''_2 = 1 ; \; S'''_3 = 2 ; \; S^{IV}_4 = 9 ; \; S^{V}_5 = 44 ; \dots$$

Ne segue come corollario che *ogni determinante di ordine n il quale ha la sua diagonale principale formata di n zeri, contiene tanti termini nel suo sviluppo quante sono le permutazioni relative di n cose* [1].

Terminerò questo mio lavoro facendo cenno di una nota del signor

---

e in generale

$$A_n = \frac{a_{n-1}}{(n-3)!} + \frac{a_{n-2}}{(n-4)!} \frac{1}{n-2}$$

ossia:

$$(n-3)!\, A_n = a_{n-1} + (n-3)\, a_{n-2} \frac{1}{n-2} .$$

Ma:

$$(n-3)!\, A_n = \frac{A_n}{n-2}$$

epperciò:

$$a_n = (n-2)\, a_{n-1} + (n-3)\, a_{n-2}$$

ossia:

$$Q_n = (n-1)(Q_{n-1} + Q_{n-2}) .$$

Questa è la formula di Eulero.

[1] Questo teorema è implicitamente contenuto nella formula:

$$F^{(0)} = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

del signor J. WEYRAUCH, *Giorn. di Crelle*, vol. 74, pag. 273, la quale ci fornisce il numero dei termini dello sviluppo di un determinante di ordine n, avente la diagonale principale formata di n zeri, perchè si ha, indicando

C. A. Laisant [1], nella quale vien trattato un problema analogo a quello che mi sono proposto, ma più generale. Presi in considerazione n oggetti a, b, c, ... l, e supposto che si sia formato il prospetto di tutte le permutazioni tali che il 1° rango, il 2°, ecc., non possano essere occupati in ciascuna di esse che da certi di questi oggetti, in essa l'A. si propone di determinare il numero di queste permutazioni.

Designando con $a_1\ b_1\ c_1$ ... gli oggetti che possono occupare il 1° rango; con $a_2\ b_2\ c_2$ ... quelli che possono occupare il 2°; ecc., e posto: $(a_1+b_1+c_1+\ldots)(a_2+b_2+c_2+\ldots)\ldots(a_n+b_n+c_n+\ldots)=\mathrm{F}(a, b, c \ldots l)$ essendo F una funzione intera, omogenea e del grado n delle variabili a, b, c, ... l, egli dimostra che il numero X delle permutazioni che si è proposto di determinare è dato da

$$\mathrm{X}=\frac{\partial^n \mathrm{F}(a, b, c \ldots l)}{\partial a\, \partial b\, \partial c \ldots \partial l}.$$

Genova, 24 febbraio 1894.

---

il 2° membro con ψ_n (v. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig, 1881, pag. 40)

(*) $$\psi_n = n\,\psi_{n-1} + (-1)^n$$

da cui:

$$\psi_{n+1} = n\,(\psi_n + \psi_{n-1})$$

che è la formola data da Eulero per il numero delle permutazioni relative.

Il sig. Weyrauch (l. c.) dà ancora altre formule, fra le quali una per il numero dei termini dello sviluppo di un determinante, che contengono m elementi principali a fattori, e cioè:

$$\mathrm{F}^{(m)}=(n-m)!\binom{n}{m}\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right].$$

Siccome però potremo anche scrivere, per le notazioni precedenti:

$$\mathrm{F}^{(m)}=\binom{n}{m}\psi_{n-m}$$

e cambiando m in $n-m$:

$$\mathrm{F}^{(n-m)}=\binom{n}{n-m}\psi_m$$

si vede che la formula del sig. Weyrauch non differisce in sostanza, in ogni caso particolare, da quelle che io ho indicato con (1'), (2'), (3'), ...

Infatti le α, β, γ ... rappresentano in quest'ultime i numeri delle permutazioni relative ad una data di 2, 3, 4 ... cose; e in quella del signor Weyrauch, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ... i numeri dei termini dello sviluppo di determinanti di 2°, 3°, 4°, ... ordine, aventi la diagonale principale formata di zeri. Ma questi numeri sono rispettivamente uguali.

[1] Comptes Rendus, 2° sem. 1891, pag. 1047.

Un precursore della Logica matematica.

Nel II vol. delle *Miscellanea Taurinensia* (*) pubblicato nell'anno 1761, (parte 3ª, pag. 46-63) trovasi un lavoro di Ludovico Richeri, col titolo: *Algebrae philosophicae in usum artis inveniendi, specimen primum.*

L'A. tenta risolvere il celebre problema di Leibniz; perciò indica con segni speciali i varii enti che compaiono in logica e metafisica; cioè il possibile e l'impossibile, il tutto e il nulla, il determinato e l'indeterminato, il sì e il no, il necessario e il contingente ... È a notarsi che i segni pel *tutto* e *nulla* sono rispettivamente $\cup$ e $\cap$, e di ben poco diversificano da quelli del formulario di Matematica.

Le idee dell'A. sono profonde, ed egli spera ottenere notevoli risultati; dice a pag. 59:

« ... Combinationes principaliores speciminis ergo indicamus; cœteras iisdem insistens principiis quisque inveniet, et non sine voluptate simplicissimam fœcunditatem experietur, quemadmodum ex secundo specimine constabit, ubi, Deo dante, algebræ philosophicæ theoriam omnem, et ejus applicationes tentabimus, et tum demum de arte inveniendi universalissima judicium erit. »

Ma questa seconda parte non è comparsa. E in questa prima l'A. non seppe ancora liberarsi dalla metafisica; questo lavoro si deve considerare come un semplice tentativo. Le sole proposizioni appartenenti al formulario di Matematica che trovansi nella memoria dell'A. sono

$$a \cap - a = \Lambda \quad , \quad a \cup - a = \mathrm{V} .$$

(P.)

(*) Come è noto, esso è il titolo della pubblicazione periodica fondata da Lagrange, Cigna, ..., che assunse più tardi il nome di « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino ».

Pensiero matematico moderno.

Conferenza tenuta dal prof. Simone Newcomb *all'adunanza annuale della Società Matematica di New-York il giorno 28 dicembre 1893. — Versione dall'inglese, cortesemente concessa dall'autore, di* Ottavio Zanotti Bianco.

Chi, al pari di me, non è matematico nel senso moderno, sente naturalmente di doversi in qualche modo giustificare d'aver accettato l'invito col quale questa Società mi ha onorato, d'intrattenerla intorno ad un argomento matematico. Forse una giustificazione adeguata potrebbe trovarsi nella considerazione, che chi non si è profondamente addentrato in nessuno dei problemi contemporanei delle matematiche, ma che, come uno studente, ha avuto sufficiente passione per il soggetto da tenersi informato del corso generale del pensiero in esso, può prendere tale generale veduta che sia appropriata alla presente occasione. Io vi domanderò pertanto di considerare alcuni paragoni fra i modi di pensare sopra soggetti matematici del giorno d'oggi, e quei metodi che giunsero a noi dal passato, coll'intendimento di accennare in qual direzione stia il progresso, e quale sia il significato della ricerca matematica del tempo presente.

Fra le varie letture della mia gioventù fuvvi un'istoria dell'Europa moderna, che finisce con una rivista generale del progresso nelle arti, nelle scienze e nella letteratura e con un tentativo di previsione dell'avvenire di esse. Per quanto io ne posso giudicare, quell'opera fu scritta intorno al tempo di Eulero o Lagrange. Sull'argomento delle matematiche la conclusione dell'autore era che l'investigazione fruttifera pareva terminata, e che vi era poca prospettiva di brillanti scoperte nel futuro. A noi, un secolo dopo, questo giudizio potrebbe sembrare un esempio del pericolo di far profezie, e condurci a riguardare l'autore come uomo troppo propenso ad affrettate conclusioni. Può darsi tuttavia che un'analisi accurata conduca a ritenere le vedute dell'autore per meno avventate di quel che possano sembrare ora. Possiamo noi non dire, che nella speciale direzione, e lungo le speciali vie battute dall'indagine matematica un secolo fa, non si son fatte scoperte vera-

mente brillanti? Possiamo noi realmente dire che il campo di lavoro di Eulero, fu, dopo il suo tempo, largamente esteso? Dei grandi problemi che eludevano l'abilità degli antichi geometri, comprendendovi la quadratura del circolo, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, non ne risolvemmo pur uno. Il nostro solo progresso nel trattarli è stato di mostrare che essi sono insolubili. Al problema dei tre corpi non abbiamo aggiunto un solo degli integrali necessari alla completa soluzione. Il nostro calcolo integrale elementare è vecchio di due secoli. Per l'equazione generale del quinto grado solo mostrammo che non esiste soluzione alcuna. Senza dubbio, noi risolviamo molti dei problemi che i Bernoulli ed i loro contemporanei si divertivano a proporsi a vicenda, molto meglio di quello che essi abbiano fatto; ma, dopo tutto, potremmo noi toccare a qualche soluzione che fosse oltre i loro poteri? Io parlo con qualche diffidenza su questo punto, ma mi sembra che il progresso si verificò risalendo ai principii elementari, per partirne ad esaminare tutto il campo della ricerca matematica da un piano più elevato di quello sul quale stavano i nostri predecessori, piuttosto che continuando sulle loro traccie.

Noi possiamo illustrare questo passaggio a nuovi modi di pensare paragonando la dottrina di Euclide della ragione e proporzione colla nostra. Nessuno discute la bellezza od il rigore del procedimento, per mezzo del quale Euclide svolse questa dottrina nel suo libro quinto e l'applicò alla teoria dei numeri nel suo libro settimo. Ma possiamo noi trattenerci dal compiangere i nostri avi, che dovevano imparare le proposizioni complesse e le ponderose dimostrazioni del quinto libro, del quale noi possiamo scrivere in un sol foglio di carta tutti i procedimenti ed i risultati? Come disciplina mentale lo studio era eccellente; ma sembra appena possibile che si potesse rammentare le proposizioni ed i metodi di dimostrarle, se non se ne avesse altra conoscenza all'infuori di quella ricavata dall'opera stessa. Quando noi esaminiamo attentamente queste proposizioni, noi troviamo che, mentre Euclide riconosceva il fatto che, di due rapporti, uno potrebbe essere maggiore, minore od uguale di un altro, tuttavia egli non li riguardò mai come quantità, che potevano essere usate come operandi. Da questo punto di vista una ragione era sempre una relazione, ed una relazione non può esistere senza due termini.

Nell'accennare a questa complessità della dottrina di Euclide, non voglio si creda che io accetti il modo poco rigoroso in cui la dottrina in questione è d'ordinario svolta nei nostri trattati moderni. Ciò che noi dovremmo aver di mira si è di sostituire i metodi di Euclide con quelli che spettano alla matematica moderna. Oggidì noi intendiamo che una relazione fra due enti qualsivoglia della medesima specie

può sempre essere ridotta ad un solo termine, ad essa sostituendo un operatore la cui funzione sia di cambiare uno di questi enti nell'altro. Nel caso della relazione fra due linee, considerate semplicemente come quantità ad una dimensione, la qual relazione si chiama un rapporto, noi riguardiamo il rapporto come un fattore numerico o multiplo, che operando sopra una linea la cambia nell'altra. Ad esempio, quella relazione che Euclide avrebbe espressa dicendo che due linee stavano l'una all'altra come 5 a 2, ovvero che due volte una linea era uguale a cinque volte l'altra, noi esprimeremmo ora col dire che se noi moltiplicassimo una delle linee per due e mezzo, noi otterremmo l'altra. Questo potrebbe apparire semplice differenza di parole, ma è molto di più. È semplificazione di idee; è sostituzione di un sol concetto a due. Per esprimere una relazione occorrevano ad Euclide due termini; a noi ne basta uno.

Ma ciò non è la sola semplificazione. Una particolarità della nostra matematica moderna è che gli operatori medesimi sono riguardati come oggetti indipendenti di ragionamento; suscettibili di divenire operandi senza specificazione delle loro peculiari qualità come operatori. Così, in luogo di considerare il rapporto che io ho testè menzionato come un'operazione di moltiplicare una linea per due e mezzo, noi la riduciamo per ultimo alla semplice quantità due e mezzo, che noi possiamo concepire rimanga inerte finchè noi la portiamo all'attività come un moltiplicatore. Esso così assume una forma concreta capace di essere maneggiata nel pensiero, e di essere operata come se fosse una cosa distinta.

Questo esempio può offrire come un punto di partenza per un'illustrazione più larga del modo in cui noi abbiamo esteso i concetti che stanno a base del pensiero matematico. Prendiamo a riflettere sulla relazione fra una linea retta che parte da un punto, ed un'altra linea di eguale lunghezza partente dal punto medesimo, ma ad angolo retto colla prima. Se questa relazione fosse stata proposta ad Euclide come argomento a studiarsi, egli avrebbe probabilmente risposto, che quantunque molto più semplice di quelle intorno a cui si occupava, egli non poteva scorgervi nulla di fruttifero, e non avrebbe tratto da essa alcuna conclusione. Ma se poi proseguiamo a riflettere, troveremo davanti a noi un vasto campo, comprendente il primo concetto di gruppi; e con esso una parte importante delle nostre matematiche moderne. In conformità al principio già prestabilito, noi sostituiamo alla relazione fra queste due rette un'operatore che muterà la prima nella seconda. Noi definiamo quest'operatore dicendo che la sua funzione è di girare una retta di un angolo retto in un piano fisso che la contiene. Questa definizione permette di applicare l'operatore in

questione ad ogni linea nel piano. Applichiamola pertanto due volte di seguito alla stessa retta. Il risultato sarà una retta volgentesi alla direzione opposta a quella della originale. Una terza operazione la porterà di nuovo ad angolo retto dalla parte opposta alla seconda posizione; ed una quarta la ricondurrà alla sua posizione originale; il risultato essendo di portarla attorno di un circolo completo. Se ora noi consideriamo le operazioni che sarebbero state equivalenti a queste, una, due, tre, quattro rivoluzioni di un angolo retto come quattro operatori separati, noi vediamo che il loro risultato sarà o di lasciare la retta nella sua posizione originale, o di muoverla ad una di tre posizioni definite. Se quindi noi ripetiamo una di queste quattro operazioni tante volte quante ne piace, od in qualsiasi ordine vogliamo, noi unicamente condurremo la retta ad una delle quattro posizioni in questione. Così noi abbiamo un gruppo del quarto ordine, dotato della proprietà che la ripetizione di due qualunque delle operazioni del gruppo è equivalente a qualche unica operazione di esso.

Appena occorre che io richiami l'attenzione all'analogia famigliare fra queste operazioni e moltiplicazioni successive per l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$. Quest'ultima considerata come un moltiplicatore è fornita delle stesse proprietà del nostro operatore ruotante. Ripetuta due volte muta il segno o la direzione della quantità sulla quale opera; ripetuta quattro volte la riconduce al suo valore originale.

Noi abbiamo in tutti questi casi un'illustrazione molto semplice di una legge del pensiero, l'applicazione della quale forma la base di una parte importante della ricerca matematica moderna. La si può chiamare la legge di omologia. Io non sono certo di saperla definire rigorosamente, ma io credo che la si possa esprimere ad un dipresso come segue: Se abbiamo due classi di enti A e B, tali che ad ogni ente di una classe corrisponda un ente dell'altra, e ad ogni relazione fra due qualunque di una classe corrisponda una relazione fra i corrispondenti due dell'altra, allora tutto il discorso, il ragionamento, le conclusioni riguardanti l'una classe potranno essere applicati all'altra classe. Noi possiamo, naturalmente, estendere la legge a una corrispondenza fra cose o concetti, e simboli od altre forme di linguaggio.

Io penso che questa legge sia più universale che a primo aspetto appaia. Non solamente il progresso, ma l'esistenza stessa della nostra razza dipende dalla coordinazione fra i nostri processi mentali ed i processi dell'universo esterno, che fu gradatamente portata innanzi dall'attrito fra l'uomo e la natura attraverso innumerevoli generazioni. Un uomo è perfetto, potente, efficace quanto più il suo modo di rappresentarsi la natura è in armonia coi processi della natura stessa; ogni

processo di natura avendo la sua immagine nel pensiero, e *viceversa*. Ora, il linguaggio consiste nel coordinamento fra parole ed idee. Così noi passiamo dalla natura a ciò che vi corrisponde nel pensiero, e dal pensiero a ciò che vi corrisponde nel linguaggio, e così poniamo in azione una corrispondenza fra il linguaggio e la natura.

La ricerca scientifica moderna offre molti esempi dell'applicazione di questa legge che sarebbero meravigliosi, se non fossero così famigliari. Noi siamo così avvezzi alla predizione di un'ecclisse, che non vediamo in essa alcuna filosofia. E tuttavia non potrebbe un essere molto intelligente di un'altra sfera scorgere alcun che di meraviglioso nel fatto che con un metodo di tracciare simboli colla penna e l'inchiostro sulla carta, e di combinarli secondo certe semplici regole, è possibile di predire con certezza infallibile che l'ombra della luna in un dato giorno, ad una data ora e dato minuto, passerà sopra un determinato luogo della superficie della Terra. Certamente quell'essere potrebbe domandare con sorpresa come si possa ottenere un tale risultato. La nostra risposta sarebbe semplicemente questa: Vi è una corrispondenza da uno ad uno fra i simboli che il matematico traccia sulla sua carta e le leggi di movimento dei corpi celesti. Questi simboli incorporano i metodi stessi della natura.

L'introduzione e l'applicazione di omologie come quelle che ho indicate hanno forse il loro massimo valore, in quanto risparmiano pensiero. Nel campo della meditazione matematica hanno qualche rassomiglianza colle macchine che nel campo dell'economia risparmiano lavoro. Esse permettono di raggiungere i risultati del raziocinio senza passare per il processo del ragionamento nel caso particolare. Molto di quanto dissi illustra quest'uso del metodo, ma vi è un altro caso che fu così fruttifero da meritare speciale menzione: io intendo la teoria generale delle funzioni di una variabile immaginaria. Noi possiamo riguardare tali funzioni come rappresentanti in realtà una coppia di funzioni di una certa classe implicanti una coppia di variabili reali; ma la difficoltà di concepire le varie guise in cui le due variabili possono essere collegate, ed i risultati dei cambiamenti che esse possono subire, in tal guisa da cavar fuori tutti i risultati possibili, avrebbe reso impossibile il loro studio diretto.

Ma quando Gauss e Cauchy concepirono l'idea geniale di rappresentare due tali variabili, la reale e l'immaginaria, colle coordinate rettangolari di un punto in un piano, queste relazioni che prima esigevano grandi sforzi per essere concepite divennero relativamente semplici. Considerata come una grandezza, una variabile complessa, ovvero la somma di una quantità reale e di una puramente immaginaria, l'ultima essendo riguardata come una quantità misurata in unità im-

maginarie, fu rappresentata dalla lunghezza e posizione di una linea retta condotta dall'origine delle coordinate al punto le cui coordinate erano rappresentate dai valori della variabile. Una tal retta, quando se ne consideri e la lunghezza e la direzione, è ora famigliarmente nota come un vettore. La concezione del vettore sarebbe tuttavia in molti casi laboriosa. Ma il vettore è completamente determinato dal suo punto terminale, ad ogni vettore corrisponde uno ed un solo punto terminale e ad ogni punto terminale uno ed un solo vettore. Quindi si può astrarre dal vettore ed in pensiero badare solamente al punto terminale. Dacchè per ogni coppia di valori che noi assegniamo alle nostre variabili originali vi è un punto, ed un solo, noi possiamo in pensiero astrarre da entrambe quelle variabili e dai vettori che esse rappresentano, e considerare solamente il punto del quale esse sono le coordinate. Così la variazione continua delle due quantità, per quanto complessa possa essere, è rappresentata dal moto di un punto. Ora tal moto è molto facile a esser concepito. Noi possiamo considerarlo, senza la minima difficoltà, come compiente un numero di rivoluzioni attorno a qualche posizione fissa, mentre l'immaginare le corrispondenti variazioni nelle variabili algebriche stesse, richiederebbe un notevole sforzo di mente. Così, e solamente così, la bella teoria, prima svolta ampiamente da Cauchy, e poi continuata da Riemann, fu portata al suo stato attuale di perfezione.

Un altro esempio del principio in questione, in cui i due soggetti del ragionare sono così prossimamente d'una fatta, che non si risparmia pensiero, è offerto dal principio di dualità in geometria proiettiva. Qui si stabilisce una corrispondenza da uno a uno fra le relazioni mutue di punti e rette, col risultato che nel dimostrare una proposizione relativa a questi concetti noi contemporaneamente dimostriamo una proposizione correlativa formata dall'originale scambiando semplicemente le parole « punto » e « retta ».

Gli argomenti dei quali trattai finora appartengono ad un tempo all'algebra ed alla geometria. Invero uno dei grandi risultati dell'introduzione della interpretazione omologa nella matematica moderna è stato di unificare il trattamento dell'algebra e della geometria, e quasi di fonderle in un'unica scienza. Ad una larga classe di teoremi d'algebra spettano corrispondenti teoremi di geometria, ciascuno di una classe provandone uno dell'altra classe. Così le due scienze si porgono mutuamente aiuto. Nella geometria noi abbiamo una rappresentazione visibile dei teoremi algebrici; colle operazioni algebriche noi raggiungiamo conclusioni geometriche, cui potrebbe essere molto più difficile il pervenire col ragionamento diretto. Un esempio ragguardevole ce l'offre l'applicazione geometrica della teoria degl'inva-

rianti. Questi sono forse, fra le sorta di conclusioni algebriche, l'ultima che lo studente, al quale sono mostrati per la prima volta, possa credere abbia un'applicazione geometrica, tuttavia ben poco studio basta a stabilire un'omologia completa fra essi e la distribuzione di punti sopra una linea retta.

Quest'uso di omologie non segna la sola linea, lungo la quale noi siamo proceduti più dei nostri predecessori. Il progresso fu possibile solo coll'emanciparci da taluni dei concetti dell'antica geometria che signoreggiano tuttora nel nostro insegnamento elementare. L'illustrazione che ho già dato calza qui perfettamente. L'espressione della relazione di due linee rette a mezzo del moltiplicatore che cambierebbe l'una nell'altra è ora famigliare ad ogni scuolaro, e la relazione stessa era famigliare ad Euclide. Ma la relazione ancora più semplice di una retta con un'altra di eguale lunghezza normale ad essa, non fu mai immaginata da Euclide, e non ha corso nelle nostre scuole. Perchè è così? Mi sembra che ciò derivi dall'idea avita, che la matematica si occupa della misura, e che l'obbietto della misura si è di esprimere tutte le grandezze in misura ad una dimensione. Quest'idea ha così completamente informato il linguaggio, che noi ancora estendiamo l'uso della parola « eguale » a tutti i casi di questa specie particolare di uguaglianza lineare: noi diciamo che un circolo è uguale al rettangolo contornato dal suo raggio e dalla sua semicirconferenza. Noi fummo pertanto costretti ad inventare la parola « congruente » per la eguaglianza assoluta in ogni punto, o di qualificare l'aggettivo « eguale » con « identico » dicendo « identicamente eguale ». Naturalmente non vi è obbiezione di sorta al paragone di grandezze in questa maniera riferendole a misura ad una dimensione, o col presupporre che il cambiamento che una quantità deve subire per essere trasformata nell'altra dev'essere espresso da un solo parametro; ma cambiamenti che implicano due o più parametri sono altrettanto importanti quanto quelli che ne implicano uno, ed il tentativo di esprimere tutte le relazioni metriche riferendole ad un solo parametro ha posto al pensiero tali restrizioni, che mi sembra appropriato l'applicare il termine emancipazione al nostro atto di liberarci da esse. Per noi la matematica non è più la scienza della quantità. Ma anche se noi consideriamo che l'oggetto ultimo delle matematiche è relazione fra quantità, noi abbiamo raccolto un ricco compenso dalla emancipazione, perchè coll'uso delle nostre più vaste idee noi siamo in grado di raggiungere nuove conclusioni circa le relazioni metriche.

Io spero che il mio discorso non sarà trovato troppo accademico se continuo con qualche ulteriore illustrazione delle omologie dei gruppi. Ritornando alle omologie tra linee, invece di prendere due rette fra loro

ad angolo retto, consideriamone due facenti un angolo di 10°. Come già si notò, questa relazione è omologa con un operatore che faccia girare una sola retta di quell'angolo. Se noi ripetiamo continuamente questa operazione, noi porteremo la retta in trentacinque posizioni differenti, la posizione trentaseiesima sarà identica con quella originale. Così in tutto noi avremo trentasei posizioni, espresse da quel numero di rette uscenti da un unico centro e facenti fra di loro angoli di 10°. Ora immaginiamoci trentasei operatori, la cui funzione sia di girare una retta, non importa quale, successivamente di 10°, 20°, 30°, ecc., fino a 360°, l'ultimo essendo equivalente ad un operatore che fa semplicemente niente. Questi trentasei operatori formeranno un gruppo, che noi sappiamo essere strettamente omologo colla moltiplicazione per le trentasei espressioni

$$e^{i\varphi}\,,\quad e^{2i\varphi}\,,\quad e^{3i\varphi}\ldots\quad e^{36i\varphi}=e^0=1\,,$$

ove φ è l'arco di 10° in misura circolare.

Fin qui non considerammo che operazioni formate dalla ripetizione continua di una sola; nel linguaggio del soggetto, tutti i nostri gruppi sono costrutti da potenze di un solo operatore. Ora estendiamo il nostro metodo sostituendo un cubo alla nostra linea retta. Attraverso a questo cubo noi abbiamo un asse parallelo a quattro delle sue faccie piane. Col girare il cubo attorno a quest'asse di qualsiasi multiplo di 90°, noi otteniamo uno scambio di posizione fra quattro delle sue faccie. Questo processo di scambio è omologo colla rotazione di 90°, essendo in realtà ad essa equivalente, e quindi è anche omologo alla moltiplicazione per l'unità immaginaria. Ma vi è anche un'altra omologia. Indichiamo con A, B, C, D le 4 faccie del cubo parallele all'asse di rotazione. Allora il nostro gruppo di rotazioni sarà omologo colle potenze di una sostituzione ciclica fra le quattro lettere A, B, C, D. S'introduca ora un nuovo operatore, cioè la rotazione attorno ad un asse perpendicolare al primo, ma sempre di un arco di 90°. Ciò introduce nel problema un nuovo elemento, e ci permette di mutare il cubo da una qualunque posizione ad un'altra qualunque, vale a dire di eseguire ogni scambio fra le faccie che sia consistente col loro rimanere faccie dello stesso cubo. Qui noi abbiamo una serie di rotazioni, le quali, nel caso del cubo, sono omologhe con certe trasformazioni lineari che sono state svolte da Klein nel suo bellissimo lavoro sull'Icosaedro.

Ma è anche evidente che nell'introdurre queste rotazioni noi praticamente operiamo con quaternioni, l'operatore essendo il vettore unità. Così noi abbiamo un'omologia fra certe forme di moltiplicazione di quaternioni e trasformazioni lineari involgenti l'unità immaginaria.

Di più, dacchè queste rotazioni sono anche omologhe con sostituzioni praticate sopra i sei simboli rappresentanti le sei faccie del cubo, ne segue che vi è anche un'omologia fra certi gruppi di sostituzioni e certe trasformazioni lineari involgenti due quantità, un numeratore ed un denominatore, e moltiplicazioni di quaternioni per vettori unità.

Io ho preso un cubo come l'esempio più semplice. Evidentemente noi possiamo costrurre un maggior numero di gruppi di sostituzioni della stessa specie fra le faccie di qualsiasi solido regolare, come Klein ha fatto nel lavoro già citato. La relazione fra le sostituzioni lineari così trovata e la soluzione delle equazioni algebriche corrispondenti, forma uno dei più bei rami della nostra matematica moderna.

L'idea di gruppi di operazioni, quale io cercai di svolgerla, fu in questi ultimi anni così estesa da coprire una gran parte del campo dell'algebra e della geometria. Fra i primi in tale estensione vi fu Sophus Lie. Considerata dal punto di vista algebrico, la sua idea, nella sua forma più semplice, può essere espressa come segue. Noi abbiamo una certa quantità, x ad esempio. Noi abbiamo anche un'operazione qualsiasi che noi possiamo eseguire sopra questa quantità. Sia questa operazione dipendente da una certa quantità a che necessariamente entra in essa. Come uno degli esempi più semplici, noi possiamo ammettere che l'operazione sia quella di aggiungere a ad x. Poichè la quantità a può prendere un'infinità di valori, ne segue che vi saranno infinite operazioni appartenenti tutte ad una classe, le quali operazioni saranno distinte dal valore particolare di a in ogni caso. Così noi operiamo sopra x con uno di questi operatori, ed otteniamo un certo risultato; sia x'. Noi operiamo sopra x' con un secondo operatore della stessa classe, ed otteniamo un secondo risultato, sia x''. Se il risultato x'' si è potuto ottenere dalla quantità originale x a mezzo di qualche operazione della classe, qualunque sia l'operatore scelto in essa, allora queste operazioni saranno tali che il prodotto di due di esse sarà equivalente all'effettuazione di alcune di esse. Così, ripetendole per sempre noi non potremo arrivare ad altro che a quello che si otterrebbe a mezzo di qualche operatore. Vediamone un esempio semplice: se la nostra operazione consiste nell'addizione di una quantità arbitraria ad x, allora noi cambiamo x in x' aggiungendo ad x una certa quantità a, ed x' in x'', aggiungendovi una certa quantità b. Il risultato di queste due addizioni è lo stesso che se noi avessimo aggiunto da principio $a+b$. Occorre appena dire che la moltiplicazione di x per una quantità qualunque sarebbe un altro esempio della stessa specie. L'effettuazione di un qualsivoglia numero di moltiplicazioni successive sopra una quantità è sempre uguale ad una moltiplicazione sola pel prodotto di tutti i fattori delle moltiplicazioni separate.

Queste operazioni non sono confinate a quantità singole. Noi possiamo considerare che l'operazione sia effettuata sopra un sistema di quantità, che sono così trasformate in un egual numero di quantità differenti, ciascuna di queste nuove quantità corrispondendo ad una del primo sistema. Se una ripetizione dell'operazione sopra il secondo sistema di quantità dà origine ad un terzo sistema, che avrebbe potuto derivarsi dal primo sistema con un'operazione della stessa classe, allora tutte queste operazioni possibili formano un gruppo.

L'idea di tali sistemi di operazioni non è punto nuova. Fu sempre ovvio, da che si cominciò a studiare la teoria generale delle operazioni algebriche, che ogni combinazione delle operazioni di addizione, moltiplicazione e divisione poteva sempre essere ridotta ad un sistema in cui fosse solamente necessaria un'unica operazione di divisione — così come in aritmetica una frazione complessa, qualunque sia l'ordine di complessità dei suoi termini, può sempre essere ridotta ad una sola frazione semplice, cioè al rapporto di due intieri, ma non può in generale essere ridotta ad un intiero. Abel fece uso di questo teorema nella celebre memoria sulla impossibilità di risolvere l'equazione di quinto grado.

Un altro campo di pensiero matematico, affatto distinto da quello sul quale gettammo uno sguardo, può essere chiamato il paese delle fate della geometria. Per fare un matematico si richiede un più alto sviluppo del suo potere speciale, che non sia dato alla pluralità degli uomini. Quando egli entra in quella terra incantata egli deve, se vuol approfittare della buona occasione, prendere ali che lo porteranno molto oltre i voli, ed anche la vista dei mortali ordinarii. Al più immaginoso di questi, un essere racchiuso in una sfera, la cui superficie sia assolutamente impenetrabile, sarebbe così sicuramente imprigionato che neppure uno spirito potrebbe fuggirne, a meno di essere così etereo da passare attraverso alla sostanza della sfera. Ma lo spirito matematico, nello spazio a quattro dimensioni, potrebbe saltar fuori senza toccare neppure un punto del globo. Prendendo posizione ad una breve distanza dalla terra, egli potrebbe col suo telescopio investigare ogni particella di essa, dal centro alla superficie, senza alcuna necessità che la luce passi attraverso ogni parte della sostanza della terra. Se fosse abile ginnastico, egli potrebbe spiccare un salto mortale e cadere colla destra a sinistra, così come egli appare ai nostri occhi, se visto per riflessione in uno specchio, e ciò senza soffrire alcuna distorsione o male di sorta. Una linea retta, od una linea che ad ogni nostro esame apparirebbe retta, se seguìta a lungo sufficientemente, potrebbe ritornare su sè stessa. Lo spazio stesso può avere una delimitazione, o piuttosto, ve ne puo essere solo una certa quantità; procediamo innanzi, per sempre,

e noi potremmo trovarci sempre ritornanti al punto di partenza. Tutti questi risultati, invero, non si ottengono semplicemente in forma di scherzo, ma con dimostrazioni geometriche rigorose.

Le considerazioni che condussero a questa forma di spazio sono così semplici che esse possono venir delineate senza difficoltà. Quando il giovane incomincia lo studio della geometria piana, la sua attenzione è diretta intieramente su figure giacenti in un piano. Per lui lo spazio ha solo due dimensioni. In un dato punto di una linea retta si può innalzare una sola perpendicolare. Muovendo una linea qualunque nel piano, egli può descrivere una superficie, ma un solido è affatto fuori del suo campo. Egli non può condurre una linea dall'esterno all'interno di un cerchio, senza intersecarlo. Sopra una data base si possono costrurre solo due triangoli di lati dati, uno giacente da una parte della base, l'altro dall'altra. Quando egli giunge alla geometria solida, le sue concezioni si estendono grandemente. Da un dato punto di una retta egli può condurre tante perpendicolari quante vuole. Se egli ha due rette fra loro perpendicolari, egli può condurne una terza che sia perpendicolare ad entrambe. Una superficie piana non è avvinta al suo proprio piano, ma può essere mossa su e giù così da descrivere un solido. La caratteristica di questo movimento è che esso costantetemente porta ogni parte del piano ad una posizione, che nessuna parte di esso prima occupava.

Ora, è un principio fondamentale della scienza pura che la libertà di fare ipotesi è illimitata. Non è necessario di provare che l'ipotesi è una realtà, prima che ci sia permesso di farla. È legittimo di anticipare tutte le possibilità. È quindi, pertanto, un esercizio perfettamente legittimo del pensiero l'immaginare qual sarebbe il risultato se noi in geometria non ci fermassimo alle tre dimensioni, ma costruissimo una maniera di spazio che ne avesse quattro (*). Come il ragazzo, ad un certo stadio dei suoi studii, passa dalle due alle tre dimensioni, così possono i matematici passare con eguale facilità dalle tre alle quattro dimensioni. Egli s'imbatte bensì nella difficoltà di non poter tracciare figure in quattro dimensioni, e le sue facoltà sono così limitate che egli non può nella sua mente costrurre l'immagine delle cose come apparirebbero nello spazio a quattro dimensioni. Ma questa mancanza non gl'impedisce di ragionare sul soggetto, ed una delle più ovvie

---

(*) La libertà delle ipotesi è piena; però non sarà inutile il ricordare ai lettori della Rivista che cogli spazï a più dimensioni si introducono nuovi postulati; mentre si perfeziona la Geometria riducendone il numero. Veggasi vol. I (1891), pag. 66 della Rivista. Nota dell'editore.

conclusioni alle quali arriverebbe è questa: Come nello spazio a due dimensioni si può in un dato punto condurre una retta perpendicolare ad un'altra, e coll'aggiungere una terza dimensione, una terza retta, può condursi perpendicolare a queste due; così con una quarta dimensione noi possiamo condurre una retta che sia perpendicolare a tutte tre. È vero che noi non possiamo immaginare come apparirà quella retta, o dove dovrà essere collocata, ma ciò è puramente in causa della limitazione delle nostre facoltà. Come una superficie descrive un solido abbandonando continuamente lo spazio nel quale essa sta al momento, così un solido a quattro dimensioni sarà generato da un moto continuo che sia costantemente diretto all'infuori di questo spazio a tre dimensioni nel quale il nostro universo sembra esistere. Siccome un uomo confinato entro un circolo, può sfuggirne saltando sopra esso, così il matematico, se posto dentro una sfera in uno spazio a quattro dimensioni, salterebbe semplicemente sopra essa altrettanto facilmente di quello che faremmo noi sopra un circolo segnato sul pavimento. Aggiungasi allo spazio una quarta dimensione, e vi è luogo per un indefinito numero di universi, tutti l'un dopo l'altro, come ve n'è per un indefinito numero di fogli di carta quando li poniamo l'un sopra l'altro.

Dal punto di vista delle scienze fisiche, la questione se l'attualità di una quarta dimensione possa essere considerata come ammissibile è molto interessante. Tutto quello che possiamo dire è che, fin dove giunge l'osservazione, tutte le conclusioni legittime sembrano essere contro di essa. Nessuna induzione della scienza fisica è più universale o completa di quella che tre condizioni fissano la posizione di un punto. Il fenomeno della luce mostra che nessuna vibrazione va fuori dello spazio a tre dimensioni, neppure nell'etere luminifero. Se vi è un altro universo, od un gran numero di altri universi, fuori del nostro proprio, noi possiamo unicamente dire che non abbiamo alcuna prova che esercitino sul nostro alcuna influenza. È ben vero che quelli che si dilettano a spiegare avvenimenti anomali coll'azione di esseri, intorno ai quali d'altronde nulla conosciamo, hanno qui un ben facile campo per la loro immaginazione. La questione della sufficienza delle leggi di natura a chiarire tutti i fenomeni, è tuttavia troppo vasta per essere al presente discussa. A prova della limitatezza delle nostre facoltà in questa direzione, è a notarsi che noi siamo incapaci a pensare uno spazio a due dimensioni, altrimenti che come contenuto in uno spazio a tre. Un puro piano, con niente da ciascuna banda, è per noi inconcepibile. Noi siamo così costretti, per quanto valgono le nostre concezioni, ad accettare tre dimensioni e non di più. Noi abbiamo in questo un risultato legittimo dell'esperienza universale

attraverso a tutte le generazioni, che è quello di uno spazio triplamente esteso.

Intimamente connessa con ciò è l'idea di quello che viene talvolta chiamato lo spazio curvo. Confesso che questa espressione non mi piace, perchè non vedo come lo spazio per sè possa essere considerato come curvo. La geometria non è la scienza dello spazio, ma la scienza delle figure nello spazio, possedenti le proprietà di estensione e di mobilità che noi constatiamo essere comuni a tutti i corpi materiali. La questione qui sollevata è molto vecchia, ed in via generale la sua storia è famigliare.

I matematici hanno spesso tentato di costrurre una geometria senza l'uso di quello che è comunemente chiamato il nono assioma di Euclide, che sembra a me meglio espresso quando si dice che in un piano si può condurre una sola retta che debba essere parallela ad un'altra retta nel piano, nel senso di non incontrarsi mai in nessuna direzione. Tuttavia ogni conato per costrurre una geometria elementare senza quest'assioma risultò involgere una fallacia in qualche punto del ragionamento. Questa considerazione condusse Lobatchewsky, ed indipendentemente da lui, io credo, Gauss, a ricercare, se non potesse venir composta una geometria nella quale quest'assioma non fosse valido; nella quale, cioè, fosse possibile che avendosi in un piano due rette parallele, l'una potesse girare di un angolo piccolissimo senza però incontrare l'altra in alcuna direzione. La possibilità di ciò fu presto dimostrata, e si compose così un sistema di geometria nel quale la somma degli angoli di un triangolo piano potrebbe essere minore di due angoli retti.

Dopo fu introdotta anche l'ipotesi opposta. Si trovò che, date in un piano due rette parallele, si potrebbe supporre che esse s'incontrassero da ultimo in entrambe le direzioni. Questa ipotesi potrebbe anche essere fatta senza che vi fosse più d'un punto d'intersezione, ogni retta rientrando in sè stessa. La geometria risultante da queste due ipotesi fu ridotta ad un sistema rigoroso da Klein.

Il predire il futuro della scienza matematica sarebbe un tentativo arrischiato. Se lo si facesse, potrebbe sembrare che, in vista degli straordinarii lavori dell'intelletto umano che caratterizzano il nostro tempo, la via più sicura sarebbe di predire grandi scoperte in questo ed in tutti i rami della scienza. Si propone talvolta la questione, se non fosse ancora possibile che venisse inventato un metodo matematico, che fosse sul calcolo infinitesimale un progresso tanto grande, quanto questo lo fu sui metodi di Euclide e di Diofanto. In quanto al risolvere i problemi che ora ci si parano innanzi, può darsi che la strada più sicura sia quella di rispondere a quella questione colla negativa. Non

è egli vero in fisica come in matematica, che le grandi scoperte sono state fatte in direzioni inattese, e che i problemi che affaticavano i nostri avi ancora frustrano i nostri sforzi? Noi dobbiamo certamente ricordare che la scoperta di ciò che non poteva esser fatto fu un elemento importante nel progresso. Ad ogni piè sospinto noi c'imbattiamo nella ferrea legge della conservazione dell'energia; in ogni direzione noi scorgiamo i limiti del possibile. Le matematiche del ventesimo secolo potranno essere molto differenti dalle nostre; forse lo scolaro comincierà l'algebra colla teoria dei gruppi di sostituzioni, come egli potrebbe ora solo per abitudini ereditate. Ma non ne segue che la nostra posterità risolverà molti dei problemi che noi non possiamo sciogliere, od inventerà un algoritmo più potente del calcolo.

Sulla parte VI del Formulario.

1. La parte VI del *Formulario* è dedicata alla *teoria degli aggregati* (*Mannichfaltigkeitslehre, théorie des ensembles*). Di questa teoria, nata da poco più di un ventennio, io ho esposto succintamente i principi in un lavoro intitolato: *Notice historique sur la théorie des ensembles* (*Bibl. math.*, T. 6, 1892, p. 8-25), al quale potrà ricorrere chi voglia farsi un'idea sommaria dell'argomento.

Delle molte denominazioni nuove che compaiono nella teoria degli aggregati, parecchie furono definite nella raccolta di formole, mentre furono omesse quelle la cui introduzione non avrebbe portato alcun vantaggio nella rappresentazione coi segni della logica. Tali sono:

Condensato in tutto un campo. — Un insieme u di punti posti in uno spazio ad n dimensioni dicesi *condensato* (*überalldicht, condensé*) in tutto un campo A, quando in qualunque intorno di ogni punto di questo campo esistono punti di u; allora Du comprende l'intero campo A.

$u\ \varepsilon$ condensato in un campo $\mathrm{A} \,.=.\, \mathrm{A} \supset Du$.

Chiuso. — Un insieme dicesi *chiuso* (*abgeschlossen, fermé*) se comprende il suo derivato.

$u\ \varepsilon$ chiuso $.=.\, Du \supset u$.

Condensato in sè. — Un insieme dicesi *condensato in sè* (*insichdicht, condensé en soi*) se è contenuto nel suo derivato.

$u\ \varepsilon$ condensato in sè $.=.\, u \supset Du$.

Perfetto. — Un insieme dicesi *perfetto* (*perfect, parfait*) se è identico al suo derivato.

$u\ \varepsilon$ perfetto $.=.\, Du = u$.

Isolato. — Un insieme dicesi *isolato* (*isolirt, isolé*) se non ha elementi comuni col suo derivato.

$u\ \varepsilon$ isolato $.=.\, u \frown Du = \Lambda$.

Separato. — Un insieme dicesi *separato* (*separirt, séparé*) se non contiene alcun insieme parziale condensato in sè.

$u\ \varepsilon$ separato $.=:\, v \supset u \,.\, v \supset Dv \,.=_v \Lambda$.

2. Senza parlare di quelle parti della teoria che sono più conosciute, dirò qualche cosa intorno alle classi ordinate ed ai numeri trasfiniti (1).

Una classe u di enti qualsiasi dicesi *ordinata* ($u \varepsilon$ Kord) quando, dati due elementi diversi x, y di u, è stabilito quale di essi *precede* l'altro. L'espressione *precede* (o *è seguito da*) può rappresentarsi col simbolo S; e la frase: « x precede y » si scrive allora $x \mathrm{S} y$. A questo concetto di precedenza o d'ordine non occorre attribuire un significato speciale (2); basta che esso soddisfaccia certe relazioni, e cioè:

a) Di due elementi diversi di una classe ordinata, uno ed uno solo precede l'altro:

$$x \mathrm{S} y \,.\, y \mathrm{S} x \,.\! = \Lambda \,. \qquad (\alpha)$$

b) Se x precede y ed y precede z, x precede z:

$$x \mathrm{S} y \,.\, y \mathrm{S} z \,.\, \supset .\, x \mathrm{S} z \,. \qquad (\beta)$$

Pertanto è impossibile dare del simbolo S una vera definizione logica sotto la forma:

$$x \mathrm{S} y \,.\! = \ldots$$

dove il secondo membro non dovrebbe contenere S; ed è legittimo introdurlo senz'altro nelle formole, purchè sieno espresse la prima volta, e sottintese ogni altra, le relazioni (α) e (β). Ogniqualvolta però si specializzi il significato di S, si dovrà darne una definizione precisa; così p. es. se, essendo data una classe di grandezze reali, la intende-

---

(1) Su questo argomento il prof. Burali-Forti ha pubblicato ultimamente un lavoro (*Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. VIII, 1894, p. 169-179), dove si è proposto in particolare di tradurre nei simboli della logica il concetto di *classe ordinata*. Egli definisce una classe ordinata come una *coppia* (u, α) o u_α, costituita da una classe u e da un *criterio ordinatore* α, in virtù del quale a ciascun elemento x di u sono assegnati come *seguenti* gli elementi αx della classe stessa. Il modo di vedere adottato dal signor Burali-Forti è forse preferibile a quello seguito in questo articolo perchè, almeno nella forma, più generale e più filosofico, figurando in esso scissi i due elementi che concorrono a costituire una classe ordinata; però non ne differisce essenzialmente, ed inoltre esige l'introduzione d'un maggior numero di nuovi concetti e simboli. Anche là l'idea d'*ordine* (sotto l'aspetto di criterio ordinatore) entra nella trattazione senza essere previamente analizzata, e ciò conferma indirettamente quanto si dirà più innanzi intorno alla *irriducibilità* di tale idea rispetto ai mezzi di cui dispone la logica matematica.

(2) Si confrontino i principi della teoria delle grandezze.

remo ordinata per modo che le grandezze minori precedano le maggiori, la S sarà definita da:

$$x \mathrm{S} y . = . x < y . \qquad (\gamma)$$

Corrispondenza ordinata (f ord) è una corrispondenza biunivoca fra 2 classi ordinate, tale che gli elementi d'una classe si trovino nello stesso ordine di precedenza dei loro corrispondenti dell'altra.

3. Un caso speciale delle classi ordinate sono le *classi ben ordinate* (Kbord), le quali possiedono le proprietà seguenti: di avere un primo elemento, e che per ogni elemento ne esiste uno immediatamente successivo; cioè:

$$\overline{x} \varepsilon (x \varepsilon u : y \varepsilon u . y \mathrm{S} x . =_y \Lambda) . - = \Lambda$$
$$x \varepsilon u . \supset_x .\because . y \varepsilon u . x \mathrm{S} y . \overline{z \varepsilon} (z \varepsilon u . x \mathrm{S} z . z \mathrm{S} y) = \Lambda : - =_y \Lambda .$$

Se fra gli elementi di due classi ben ordinate può stabilirsi una corrispondenza ordinata, si dice che esse hanno lo stesso *numero trasfinito* (Ntrasf). Se due classi ben ordinate u, v non hanno lo stesso numero trasfinito, può sempre determinarsi una classe ben ordinata w contenuta in una di esse, p. es. v, e avente lo stesso numero trasfinito dell'altra u. Si dice allora che il numero trasfinito di v è *maggiore* di quello di u, o che questo è *minore* di quello. I numeri trasfiniti formano quindi una classe di *grandezze ad una dimensione.*

Si può convenire di denotare con m (essendo m un numero naturale) il numero trasfinito della classe ben ordinata $0, 1, 2, \ldots, m-1$; allora la classe dei numeri trasfiniti comprende tutti i numeri naturali. Ogni classe formata d'un numero finito m di elementi, in qualunque modo si ponga sotto forma di una classe ordinata, costituisce una classe ben ordinata, il cui numero trasfinito è m. Segue da ciò che i numeri trasfiniti delle classi ben ordinate contenenti infiniti elementi sono diversi da $1, 2, \ldots$; ed è facile anche stabilire che sono maggiori di questi. La classe dei numeri trasfiniti può porsi sotto forma di una classe ordinata, colla condizione (γ); come questa sia una classe ben ordinata, si vedrà più innanzi.

4. Prima della definizione *formale* testè esposta dei numeri trasfiniti, il Cantor ne aveva data un'altra *reale*, o meglio *genetica.*

Sia u un aggregato di punti posti in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni; è noto che dei vari derivati Du, D^2u, D^3u,... ciascuno contiene tutti i seguenti.

Se v'ha un insieme di punti contenuto in tutti questi derivati, esso potrà denotarsi con $D^{\omega}u$, e i suoi derivati con $D^{\omega+1}u$, $D^{\omega+2}u$, ...

Parimenti se tutti questi hanno una parte comune, essa potrà denotarsi con $D^{\omega \cdot 2} u$, ecc. Per tal modo viene costituita una serie indefinita di simboli:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega . 2, \omega . 2+1, \ldots, \omega^2, \omega^2+1, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \quad (\delta)$$

la quale è evidentemente una classe ben ordinata. I simboli di cui essa si compone si ottengono in due modi: o si aggiunge un'unità ad un simbolo già noto (p. es. $\omega+1$, $\omega+2$, ω^2+1, ecc.), oppure si crea un nuovo simbolo che deve succedere a tutti i simboli già definiti (p. es. ω, $\omega . 2$, ω^2, ω^{ω}, ecc.). Questi due modi costituiscono i due *principi di formazione* (*Erzeugungsprincipe*) dei numeri trasfiniti. Convenendo di chiamare un numero trasfinito maggiore o minore di un altro secondochè esso lo segue o lo precede nella serie (δ), i due principi possono rappresentarsi così:

1. $\alpha \, \varepsilon \, \mathrm{Ntrasf} \, . \supset . \, \alpha + 1 \, \varepsilon \, \mathrm{Ntrasf}.$
2. $u \, \varepsilon \, \mathrm{KNtrasf} \, . \max u = \Lambda \, . \supset . \, \overline{\alpha \, \varepsilon} \, (x \, \varepsilon \, u \, . \supset_x . \, \alpha > x :: \beta \, \varepsilon \, \mathrm{N\,trasf} \, .$
   $\beta < \alpha : x \, \varepsilon \, u \, . \supset_x . \, \beta > x \therefore =_\beta \Lambda) \, \varepsilon \, \mathrm{Ntrasf}.$

L'aggregato di tutti i numeri trasfiniti formati mediante ω ed i numeri naturali ha la prima potenza; per ottenere aggregati aventi potenza maggiore, occorre introdurre altri nuovi simboli. Il primo di questi, dopo ω, è Ω, il quale si definisce come il più piccolo numero trasfinito maggiore di tutti quelli costruiti mediante ω ed i numeri naturali. Se si indica in generale con Y_α la classe ben ordinata costituita da tutti i numeri trasfiniti non maggiori di α disposti in ordine crescente di grandezza, l'aggregato Y_Ω (dove pel momento si astrae dal fatto che esso sia una classe ben ordinata) ha la potenza 2, mentre l'aggregato Y_α, dove α è un numero trasfinito qualunque minore di Ω, ha la potenza 1. In generale l'introduzione d'un simbolo *del tutto nuovo* (cioè non composto mediante quelli già definiti) deve farsi sempre e soltanto quando l'insieme di tutti i numeri trasfiniti già definiti ha raggiunto una potenza maggiore di quella dell'insieme di tutti i numeri trasfiniti non maggiori di uno qualunque dei numeri già definiti; cioè un simbolo del tutto nuovo λ deve soddisfare alla seguente condizione:

$$\alpha \, \varepsilon \, \mathrm{N\,trasf} \, . \, \alpha < \lambda \, . \supset_\alpha . \, \mathrm{Nc}' \, Y_\lambda > \mathrm{Nc}' \, Y_\alpha .$$

In ciò consiste il *principio d'arresto o di limitazione* (*Hemmungs- oder Beschränkungsprincip*).

Se λ, μ sono due simboli del tutto nuovi, di cui il 2° è maggiore del 1°, e se fra λ e μ non ve ne sono altri della stessa natura, l'insieme dei numeri trasfiniti $\geqq \lambda$ e $< \mu$ si dice costituire una *classe* di numeri

trasfiniti. La classe I contiene i numeri naturali; la classe II i numeri formati mediante ω ed i numeri naturali; etc. Una classe di numeri trasfiniti è caratterizzata da ciò che, qualunque sia il suo elemento α, l'insieme dei numeri trasfiniti non maggiori di α ha una stessa potenza. Cioè:

$$u \, \varepsilon \text{ una } \textit{classe} \text{ di Ntrasf.} = \therefore \alpha, \beta \, \varepsilon \, u \, . \supset_{\alpha,\beta} . \, Y_\alpha \backsim Y_\beta : \alpha \, \varepsilon \, u \, . \, \beta \, \varepsilon \, (\text{Ntrasf} - u) \, . \supset_{\alpha,\beta} . \, Y_\alpha - \backsim Y_\beta .$$

Il numero trasfinito della classe ben ordinata $Y_\alpha - \alpha$ è α.

Se si ha una classe ben ordinata u, il suo numero trasfinito è quel numero α tale che tra u ed $Y_\alpha - \alpha$ si possa stabilire una corrispondenza ordinata.

5. Se tra gli elementi di due classi ordinate può stabilirsi una corrispondenza ordinata, si dice che esse appartengono ad uno stesso *tipo* (*Ordnungstypus*) *ad una dimensione.*

Abbiasi una classe, i cui elementi possano venire ordinati secondo n punti di vista differenti, o, come può dirsi, secondo n *dimensioni* (1). Una classe di tale natura (*classe ordinata secondo n dimensioni*, *n-fach geordnete Menge*) può rappresentarsi mediante un insieme di numeri complessi d'ordine n (2), le cui coordinate possono ritenersi ordinate secondo la loro grandezza crescente o secondo qualunque altro criterio. Se due classi ordinate secondo n dimensioni sono tali che la classe ordinata costituita dalle coordinate i-esime degli elementi della prima è dello stesso tipo della classe corrispondente della seconda, e ciò per qualunque valore di i da 1 ad n, si dice che le due classi appartengono ad uno stesso *tipo ad n dimensioni.*

I tipi ad n dimensioni sono grandezze, per le quali possono definirsi le operazioni di addizione e moltiplicazione. La loro teoria non è stata ancora studiata se non limitatamente ai tipi finiti, a cui si riferiscono i nn. XLIX, LI e LV della Lista bibliografica.

I numeri trasfiniti rientrano come caso particolare nella classe dei tipi; essi sono *i tipi ad una dimensione delle classi ben ordinate.*

G. Vivanti.

---

(1) Così p. es. un pezzo di musica è un insieme di note, le quali si possono classificare, ossia ordinare, secondo 4 direzioni, cioè secondo il tempo, il valore, l'intensità e l'altezza.

(2) Su questi numeri vedi Peano, *Lezioni di analisi infinitesimale*, Torino 1893, Vol. II, pag. 1 e segg.

Lista delle Abbreviazioni.

Connex	Connesso (§ 1, 22).
Contin	Continuo (§ 1, 24).
ford	Corrispondenza ordinata (§ 2, 8).
(vfu) sim cont	Corrispondenza biunivoca continua tra le classi continue u e v (*).
Kbord	Classe ben ordinata (§ 2, 9).
Kord	Classe ordinata (§ 2, 7).
Kord_n	Classe ordinata secondo n dimensioni (§ 2, 38).
Nalg	Numero algebrico (§ 1, 8).
Nc	Numero cardinale (§ 2, 1 e 2).
Ntrasf	Numero trasfinito (§ 2, 10 e 11).
S	Seguito da ... (§ 2, 7) (**).
Ty_1	Tipo ordinato ad una dimensione (§ 2, 39).
Ty_n	» ad n dimensioni (§ 2, 40 e 41).
Y_m	Classe ben ordinata formata dai numeri naturali non negativi e non maggiori di m, disposti in ordine crescente di grandezza (§ 2, 16).
Y_α	Classe ben ordinata formata dai numeri trasfiniti (incluso lo zero) non maggiori del numero trasfinito α, disposti in ordine crescente di grandezza (§ 2, 21).
$\Phi(m, n)$	Numero dei tipi ordinati ad n dimensioni di m elementi (§ 2, 47).
ω	Il più piccolo Ntrasf maggiore di tutti i numeri $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (§ 2, 20).
Ω	Il più piccolo Ntrasf maggiore di tutti i numeri della classe II (§ 2, 37).
II	Classe II di Ntrasf (§ 2, 27).
$\backsim$	Equivalente, avente la stessa potenza (§ 2, 1).

(*) Il concetto di corrispondenza o funzione continua verrà definito in simboli a proposito della teoria delle funzioni.

(**) Quando in una medesima formola compaiono più classi ordinate, occorre indicare a quale di esse si considerino come appartenenti i due simboli separati dal segno S; ciò si denota apponendo a questo segno come indice il simbolo rappresentante quella classe. Così $x \; S_u \; y$ significa: x precede y nella classe ordinata u.

Prof. A. Sterza. — *Aritmetica razionale per il ginnasio superiore.* — Mantova, Mondovì 1893, 173 pagine in-8°.

Sebbene questa operetta si proponga come scopo principale lo svolgimento del programma governativo di aritmetica pel ginnasio superiore, l'autore di essa ha tuttavia creduto opportuno di toccare alcune nozioni più elevate, ritenendo — e a nostro avviso giustamente — che ciò valga a rendere nei discenti più profonda e completa la conoscenza delle parti elementari, e più facile il successivo apprendimento delle teorie superiori. Così speciali capitoli sono dedicati ai sistemi di numerazione considerati in generale (p. 10 e segg.), alla teoria dei numeri perfetti e dei numeri amicabili (p. 87 e segg.), alle congruenze (p. 95 e segg.), alle frazioni continue (p. 138 e segg.). Allo stesso concetto sono dovute le considerazioni introduttorie sulle idee di qualità e di quantità, da cui si deducono rispettivamente quelle di omogeneità e di grandezza (p. 5 e segg.), le osservazioni sulla relatività delle grandezze matematiche (p. 7 e segg.), le riflessioni sulle operazioni (p. 57-58), infine le numerose note storico-biografiche (pp. 5, 6, 8, 11, 17, 18, 21, 23, 24, 47, 79, 87, 96, 148) che dànno brevi ma esatte notizie sugli scienziati antichi e moderni menzionati nel testo. Tutto ciò dà al libro un carattere assai più scientifico e meno scolastico di quello della maggior parte delle opere congeneri, e fa di esso, più che un semplice libro di testo, una vera introduzione a studi più elevati. Di questo va data lode sincera all'autore, il quale ha così mostrato col fatto come non sia punto impossibile fare intravvedere ai giovanetti orizzonti più vasti di quelli che delimitano i programmi governativi, senza abbandonare per questo la maggiore semplicità ed elementarità di forma. Ed è veramente da augurarsi che l'indirizzo seguito dal prof. Sterza venga generalmente adottato nelle scuole secondarie, e massime nelle scuole classiche, dove l'istruzione, insieme allo scopo di fornire ai giovanetti un certo complesso di nozioni positive, ha quello di dar loro una buona coltura generale e di predisporne la mente a più alti studî letterari e scientifici.

Nel riconoscere come l'ordine, la chiarezza ed il rigore sieno in generale mantenuti in tutto il corso del libro, non possiamo però tacere

alcune osservazioni di dettaglio. — A p. 10 l'autore definisce l'eguaglianza come « l'espressione indicata di due quantità uguali », senza dire che cosa s'intenda per *quantità uguali*. Nel definire la sottrazione (p. 27) non viene osservato che tale operazione è possibile (nel campo dei numeri naturali) solo quando il diminutore è più piccolo del diminuendo; e tale omissione conduce appunto l'Autore a scrivere eguaglianze come questa: $8-9=8-(8+1)=8-8-1=-1$, le quali non hanno significato se non dopochè si siano estese, *per convenzione*, le leggi formali delle operazioni ai numeri negativi. A p. 83 viene invocato un teorema (se a divide bc ed è primo con b, esso divide c) di cui si cercherebbe inutilmente nelle pagine precedenti, nonchè la dimostrazione, anche l'enunciato. A p. 130 manca una dimostrazione esplicita del teorema fondamentale della teoria delle frazioni periodiche. Finalmente i numerosi esercizi (più di 200) che chiudono il volume sembrano messi insieme con una certa fretta, giacchè, oltre a parecchie ripetizioni (cfr. i NN. 51 e 55, 101 e 112, 106 e 111, N. 89 e p. 73 l. 6, N. 81 e p. 76 l. 18), vi si riscontra una grande ineguaglianza nel grado di difficoltà, di guisa che accanto a problemi di una semplicità estrema se ne trovano altri che riteniamo affatto inaccessibili ad allievi del ginnasio.

Queste poche mende non sono però tali da intaccare il pregio intrinseco del libro, e se vi abbiamo insistito è soltanto pel desiderio che l'Autore voglia farle sparire in una nuova edizione, che ci auguriamo prossima.

Mantova, 3 giugno 1894.

G. VIVANTI.

C. Burali-Forti. — *Logica matematica,* 1894 (Hoepli, Milano). (*)

La pubblicazione di questo Manuale viene a proposito per offrire ai non pochi che ora s'interessano ai progressi della Logica matematica il mezzo di farsi facilmente un concetto dello stato attuale di questa disciplina che va sempre più acquistando diritto di cittadinanza fra le scienze matematiche. Anche chi si trovasse affatto digiuno della materia può trovare nei primi capitoli del libro del Burali tutto ciò che gli abbisogna per porsi in grado di passare con lui in rassegna i principali metodi e alcune tra le più interessanti applicazioni del Calcolo logico.

L'A. comincia coll'esporre ordinatamente deducendole da undici ammissioni fondamentali le proprietà del segno di deduzione (ɔ), quelle della somma e del prodotto logico di proposizioni, quelle della negazione, tutte le regole infine di qualche importanza che si riferiscono alle operazioni sulle proposizioni.

L'utilità del calcolo simbolico per la deduzione e trasformazione delle proposizioni viene messo in luce da un'opportuna scelta di esempi e applicazioni tratte in massima parte dall'aritmetica e dalla teoria dei numeri.

Procedendo innanzi l'A. prende ad esporre la teoria delle proposizioni condizionali e delle classi che esse determinano. Tale teoria viene assoggettata ad una trattazione accurata e dettagliata come richiede l'importanza dell'argomento troppo trascurato negli ordinari trattati di logica matematica. Il sistema di notazione e il procedimento sono quelli seguiti dal prof. Peano nelle sue varie pubblicazioni su questo soggetto.

L'A. chiarisce anzitutto il concetto di *proposizione condizionale* che egli definisce come una proposizione contenente una o più *lettere indeterminate*, intendendo per lettera indeterminata una lettera (o altro segno qualunque) che sta per rappresentare non un determinato individuo od oggetto, ma bensì un individuo od oggetto da scegliere ad arbitrio tra quelli per cui la proposizione ha un significato. Una

(*) Vedasi *El Progreso Matemático*, 1894, pag. 223.

proposizione condizionale, contenente per es. la lettera indeterminata x, non è per sè nè vera nè falsa; essa serve a definire o delimitare una classe, la classe cioè formata dagli oggetti o individui tali che, ponendo al posto di x un segno che li rappresenti, danno luogo a una proposizione vera, allo stesso modo come una equazione (che è appunto una proposizione condizionale di forma speciale) può servire a determinare i valori dell'incognita pei quali essa è soddisfatta.

Per indicare le relazioni tra classi definite per mezzo di proposizioni condizionali, in cui entri per esempio la lettera indeterminata x, l'A. introduce il segno $\supset_x$ (e il corrispondente $=_x$) che posto tra due tali proposizioni serve ad indicare l'inclusione della classe definita dalla prima proposizione in quella definita dalla seconda.

Passa quindi a studiare il tipo più semplice di proposizioni condizionali, quelle della forma $x \varepsilon a$, ove a rappresenta una classe comunque definita e il segno ε sta per indicare che l'individuo che si intende designato dal segno x, appartiene alla classe a. Invece di scrivere $x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon b$ (ove a e b sono due classi) l'A. conviene di scrivere $a \supset b$, osservando che con ciò non si dà luogo ad ambiguità non essendosi ancora attribuito alcun significato al segno $\supset$ allorquando compaia tra due segni rappresentanti delle classi. Giustifica tale nuova convenzione *dimostrando* che il segno $\supset$ tra due classi si trova soggetto alle stesse regole di calcolo del segno $\supset$ tra proposizioni.

Introduce quindi il segno $\overline{x \varepsilon}$ che messo davanti a proposizioni contenenti una lettera indeterminata x serve a designare le classi che esse rispettivamente definiscono. Per denotare le classi $\overline{x \varepsilon}(x \varepsilon a, x \varepsilon b)$, $\overline{x \varepsilon}(x \varepsilon a \cup x \varepsilon b)$, $\overline{x \varepsilon}(x - \varepsilon a)$ mostra l'A. come sia opportuno scrivere più semplicemente $a b$, $a \cup b$, $-a$ e ciò per le stesse ragioni accennate pel caso del segno $\supset$.

L'A. passa poi ad estendere le nozioni e convenzioni introdotte al caso di proposizioni contenenti più lettere indeterminate; riassume la teoria del Sillogismo e analizza il metodo di dimostrazione per riduzione all'assurdo indicando le precauzioni di cui si deve far uso nell'adoperarlo.

Segue un'appendice destinata a discutere alcune questioni la cui trattazione non avrebbe potuto trovar posto conveniente nella parte destinata all'esposizione sistematica della teoria. Vi si tratta anzitutto del *principio d'induzione completa* di cui si fa tanto uso in tutti i rami della matematica. Vengono poi esposte e chiarite con esempi le notazioni che si riferiscono al concetto di funzione, alle varie specie di corrispondenze, all'inversione delle funzioni, ecc.

L'A. passa poi a parlare delle definizioni di cui distingue quattro

specie. Con quelle di prima specie si conviene di attribuire a un nuovo segno o aggregato di segni di cui si vuol far uso, lo stesso significato che abbiamo attribuito a un altro segno o aggregato di segni non contenente *lettere indeterminate*. Quando i due aggregati di segni contengono una (o più) *lettere indeterminate,* delle lettere, cioè, che stiano per rappresentare uno qualunque tra gli individui d'una data classe, si ha la definizione di seconda specie. Tra queste sono a notare le *definizioni induttive,* specialmente importanti in matematica.

E infine suscettibili esclusivamente di applicazioni matematiche sono le due ultime specie di definizione, a cui l'Autore dà rispettivamente il nome di « *definizioni di un ente in sè stesso* » e « *definizioni per astrazione* ». Malgrado il frequente uso dei procedimenti che le costituiscono, questi non furono mai, per quanto è a mia cognizione, distinti e formulati in termini generali in nessun trattato di logica matematica.

Le « *definizioni di un ente in sè stesso* » si hanno allorquando una classe viene ad essere caratterizzata semplicemente coll'attribuire agli individui che la compongono delle proprietà tali che, in conseguenza di esse, si possano stabilire tra gli enti stessi delle relazioni e delle operazioni per le quali sussistano delle determinate regole di calcolo. Del modo con cui queste regole di calcolo possono venir dedotte dalle proprietà primitive attribuite per definizione agli enti in questione l'A. dà un esempio analizzando i principi dell'aritmetica col metodo seguito dal prof. Peano (*Arithmetices principia*). È pure con definizioni di questa specie che vien caratterizzato il concetto di *grandezza* e vengono distinte le varie specie di *grandezze* nell'opera del prof. R. Bettazzi sulla *Teoria delle grandezze*. Queste definizioni si presentano spesso sotto la forma di postulati, coi quali veniamo a introdurre o foggiare (*erschaffen*) nuovi enti di cui può esserci utile indagare le proprietà.

Finalmente le definizioni di quarta specie si hanno quando, data una proposizione condizionale $p_{x,y}$ contenente due lettere indeterminate x, y (o due gruppi di lettere indeterminate) si ritiene opportuno introdurre un nuovo segno di funzione, per es. φ, e un nuovo segno di relazione, per es. α, convenendo che la scrittura $(\varphi x) \alpha (\varphi y)$ abbia lo stesso significato della proposizione p_{xy}. Con questa convenzione, che in sostanza equivale a una definizione di seconda specie, vengono a esser definite una funzione e una relazione delle quali, in conseguenza appunto della loro definizione, si possono dimostrare certe proprietà fondamentali, corrispondenti alle proprietà della proposizione p_{xy}. Quindi precisamente come nel caso delle definizioni di terza specie, si rende possibile la deduzione d'un sistema di regole di calcolo che permette di giungere poi con maggior semplicità e con un procedimento

quasi meccanico, a dei risultati a cui solo con difficoltà e per mezzo di ragionamenti complicati si sarebbe arrivati, senza il potente sussidio del linguaggio simbolico.

Giova notare che questo modo di procedere è tanto più conveniente, quanto meno le proprietà delle operazioni e relazioni che con esso si vengono a definire si scostano dalle proprietà di altre operazioni e relazioni già note, e sulle quali esiste già un *Algebra* che ci è famigliare. È da questa avvertenza che ripete la sua importanza la regola a cui accenna l'A. sotto il nome di *legge formale* o principio della conservazione delle proprietà dei segni (Permanenz Princip dell'Hankel) (*).

L'A. considera in modo speciale il caso particolare delle definizioni cosidette *per astrazione*, le quali sono possibili quando la proposizione p_{xy} è tale che la corrispondente relazione α viene a godere delle note proprietà caratteristiche dell'uguaglianza. L'A. esemplifica una tale estensione del significato del segno $=$ analizzando prima il concetto di eguaglianza tra numeri razionali, poi tra numeri reali, e mostra come partendo dalla nozione elementare di numero intero, si giunga, seguendo sempre sostanzialmente lo stesso processo di generalizzazione, al concetto più generale di *quantità*.

Nell'ultimo capitolo l'A. prende in considerazione le difficoltà che si presentano nelle questioni del seguente tipo: Data una classe di enti che goda di determinate proprietà (o supposte o sperimentalmente verificabili) scegliere fra tali proprietà quelle che possono servire per dare di questa classe una definizione di terza specie, dalla quale si possano poi dedurre per mezzo di dimostrazioni tutte le proprietà degli enti stessi. Perchè tale definizione sia la più semplice possibile, è necessario che le proprietà che con esse si attribuiscono agli enti studiati siano *indipendenti tra loro*, non ve ne sia, cioè, tra esse alcuna che si possa dedurre dalle altre. I metodi da seguire per accertarsi di ciò danno luogo ad alcune delle più interessanti applicazioni della Logica matematica e l'A. ne presenta qualche saggio.

Il nome dell'Editore mi dispensa dall'occuparmi di ciò che riguarda la parte tipografica.

Crema, 20 agosto 1894.

G. Vailati.

(*) A questa denominazione lo Schuberth, in un suo recente articolo sul giornale americano *The Monist* (Chicago, July, 1894), propone si sostituisca l'altra più significante di *principio dell'esclusione delle eccezioni (principle of no exception).*

Sulla definizione d'equivalenza in Geometria

di S. Sbrana *a Pistoia.*

Nei trattati moderni di Geometria elementare, si suole svolgere la teoria dell'equivalenza dei poligoni, e quella dei prismi, partendo dalla definizione: due poligoni, o due prismi, sono equivalenti se possono decomporsi in egual numero di parti rispettivamente eguali; mentre l'equivalenza fra la superficie d'un cerchio e quella d'un triangolo, fra due piramidi e in generale fra due solidi, si dice che ha luogo quando essi sieno limiti di due grandezze variabili, che, nei loro stati corrispondenti, sono composte d'egual numero di parti rispettivamente eguali (*).

Ora, sebbene non si lasci di far notare, quando si stabilisce questa seconda definizione, che la medesima non contraddice alla prima e che anzi ne è un'estensione, sta il fatto che le due definizioni son ben differenti, *geometricamente,* l'una dall'altra, mentre il concetto fondamentale, intuitivo, che si vuole con le medesime esprimere è uno solo, quello dell'eguaglianza d'estensione, lo stesso per tutte le superficie e per tutti i solidi.

Per questa ragione, che riguarda l'uniformità del metodo, e per un'altra che dirò in seguito, sarei per proporre di ridurre le due definizioni a una sola e precisamente alla seguente:

« Due superficie piane, o due solidi, si diranno equivalenti quando « possano decomporsi in modo che ad ogni parte dell'una corrisponda « una parte eguale, ed una sola, nell'altra, e ad ogni parte di questa, « una, ed una sola, eguale nella prima. »

(*) Queste due definizioni comparvero la prima volta nel *Calcolo Infinitesimale* del Duhamel. Gli enunciati diversi dati alla seconda dal De-Paolis e dal Faifofer non ne hanno mutato il significato.

L'equivalenza fra una superficie curva (cilindrica, conica, sferica) e un poligono, è stabilita mediante definizioni *speciali* che non hanno nulla che fare con quelle generali sovracitate.

Per rendere però accettabile la mia proposta, dovrò dimostrare che la nuova definizione coincide colla prima delle due citate, quando la si applica ai poligoni o ai prismi, e coincide colla seconda quando la si applica alle altre superficie piane e agli altri solidi.

Intanto premettiamo che siccome essa differisce da quella comunemente usata per i poligoni e per i prismi, soltanto perchè *non esclude* il caso che il numero delle parti uguali possa essere anche infinito, è evidente che tutte le proposizioni stabilite sull'equivalenza e sulla non-equivalenza di queste medesime grandezze continueranno a sussistere anche rispetto alla nuova definizione.

Fra queste proposizioni giova rammentare le due fondamentali:

Una parte di grandezza non può essere equivalente all'intera;

Se due grandezze A e B sono equivalenti a una stessa C sono equivalenti fra loro;

e far rilevare, che la prima di esse, se si vuole assumere come postulato, non perde nulla della sua evidenza (*), e che l'altra, collo stesso ragionamento che suol farsi nell'ipotesi di un numero finito di parti, rimane dimostrata anche nell'ipotesi che il numero delle parti di A e C sia finito e quello di B e C sia infinito, come anche nell'ipotesi (per il nostro scopo inutile) che sia infinito l'uno e l'altro di questi due numeri.

Ciò premesso, sieno A e B due poligoni decomponibili in parti eguali in numero infinito; dico che essi si potranno decomporre in parti uguali anche in numero finito. Infatti, se s'immagina di trasformarli in due

---

(*) Pei poligoni questa proposizione, com'è noto ai lettori della Rivista, è stata dimostrata dal Gremigni nella nuova edizione (1893) dell'*Euclide*, l. I, deducendola dall'altra: (prop. E) « Se due poligoni sono eguali ed hanno una parte comune, la rimanente parte dell'uno è equivalente alla rimanente parte dell'altro ».

Ma disgraziatamente, la dimostrazione *rigorosa e generale* di quest'ultimo teorema è tutt'altro che semplice e facile a essere chiaramente intesa (v. l'articolo dello stesso Gremigni contenuto nel fascicolo maggio-giugno 1894 del Periodico di Matematica di Roma). E siccome la difficoltà sta principalmente nel dimostrare che il numero delle parti eguali, in cui si possono scomporre le parti non comuni dei due poligoni eguali, è sempre finito, qualcuno potrebbe credere che una volta tolta dalla definizione d'equivalenza la restrizione sul numero delle parti (finito), la dimostrazione stessa rimanesse di molto semplificata. Ma è chiaro che chi la pensasse così si aggirerebbe in un circolo vizioso, inquantochè la nuova definizione non può essere accettata se prima non si dimostra, com'io ho fatto, che rispetto ai poligoni e ai prismi essa ha la stessa portata dell'ordinaria, la qual cosa si fa fondandosi appunto sul postulato dell'equivalenza.

triangoli d'eguale altezza, A' e B', questi dovranno avere base eguale, perchè altrimenti essi e perciò anche i due poligoni dati non sarebbero equivalenti; ma se A' e B' hanno egual base e eguale altezza sono composti di parti rispettivamente eguali in numero finito, e poichè tali sono pure A e A', e , B e B', se ne deduce che gli stessi poligoni dati A e B devono potersi decomporre in parti eguali anche in numero finito.

Per due prismi il teorema si dimostra allo stesso modo, trasformandoli in due parallelepipedi d'egual base.

Passiamo ora a considerare due grandezze A e B (due superficie finite o due solidi finiti) limiti rispettivi di due variabili crescenti P_n e Q_n composte di parti eguali.

Essendo

$$P_1 + \sum_1^n (P_{r+1} - P_r) = P_n\,, \qquad Q_1 + \sum_1^n (Q_{r+1} - Q_r) = Q_n\,,$$

sarà,

$$\lim P_1 + \sum_1^n (P_{r+1} - P_r) = A\,, \qquad \lim Q_1 + \sum_1^n (Q_{r+1} - Q_r) = B\,,$$

e poichè le differenze $P_{r+1} - P_r$, $Q_{r+1} - Q_r$, sono composte di parti eguali, qualunque sia l'indice r, possiamo concludere che esistono per le grandezze date A e B divisioni tali per le quali ogni parte di A ha la sua corrispondente in B, e ogni parte di B ha la sua corrispondente in A.

Reciprocamente, se A e B soddisfano a questa condizione esse sono limiti di due variabili composte di parti eguali. Infatti, supposto che il numero delle parti in cui debbonsi dividere A e B sia infinito, che è il solo caso degno di nota, queste parti, per il postulato d'Archimede, dovranno decrescere indefinitamente. Indichiamole con p_1, p_2, p_3, ... disposte in ordine decrescente e formiamo le somme $\sum_1^{n_1} p_r$, $\sum_1^{n_2} p_r$, $\sum_1^{n_3} p_r$,...

Le differenze

$$A - \sum_1^n p_r \qquad B - \sum_1^n p_r$$

al crescere indefinito di n non possono mantenersi ambedue finite, perchè allora A e B conterrebbero altre parti eguali oltre le p_r, non possono essere una finita e una infinitesima perchè altrimenti vi sarebbero in A delle parti che non hanno le loro corrispondenti in B; perciò è forza concludere che queste due differenze sono ambedue infinitesime, ovvero che A e B sono limiti delle variabili $\sum_1^n p_r$, $\sum_1^n p_r$ composte di parti rispettivamente eguali.

L'altra ragione cui alludevo in principio, per la quale crederei conveniente modificare l'enunciato della definizione del Duhamel, nel modo indicato, è questa; che il teorema fondamentale sulle piramidi equivalenti può allora dimostrarsi direttamente, senza aver bisogno della teoria delle grandezze limiti, la qual cosa in una razionale fusione della geometria piana colla solida sarebbe evidentemente di non lieve vantaggio. La dimostrazione di questo teorema potrebbe farsi così:

Sieno date due piramidi triangolari VABC d'egual base ABC e di eguale altezza VH.

Si dividano gli spigoli per metà e sieno M, N, P, Q, R, S i punti di mezzo rispettivi di VA, VB, VC, AB, AC, BC. Le tre coppie di piani MNP, NPQR, NQS dividono ognuna delle due piramidi in quattro parti, due prismi e due tetraedri.

I due prismi contenuti nell'una sono equivalenti fra loro (perchè metà di parallelepipedi di base equivalente e d'eguale altezza) ed equivalenti a quei due contenuti nell'altra; e i due tetraedri dell'una sono eguali fra loro ed hanno rispetto a quelli dell'altra eguale base ed eguale altezza (metà di VH). Questi tetraedri danno luogo, colla stessa decomposizione, ad altri prismi equivalenti ed altri tetraedri simili ad essi e così via; per cui è chiaro che per le due piramidi date esistono divisioni tali per le quali ogni parte dell'una ha la sua corrispondente nell'altra e reciprocamente.

Pistoia, aprile 1894.

S. Sbrana.

Nuove pubblicazioni.

Hermann Grassmanns. — *Gesammelte mathematische und physikalische Werke, herausgegeben von* Friederich Engel. Ersten Bondes erster Theil. Leipzig, Teubner 1894, pag. 12+435. Prezzo Marchi 12.

D. Atanasio Lasala y Martinez. — *Teoria de las cantitades imaginarias.* — Bilbao, 1894, pag. VIII+149. Precio 6 pesetas.

Dott. S. Ortu Carboni. — *Geometria descrittiva ed elementare ed alcune sue applicazioni.* Vol. I, 1894. Ditta Paravia e Comp., pag. XIII+138. Prezzo L. 2,75.

Appunti di Aritmetica

per Italo Zignago *a Genova.*

È assai facile accertarsi che dei numeri primi alcuni hanno fattori complessi, altri non ne hanno; lo è meno distinguerli in due specie mediante la loro forma.

A questo fine giova dimostrare il seguente

Lemma.

Se un intero reale e positivo è il prodotto di due interi complessi, che non ammettono divisori reali, esso è la somma di due quadrati primi fra loro.

Dimostrazione. — Sia h un intero reale positivo, prodotto di due fattori complessi interi $a+bi$ e $c+di$, che non hanno divisori reali.

Si osservi che a è primo con b; se no detto μ il massimo comun divisore fra a e b, il fattore $a+bi$ avrebbe il divisore reale μ; e similmente c è primo con d.

Dall'ipotesi fatta che h sia il prodotto dei due interi complessi

$$h = (a+bi)(c+di) \tag{1}$$

eseguendo nel secondo membro il prodotto indicato, si ottiene:

$$h = ac - bd + i(ad - bc) \tag{2}$$

Il primo membro è reale; quindi nel secondo il coefficiente di i deve essere nullo, e la parte reale uguale al primo membro:

$$\left.\begin{aligned} ad - bc &= 0 \\ ac - bd &= h \end{aligned}\right\} (3)$$

Si consideri la prima di queste equazioni.

Poichè bc ed il secondo membro sono divisibili per b, anche ad deve esserlo; ma b è primo col fattore a, quindi divide l'altro fattore d

$$d = bk\,. \tag{4}$$

Sostituendo questa espressione dell'intero d nella prima delle (3), dividendo i due membri per b e ricavando c si ottiene

$$c = -ak. \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) ricordando che c e d sono primi fra loro si deduce

$$k = \pm 1 \tag{6}$$

perciò le stesse equazioni si trasformano in

$$\left.\begin{aligned} c &= \mp a \\ d &= \pm b \end{aligned}\right\} (7)$$

dove i segni superiori si corrispondono e così gli inferiori.

Sostituendo nella seconda delle (3) ai numeri c e d queste espressioni, si ottiene per h la forma seguente:

$$h = \mp a^2 \mp b^2 \tag{8}$$

e siccome esso è positivo per ipotesi, i segni superiori non verificano l'equazione e quindi si ottiene

$$h = a^2 + b^2 \tag{9}$$

cioè h è la somma di due quadrati primi fra loro.

Osservazione I. — La reciproca di questa proposizione è vera e si riconosce con tutta facilità. Infatti se è:

$$h = a^2 + b^2$$

e i numeri a e b sono primi fra loro, si avrà anche

$$h = (a + bi)(a - bi)$$

e i fattori $a + bi$ e $a - bi$ non hanno divisori reali, perchè se per es. $a + bi$ avesse un divisore reale δ, sia a sia b sarebbero divisibili per δ.

Osservazione II. — Si è detto or ora che i segni superiori non verificano; tenendo conto di questa condizione le formule (7) si possono scrivere

$$\left.\begin{aligned} c &= a \\ d &= -b \end{aligned}\right\} (10)$$

e per conseguenza è anche:

$$c + di = a - bi \tag{11}$$

vale a dire:

Se due interi complessi non hanno divisori reali ed il loro prodotto è reale e positivo essi sono numeri coniugati.

La reciproca non è vera perchè due interi coniugati possono ammettere divisori reali.

Il lemma dimostrato è contenuto in una proposizione più generale, la quale a sua volta può dedursi dal lemma stesso. È la seguente:

Proposizione.

Se un intero reale e positivo è il prodotto di due interi complessi, che hanno gli stessi divisori reali, esso è la somma dei quadrati di due interi reali. Il massimo comun divisore di questi interi è uguale al massimo divisore reale di entrambi i fattori complessi.

Dimostrazione. — Sia:

$$h = (a + bi)(c + di)$$

un intero reale positivo, μ il massimo divisore reale di $a+bi$; poichè $a + bi$ e $c + di$ hanno gli stessi divisori reali, esso è anche il più gran divisore reale di $c + di$. E siccome il massimo divisore reale di un intero complesso è dato dal massimo comun divisore dei suoi parametri, così μ è ad un tempo il massimo comun divisore dei numeri a e b e dei numeri c e d.

Per conseguenza si può porre:

$$\left.\begin{array}{l} a = a_1 \mu \\ b = b_1 \mu \\ c = c_1 \mu \\ d = d_1 \mu \end{array}\right\} \quad (12)$$

e risulta a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1.

Sostituendo nella (1) queste espressioni di a, b, c, d e raccogliendo μ^2 a fattore si ha per h l'espressione seguente:

$$h = \mu^2 (a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i) . \qquad (13)$$

Siccome h e μ^2 sono reali e positivi deve esserlo anche il prodotto

$$(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i)$$

essendo poi a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1 nè l'uno nè l'altro dei fattori $a_1 + b_1 i$ e $c_1 + d_1 i$ ammette divisori reali; perciò $c_1 + d_1 i$ è coniugato con $a_1 + b_1 i$ e si ha

$$(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i) = a_1^2 + b_1^2 . \qquad (14)$$

Sostituendo nella (13) al primo, il secondo membro di questa relazione, si trova

$$h = \mu^2 (a_1^2 + b_1^2) = (\mu a_1)^2 + (\mu b_1)^2 . \qquad (15)$$

Concludendo h è la somma dei quadrati di due interi reali μa_1 e μb_1 e il massimo comun divisore di questi interi cioè μ è il massimo divisore reale dei fattori $a + bi$ e $c + di$.

Osservazione I. — La reciproca è esatta e facile a verificarsi. La somma di due quadrati si può decomporre nel prodotto di due fattori complessi, che hanno gli stessi divisori reali. Invero:

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$$

e i divisori reali sia di $a + bi$ sia di $a - bi$ sono i divisori comuni di a e b.

Osservazione II. — Anche la proposizione enunciata all'osservazione II del Lemma può estendersi in questo modo:

Se due interi complessi hanno gli stessi divisori reali ed il loro prodotto è reale e positivo essi sono coniugati.

Sia

$$h = (a + bi)(c + di)$$

reale e positivo e $a + bi$ e $c + di$ abbiano gli stessi divisori reali; se μ è il massimo comun divisore di a e b lo è anche di c e d e sono verificate le (12) ed è a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1; perciò $a_1 + b_1 i$ e $c_1 + d_1 i$ non hanno divisori reali. Anche la (13) è verificata e perciò il prodotto $(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i)$ è reale e positivo; pertanto ai numeri a_1, b_1, c_1, d_1 possono applicarsi le (10) e si ha

$$c_1 = a_1$$
$$d_1 = -b_1 .$$

Moltiplicando i due membri per μ ed applicando le (12) si ottiene:

$$c = a$$
$$d = -b$$

e per conseguenza:

$$c + di = a - bi$$

cioè i due fattori $a + bi$ e $c + di$ sono coniugati.

La reciproca è vera. Infatti il prodotto:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

è reale e positivo e i divisori reali sia di $a + bi$, sia di $a - bi$ sono i divisori comuni di a e b.

Ora si tratta di distinguere i numeri primi che hanno fattori complessi da quelli che non ne hanno, mediante la forma analitica; o, in termini più espliciti, è proposto il seguente

Problema.

Trovare una forma analitica la quale contenga tutti i numeri primi (positivi) che ammettono divisori complessi, ma non contenga alcuno degli altri numeri primi (positivi).

Si indichi con $f(x_1, \dots x_n)$ una tal forma; poichè sui valori composti di essa non si è fatta ipotesi alcuna, il ragionamento si limiterà ai valori primi. In conseguenza non saranno presi in considerazione tutti i valori delle variabili, ma soltanto quelli che rendono $f(x_1, \dots x_n)$ uguale a un numero primo.

Indicando con $a+bi$ e $c+di$ due fattori complessi, in cui può scomporsi $f(x_1, \dots x_n)$ si ha:

$$f(x_1, \dots x_n) = (a+bi)(c+di) \qquad (16)$$

e per le ipotesi fatte si può ammettere che nessuno dei fattori complessi a secondo membro, sia una unità e nessuno dei numeri b e d sia uguale a zero.

Inoltre rappresentando rispettivamente con μ e ν i massimi divisori comuni di a e b e di c e d si può porre

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 \mu \\ b &= b_1 \mu \\ c &= c_1 \nu \\ d &= d_1 \nu \end{aligned}\right\} (17)$$

e risulta ancora a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1.

Sostituendo nella (16) ai numeri a, b, c, d le loro espressioni date dalle (17) e mettendo $\mu\nu$ in evidenza si ottiene:

$$f(x_1, \dots x_n) = \mu\nu (a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i). \qquad (18)$$

Si consideri il prodotto:

$$(a_1 + b_1 i)(c_1 + d_1 i).$$

Essendo a_1 primo con b_1 e c_1 primo con d_1 i fattori a_1+b_1i e c_1+d_1i non hanno divisori reali. Il prodotto è poi reale e positivo, perchè tali sono f, μ, ν.

Perciò c_1+d_1i è coniugato con a_1+b_1i e si ottiene

$$(a_1+b_1i)(c_1+d_1i) = a_1^2 + b_1^2.$$

Dunque la funzione che si cerca è della forma:

$$\varphi(\mu, \nu, a_1, b_1) = \mu\nu(a_1^2 + b_1^2) \qquad (19)$$

ma si può porre sotto un'altra più semplice; siccome φ è numero primo dei due fattori $\mu\nu$ e $a_1^2+b_1^2$ uno è uguale all'unità, l'altro è uguale a φ, quindi si possono immaginare due casi

$$\mu\nu = \varphi \quad \text{e} \quad a_1^2 + b_1^2 = 1$$

oppure $\mu\nu = 1$ e $a_1^2 + b_1^2 = \varphi$.

Nel primo la seconda relazione si scinde in due

$$a_1 = \pm 1 \quad \text{e} \quad b_1 = 0$$

oppure $a_1 = 0$ e $b_1 = \pm 1$.

Sia $b_1 = 0$; allora anche $b = \mu b_1$ deve essere zero contro l'ipotesi.

Sia $b_1 = \pm 1$; allora deve essere $a_1 = 0$. Perciò (essendo $c_1 + d_1 i$ coniugato con $a_1 + b_1 i$) si avrà ancora:

$$c_1 = 0 \qquad d_1 = \mp 1$$

e per conseguenza

$$a + bi = \mu (a_1 + b_1 i) = \mu (\pm i)$$
$$c + di = \nu (c_1 + d_1 i) = \nu (\mp i) .$$

Essendo $\varphi = \mu\nu$ un numero primo sarà $\mu = 1$ oppure $\nu = 1$; quindi uno dei due numeri $a + bi$ e $c + di$ è uguale ad una unità imaginaria contro l'ipotesi.

Pertanto il caso

$$\mu\nu = \varphi \qquad \text{e} \qquad a_1^2 + b_1^2 = 1$$

rimane escluso e si conclude

$$\varphi = a_1^2 + b_1^2 \tag{20}$$

cioè:

La funzione più generale che risolva il problema ha i valori primi positivi comuni con $a_1^2 + b_1^2$.

Osservazione I. — La reciproca è vera:

Se in una funzione i valori primi positivi sono i numeri primi, somma di due quadrati, essa contiene fra i numeri primi positivi quelli che sono il prodotto di due fattori complessi e nessun altro.

Dimostrazione. — Si indichi con φ questa funzione; intanto si vede che è vera la seconda parte della proposizione, perchè i valori primi di φ essendo la somma di due quadrati sono della forma $(a+bi)(a-bi)$. Viceversa ogni numero primo positivo che sia il prodotto di due fattori complessi è un valore della funzione φ . Invero un tal numero, come si è visto nel problema precedente, è la somma di due quadrati.

Osservazione II. — In particolare la funzione $a^2 + b^2$ risolve il problema.

Osservazione III. — Se si considerano solo i numeri primi dispari la funzione $4n + 1$ è un'altra soluzione.

Infatti le due forme $a^2 + b^2$ e $4n + 1$ contengono gli stessi numeri primi dispari e positivi.

Così se si vuole che il problema ammetta una soluzione della forma $ax + b$ basta modificarne l'enunciato parlando di numeri primi dispari, anzichè di numeri primi.

Questa modificazione è essa necessaria?

Ponendo la domanda in termini più precisi si fa la seguente

Questione.

Esiste una forma lineare $ax + b$, la quale fra i numeri primi positivi contenga tutti e soli quelli che sono il prodotto di due fattori complessi?

Ecco una serie di osservazioni che conduce a deciderla.

Osservazione I. — I numeri della forma $ax+b$ sono i numeri delle forme

$$4ax+b \qquad 4ax+a+b \qquad 4ax+2a+b \qquad 4ax+3a+b$$

cioè se un numero è della forma $ax+b$ è di una delle altre quattro e viceversa.

Osservazione II. — Se $ax+b$ è una soluzione, il numero a è primo coi quattro numeri

$$b \qquad b+a \qquad b+2a \qquad b+3a\,.$$

Infatti $ax+b$ contiene tutti i numeri primi positivi, che sono il prodotto di due fattori complessi, per conseguenza tutti i numeri primi positivi della forma $4x+1$. Ciò esige che a sia primo con b. Ma se a è primo con b è noto che qualunque sia k è anche primo con $ak+b$. Dunque, ecc.

Osservazione III. — Se $ax+b$ è una soluzione il numero a è pari.

Sia dispari, le espressioni

$$4ax+b \qquad 4ax+a+b \qquad 4ax+2a+b \qquad 4ax+3a+b$$

divise per 4 daranno quattro resti differenti, cioè i quattro numeri

$$0\,, \qquad 1\,, \qquad 2\,, \qquad 3\,,$$

presi in un certo ordine.

Quelle che danno i resti

$$0\,, \qquad 2\,, \qquad 3\,,$$

non possono contenere numeri primi dispari (positivi). Per le due prime la cosa è evidente; quanto alla terza lo diventa ricordando che $ax+b$ non contiene numeri primi positivi della forma $4n+3$.

Per conseguenza esse devono essere forme composte; onde dei quattro numeri

$$b \qquad b+a \qquad b+2a \qquad b+3a$$

tre hanno un fattore comune con $4a$. E siccome a è primo con tutti e quattro, il fattore comune è un divisore di 4, cioè dei quattro numeri tre sono pari. Ma d'altra parte dando i resti $0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3$ nella divisione per 4, i numeri suddetti devono essere due pari e due dispari.

Dunque: Se $ax+b$ ecc.

Osservazione IV. — Le quattro espressioni

$$4ax+b \qquad 4ax+a+b \qquad 4ax+2a+b \qquad 4ax+3a+b$$

sono della forma $4n+1$.

Par assurdo una di esse p. e. $4ax+3a+b$ non lo sia. Dei numeri primi positivi essa non può contenere alcuno della forma $4n+1$, essendo di forma differente, nè alcuno della forma $4n+3$ altrimenti anche $ax+b$ dovrebbe contenerne, contro l'ipotesi. Perciò fra i numeri

primi positivi non potrà contenere altro che il 2. Ora le forme $ax+b$ prime contengono infiniti numeri primi positivi, dunque $4ax+3a+b$ è una forma composta cioè $3a+b$ ha un fattore comune con $4a$. Questo fattore dev'essere un divisore di 4 perchè a è primo con $3a+b$; perciò $3a+b$ è pari; ma si è visto già che a è pari, quindi anche b deve esserlo; perciò a e b avrebbero un divisore comune (il due), mentre per ipotesi sono primi fra loro. Quest'ultima osservazione mostra che la forma $ax+b$ non può contenere il numero due e che per conseguenza la forma in questione non esiste.

Corollario.

Eulero fu il primo a dimostrare che i divisori della somma di due quadrati primi fra loro sono la somma di due quadrati.

Questa proposizione risulta facilmente da quanto precede.

Sia:

$$N = a^2 + b^2$$

e sieno a e b primi fra loro, si dica p un divisore primo di N.

Esso ha un fattore complesso. Si neghi, poichè esso divide

$$N = (a+bi)(a-bi)$$

dividerà uno dei fattori $a+bi$ oppure $a-bi$ e per conseguenza sarà un divisore comune di a e b. Ciò non può essere perchè a e b sono primi fra loro.

Poichè p è un numero primo (positivo), ed ha un fattore complesso esso è la somma di due quadrati.

Così dimostrata la proposizione pei divisori primi, si estende ai divisori composti con un metodo ben noto, cioè osservando che ogni divisore composto è un prodotto di divisori primi e che se più numeri sono la somma di due quadrati, lo è anche il loro prodotto.

Genova, 26 luglio 1894.

PS. — Alcune proposizioni del lavoro possono volgersi facilmente in logica matematica, p. e. il Lemma e la Proposizione si traducono in

$$a,b,c,d \,\varepsilon\, \mathrm{n} . h \,\varepsilon\, \mathrm{N} . h=(a+bi)(c+di) . \mathrm{D}(a,b)=1 . \mathrm{D}(c,d)=1 . \supset . h=a^2+b^2$$
$$\text{»} \qquad . \mathrm{D}(a,b)=\mathrm{D}(c,d) . \supset . \qquad \text{»}$$

Si può aggiungere che se n'p significa « numero primo complesso » si hanno le relazioni

$$\mathrm{Np} - \mathrm{n'p} = \mathrm{Np} \cap (\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2)$$
$$(2+\mathrm{N}) \cap \mathrm{Np} - \mathrm{n'p} = \mathrm{Np} \cap (4\,\mathrm{N}+1)$$
$$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{n} . \mathrm{Np} \cap (a\,\mathrm{n}+b) = \mathrm{Np} - \mathrm{n'p} . =_{a,b} \Lambda$$

le quali esprimono tre proposizioni del lavoro.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Congrès de Caen - 1894

Première et deuxième Sections — Séance du 14 Août.

Question à l'ordre du jour.

Etude des moyens qui seraient de nature à assurer un échange de vues plus facile et plus suivi entre les mathématiciens des diverses nations, et qui pourraient contribuer ainsi aux progrès des sciences mathématiques et au perfectionnement des méthodes.

Résolution.

Les 1ère et 2e Sections, après une discussion approfondie, à laquelle ont pris part un grand nombre de membres,

1° — Donnent en principe l'adhésion la plus complète au projet de création de *Congrès mathématiques internationaux* et se déclarent dès-à-présent disposées à apporter tout leur concours aux efforts qui sont ou seront faits dans cet ordre d'idées;

2° — Approuvent absolument l'idée de M.r Mansion, relative à la rédation de *Vocabulaires mathématiques* et applaudissent au commencement de réalisation que M.r le Commandant Brocard a déjà donné à cette idée, par la préparation d'un vocabulaire mathématique français;

3° — Expriment l'espoir que le projet de M.r Iacques Boyer, concernant l'établissement d'un *Dictionnaire mathématique*, pourra aboutir à un heureux résultat, et en France, et dans la plupart des autres pays;

4° — Croient devoir attirer l'attention sur les remarquables monographies mathématiques qui se publient en ce moment en Allemagne, notamment par les soins du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematich*, fondé depuis 1868, et que dirige avec tant de talent Mr le

Professeur Dr E. Lampe, de Berlin; monographies dont il serait très désirable de voir publier des traductions dans diverses langues;

5° — Considèrent que les grands effort fait par Mr le Professeur Peano et plusieurs de ses Confrères pour la propagation de la *Logique mathématique* et la publication d'un *formulaire mathématique* sont de nature à contribuer puissamment au but qu'il s'agit d'atteindre;

6° — Sont heureuses de constater le degré d'avancement du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, et, dans le même ordre d'idées, applaudissent à la publication si intéressante due à un groupe de mathématiciens hollandais et entre autres de M.r P. H. Schoute, et qui est intitulée *Revue Semestrielle des Publications mathématiques:*

7° — Estiment que la publication de *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, depuis le commencement de 1894, a rendu et est appelée à rendre encore de très grand services, en ce qui concerne les rapports des mathématiciens entre eux; expriment leur reconnaissance aux fondateurs, MM. Laisant et Lemoine, et se félicitent de voir que cette initiative a été due à deux des membres de l'Association française pour l'avancement des Sciences;

8° — Prennent en très sèrieuse considèration les réflexions prèsentées par M.r Lémeray sur la possibilité d'établir des bibliothèques mathématiques, ayant pour objet de mettre des livres à la disposition des travailleurs éloignés des centres scientifiques;

9° — Décident que la question, sous la forme générale où elle a été rédigée, sera maintenue à l'ordre du jour des séances pour la session de Bordeaux en 1895.

Ces diverses résolutions ont été prises à l'umanimité des Membres présents.

Sulla Parte VII del Formulario - Teoria dei limiti.

In questa parte del formulario abbiamo esposto le proprietà dei limiti delle funzioni reali di variabili reali, presi quando la variabile indipendente percorre i valori di un gruppo tendendo al limite superiore infinito.

Abbiamo esaminato il concetto di limite (più vasto di quello ordinariamente considerato) di cui si hanno tracce in Cauchy, in Abel ed anche in autori anteriori, ma che si studia con una certa ampiezza solo da poco tempo: vogliamo dire il limite definito come un valore a cui si avvicina la funzione, senza escludere che contemporaneamente si avvicini anche ad altri. La definizione adottata è dunque la seguente: « Il numero y è limite della funzione $f(x)$ quando x nel gruppo u « tende al limite superiore infinito, se, scelto h comunque piccolo, « *qualunque sia il numero* a vi sono in u *alcuni* valori di x mag- « giori di a, pei quali $f(x)$ assume valori numericamente diversi da « y meno di h (*) » ed analoghe per il caso del limite $+\infty$ o $-\infty$.

Si ha così come caso particolare quello, più frequentemente studiato, in cui la funzione tende ad un unico limite; allora, riferendosi alla definizione precedente, « preso h comunque piccolo, *esiste un conve-* « *niente numero* a tale che per *tutti* i valori di x in u che sono « maggiori di a, $f(x)$ è numericamente diverso da y meno di h ».

A tale caso, come il più importante, si è dato naturalmente il maggiore sviluppo.

Dei limiti a cui tendono le funzioni quando la variabile indipendente si avvicina ad un valore finito x_0 od all'infinito negativo, non ci siamo occupati: invero le loro definizioni e le loro proprietà si deducono

---

(*) Cfr. Peano. *Sulla definizione del limite di una funzione* (Rivista di Matematica, vol. II). — Bettazzi. *Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo VI).

agevolmente da quelle citate nel formulario, colle rispettive trasformazioni di variabili $x = x_0 \pm \frac{1}{z}$, $x = -z$, mentre il riportarle tutte per disteso avrebbe allungato eccessivamente l'elenco delle formule senza portare un contributo di teoremi essenzialmente distinti.

Nel 1° dei quattro paragrafi di cui si compone questa VII parte si è data la definizione di limite finito ed infinito, e dei limiti si sono esposte le principali proprietà. Nè in questo paragrafo nè nei seguenti si vedranno registrate le notazioni storicamente importanti O ed U (in italiano S ed I) del Du Bois Reymond e dello Stolz, giacchè ad esse si può supplire, nella scrittura simbolica, colle espressioni $\max \lim f x$, $\min \lim f x$, o $l' \lim f x$, $l_1 \lim f x$ senza introdurre simboli nuovi da definirsi.

Nel § 2 si è studiato il limite di una funzione, nel caso particolare (quello che si considera ordinariamente) in cui tale limite è unico.

Nel § 3 si sono date le proprietà dei limiti di più funzioni confrontati fra loro, e delle espressioni formate con più funzioni legate fra loro dalle operazioni elementari dell'Aritmetica.

Nel § 4 sono riportate alcune delle formule principali che esprimono equivalenze fra limiti di funzioni diverse, o valori già calcolati di limiti importanti. In questo paragrafo peraltro non si troveranno le numerose ed interessanti formule che, quali applicazioni dei limiti, si hanno dalle teorie delle serie, degli integrali definiti, ecc., dovendo esse costituire altre speciali parti del formulario.

È da notarsi che certe formule non sono state prese dalle opere che saranno citate via via (p. es. dall'opera del Laska) sotto le forme precise riportate nel formulario; giacchè essendosi in questo definito soltanto il limite preso quando x tende all'infinito, si sono dovute, con semplici cambiamenti di variabili, trasformare alcune formule date invece in quelle opere per il caso di x tendente ad un numero finito.

Di certe formule comunemente note e facili a trovarsi in quasi tutti i trattati di Algebra, non si è indicata la fonte a cui si sono tolte; di alcune non tolte a nessun'altra opera si è tralasciata la dimostrazione, perchè facilissima ed immediata.

Per brevità si è usata la notazione $x, y, z \ldots - \varepsilon\, a$ dove $x, y, z \ldots$ sono enti della classe a, invece dell'altra $x - \varepsilon\, a \,.\, y - \varepsilon\, a \,.\, z - \varepsilon\, a \ldots$

R. Bettazzi.

Sulla Parte VIII del Formulario. - Serie.

Nella Parte VIII del formulario son raccolte le formule principali risguardanti le serie ed i prodotti infiniti numerici: sono specialmente considerate le serie a termini positivi e, di esse, quelle a termini decrescenti, perchè le medesime sono della massima importanza nell'Analisi. Per la dimostrazione di alcune formule del § 1 è conveniente l'uso del calcolo simbolico; a questo fine osservo, p. es., che, se si pone:

$$(a_0 u^m + a_1 u^{m-1} + \dots + a_m)(b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \dots + b_n) \text{ simb} . = a_0 b_0 u_{m+n} + \dots + a_m b_n$$

si ha:

$$\overline{\Sigma}^m u_{m+n} = u^n (u-1)^m \text{ simb} .$$

Alcune formule di esso § 1 coincidono sostanzialmente con note formule del calcolo delle differenze, perchè il segno $\overline{\Sigma}$ riducesi all'usuale Δ, essendo $\overline{\Sigma}^m u_{m+n} = \Delta^m u_n$: nonostante questa coincidenza ho creduto conveniente l'uso del $\overline{\Sigma}$ col preciso significato attribuitogli dalle generali leggi delle operazioni inverse, per le quali deve essere $\Sigma \overline{\Sigma} u_n = u_n$. Alcune proposizioni le ho date sotto varie forme per porne in chiaro i diversi aspetti sotto i quali può convenire di considerarle. I criterii relativi alle serie a termini positivi li ho ridotti a forma mirabilmente semplice e tale da segnare anche una via pel calcolo approssimato di somme, lasciandomi guidare da un notevole criterio ch'io ho segnalato (1): ripensando al modo nel quale pervenni a tal criterio la prima volta, mi avvidi facilmente che la teoria delle serie a termini positivi ed il calcolo approssimato delle convergenti si possono ridurre allo studio della serie di Nicole; da questa serie, seguendo cammino inverso ad uno da me seguito (2), ricavasi infatti subito od il criterio di Kummer, che comprende tutti i criterii speciali per le serie a termini positivi, od altro equivalente; inoltre formare,

---

(1) Rend. Circ. Mat., a. 1890, pag. 278. — Rivista Mat., a. 1893, p. 120.
(2) *Giornale Battaglini*, a. 1890, pag. 303.

come indica KUMMER (1) pel calcolo approssimato, una p_n tale da aversi $\lim (p_n u_n / u_{n+1} - p_{n+1}) = 1$ equivale a formare una serie di NICOLE

$$\frac{1}{1+p_1} + \frac{p_1}{(1+p_1)(1+p_2)} + \ldots + \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+1})} + \ldots$$

tale che il rapporto dei suoi termini n^{mo} ed $(n+1)^{mo}$ sia uguale, a meno d'un infinitesimo, ad u_n/u_{n+1}; ma quando una tal serie sia formata, siccome si conosce la somma d'un numero qualsiasi di termini della medesima, essendo

$$\frac{p_1 \cdots p_n p_{n+1}}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+1})(1+p_{n+2})} + \ldots + \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n+m}}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+m+1})}$$
$$= \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n+1}}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+1})} - \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n+m+1}}{(1+p_1)\ldots(1+p_{n+m+1})},$$

si sarà in grado di calcolare approssimativamente (2) la somma della serie $u_1 + u_2 + \ldots$. Ciò, in vece di meravigliare, deve riescir naturale, perchè la serie di NICOLE comprende tutte le serie a termini positivi e perchè, come affermai altra volta (3), ogni criterio generale deve esser conseguenza di qualsiasi altro criterio, che sia anch'esso generale. Non credo però che quanto ora dissi tolga importanza ai lavori, che hanno contribuito a cospargere di luce la teoria delle serie a termini positivi, come non credo si possa disconoscere l'importanza dei miei risultati (§ 3 P54, 55, 58-64). Parmi invero difficile che si riesca a dare per le serie a termini positivi criterii generali più convenienti di quelli espressi con le 61 e 62 del § 3; e credo esser parimenti difficile indicare meglio che con le 63 e 64 una via pel calcolo approssimato delle serie convergenti. Passando ai criterii speciali, osserverò che i più importanti sono, essenzialmente, quello di condensazione di CAUCHY (§4 P4) ed i logaritmici di ABEL (§3 P48, 49): per stabilire questi ultimi ho indicata una via comodissima del Prof. CESÀRO (4), la quale ha anche il pregio di informare sul vario modo di divergere di molte serie. Ho date alcune importanti proposizioni per le serie a termini positivi decrescenti (§4 P9-13) e riempita una lacuna: ABEL (5) dimostrò erronea l'affermazione di OLIVIER, che $\lim nu_n$ fosse condizione necessaria e sufficiente per la convergenza delle serie a termini positivi $u_1+u_2+u_3+\ldots$

---

(1) *Crelle's Journal*, XVI, a. 1837, pag. 206.

(2) Rend. Circ. Mat., a. 1890, pag. 280.

(3) » » » » » 279.

(4) *Nouvelles Annales*, IX, a. 1890. — *Analisi algebrica*, a. 1894, p. 133.

(5) ABEL. *Œuvres*, II, pag. 199.

e CATALAN [1] disse dover essere $\lim nu_n \log n \ldots \log^m n = 0$, se u_n sia termine generale d'una serie convergente a termini positivi decrescenti; anche questa proposizione è erronea [2]. Io provo dover essere $nu_n \log n \log^2 n \ldots \log^m n = 0$, se u_n sia termine generale di serie convergente a termini positivi e $nu_n \log n \ldots \log^{m-1} n$ sia decrescente: e parmi che poco si potrà aggiungere perchè una serie a termini positivi decrescenti può esser convergente anche se non è nullo il massimo limite del rapporto del suo termine n^{mo} ad $\frac{1}{n \log n}$, oppure al termine n^{mo} di una qualsiasi serie, che sia meno divergente di $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ [3]. La raccolta contiene anche formule nuove relative ai prodotti: ma le proposizioni sui prodotti si deducono facilmente da quelle sulle serie. Le formule storicamente più notevoli furono quasi tutte riportate fedelmente: solo si fece talora qualche cambiamento di lettere per ragione tipografica ed anche per evitare che le formule ravvicinate differissero eccessivamente tra loro nell'aspetto: furono pur soppresse condizioni non necessarie; p. es., al § 3, non trovansi le condizioni superflue $\lim v_n = 0$, per la P16, e $\lim v_n u_n = 0$, per la P52, che si trovano invece nelle corrispondenti proposizioni originali. Qualche proposizione, che può sembrare insignificante, s'è messa perchè utilizzabile in quistioni speciali; p. es. le P18, 19 del § 2 pongono in chiara luce l'effetto dell'alterazione dell'ordine dei termini nelle serie e dei fattori nei prodotti infiniti [4]. Qualche proposizione importante è data nelle varie forme, ugualmente convenienti, che ha successivamente ricevute, sebbene le medesime fossero immediatamente, ed in modo evidente, ricavabili l'una dall'altra: tali sono p. es. le P18, 19, 20, 21 del § 3. La P27 del § 2 coincide solo sostanzialmente con la originale, che è:

$$\psi_p = u_p \varphi_p \,.\, \lambda_p = \varphi_p - \varphi_{p+1} \frac{u_{p+1}}{u_p} \,.\, \supset \,.\, \psi_{p+1} = \psi_1 \, e^{\Sigma_1^p \log\left(1 - \frac{\lambda_p}{\varphi_p}\right)}.$$

Prima di finire voglio ancora rilevare che l'uso del massimo e minimo limite [5], e dei limiti superiore ed inferiore mi hanno permesso di dare alla maggior parte delle proposizioni un grado di perfezione, che prima non avevano.

F. GIUDICE.

---

(1) Comptes Rendus, a. 1856.

(2) PEANO. *Calcolo differenziale*, a 1884, pag. XVII.

(3) *Giornale Battaglini*, a. 1890, pag. 286.

(4) V. *Giornale Battaglini*, a. 1889, pag. 342.

(5) Il concetto di max lim. e di min lim. trovasi già in CAUCHY; *Analyse Algébrique*, pag. 132; ed in ABEL; *Œuvres*, II, pag. 198.

INDICE

§ 1. Somme e prodotti, differenze e quozienti, dei diversi ordini.
§ 2. Generalità sulle serie numeriche.
§ 3. Serie a termini positivi.
§ 4. Serie a termini positivi decrescenti.
§ 5. Prodotti infiniti.
§ 6. Serie a termini imaginarii.

Alcune espressioni risguardanti le serie e gli equivalenti simboli di logica matematica.

Serie a termini positivi . = . Q f N.
» » reali . = . q f N.
» » imaginarii . = . q' f N.
Termine n^{mo} della serie u . = . u_n.
Somma dei primi n termini della serie u . = . Σu_n.
Somma della serie u . = . Σu_∞.
Resto n^{mo} della serie u . = . $\Sigma u_\infty - \Sigma u_n$.
La serie u è convergente . = . $\Sigma u_\infty \, \varepsilon \, q'$.
» divergente . = . $\Sigma u_\infty = \infty$.
La serie u è assolutamente convergente . = . $\Sigma \operatorname{mod} u_\infty \, \varepsilon \, Q$.
» semplicemente » . = . $\Sigma u_\infty \, \varepsilon \, q' . \Sigma \operatorname{mod} u_\infty = \infty$.
La serie u è indeterminata . = . $\operatorname{num} \lim_{n=\infty} \Sigma u_n > 1$.
(*) La serie u è più divergente della serie v . = . $\lim \frac{\Sigma u_n}{\Sigma v_n} = \infty$.
» » convergente » . = . $\lim \frac{\Sigma u_\infty - \Sigma u_n}{\Sigma v_\infty - \Sigma v_n} = 0$.

(*) Cesàro. Accademia dei Lincei, seduta 5 febbraio, 1888.

Hermann Grassmanns

Gesammelte mathematische und physicalische Werke

Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, und unter Mitwirkung der Herren: Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. Ersten Bandes erster Theil, Leipzig, Teubner 1894, pag. XII+435, prezzo 12 Marchi.

L'annunzio della pubblicazione delle opere complete di Grassmann, sotto il patrocinio dell'Accademia delle Scienze di Sassonia, fu accolto con piacere da tutti i matematici, e specialmente da coloro che si propongono di perfezionare i metodi geometrici.

La Geometria analitica cartesiana fu certo un grande progresso. Ma da lungo tempo si osservò che essa tratta le questioni geometriche per via indiretta, e spesso con lunghi ragionamenti e formule complicate arriva a risultati facilissimi ad ottenersi colla geometria sintetica elementare. Questa osservazione trovasi a più riprese nelle opere di Leibniz, il quale anzi tentò colla sua *characteristica geometrica* di porvi rimedio. « Je ne suis pas encor content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geométrique ou lineaire, qui nous exprime directement *situm,* comme l'Algèbre exprime *magnitudinem.* » (*).

Ma questa, come altre idee di Leibniz, impiegò assai tempo a maturare; e il lavoro più profondo che abbiasi su questo soggetto è senza dubbio l'*Ausdehnungslehre* pubblicato dal Grassmann or sono appunto cinquant'anni. Quantunque l'opera del Grassmann sia del tutto

(*) Leibniz a Huygens, 8 sett. 1679.

originale, alcune sue idee si trovano in libri anteriori. Le forme di prima specie, o somme di punti, spettano al Möbius. L'idea di vettore, la loro somma e il loro prodotto per numeri immaginarii al Bellavitis. Lo stesso prodotto esterno di due vettori (bivettore) è stato studiato qualche anno prima dal De Saint Venant, e prima ancora dal nostro Chelini. Spetta al Grassmann il merito di avere studiato un sistema generalissimo ed organico di operazioni comprendenti come caso particolare le precedenti.

Ma, se i sistemi di calcolo geometrico che precedettero Grassmann si diffusero poco, meno ancora si diffuse il metodo suo. Durante la vita del professore ginnasiale di Stettin, nessuno se ne occupò, se si eccettua qualche voce isolata sorta nell'ultimo decennio della sua vita. E invero la sua tendenza all'astrazione, il suo modo filosofico di presentare le questioni, la sua forma espositiva insomma, rendono la lettura della sua opera assai difficile e penosa.

Più fortunato fu il suo successore Hamilton. La sua idea dei quaternioni è del tutto originale; ma i calcoli relativi finiscono per coincidere con quelli del Grassmann, con qualche varietà di notazione. Così nelle applicazioni alla fisica, il prodotto di due vettori, secondo Hamilton, figura solamente ora per la sua parte scalare, ed ora per la sua parte vettoriale; la prima è il prodotto interno (a meno del segno), e la seconda il prodotto esterno dei vettori, secondo Grassmann. L'Hamilton brilla anche per la sua bella espositiva, ed i suoi metodi si diffusero con sufficiente rapidità; un numero grandissimo di autori li applicò a tante questioni di Geometria, di Meccanica e di Fisica matematica. È specialmente nella teoria dell'Elettricità e del Magnetismo che essi paiono fatti apposta per rappresentare nel modo più chiaro e semplice i fenomeni fisici.

Ma, secondo parecchie persone che conoscono i due metodi, e tale è pure la mia opinione, a tutti gli usi cui si prestano i quaternioni di Hamilton, si presta pure il metodo di Grassmann, e coi vantaggi della più grande generalità e semplicità dei concetti fondamentali, e della maggiore brevità delle notazioni. Al giorno d'oggi i metodi di Grassmann vanno sempre più rapidamente diffondendosi, e non passa mese che non si pubblichi una qualche opera o nota, o qualche nuova applicazione. Alcune delle idee di Grassmann, quale il prodotto interno, furono poi ritrovate, indipendentemente da lui, da autori di Meccanica.

Però la diffusione di questi nuovi metodi, atti a trattare per via più semplice e intuitiva le questioni di Geometria, di Meccanica, di Fisica matematica, è meno rapida di quanto si desidererebbe da chi ama i progressi della scienza. La ragione sta in ciò che per ben giudicare di siffatti metodi, occorre esserne del tutto padroni, e di averli appli-

cati in più occasioni; o come mi diceva un mio valente insegnante, questi metodi sono come un nuovo strumento messo in mano ad un operaio; se l'operaio usò per lungo tempo della sua vita un dato strumento, se ne rende così facile il maneggio, che gli riesce preferibile ad uno strumento più perfezionato, ma nuovo, col quale debba ancora impratichirsi. Alle nuove generazioni spetterà l'uso di questi strumenti più perfezionati.

Intanto l'edizione completa delle opere di Grassmann non mancherà di far conoscere meglio i suoi metodi; e molti che si limitarono finora a nominarlo con un certo rispetto, vorranno penetrare più addentro nelle sue opere. Questa edizione era tanto più desiderata, inquantochè la sua *Ausdehnungslehre* del 1862 era da tempo esaurita; e difficile rinsciva la ricerca di altri suoi scritti disseminati in varii periodici scientifici.

Il primo impulso a questa edizione fu dato dal prof. F. Klein nel 1892, in una seduta dell'Accademia delle Scienze di Lipzia; e la sua pubblicazione fu promossa da quest' Accademia, dall' editore Teubner, dalla famiglia Grassmann, e dai vari scienziati, il cui nome figura nel frontispizio, e che si assunsero la redazione delle varie parti dell'opera. Il volume ora uscito (1ª parte del 1° volume), contiene l'*Ausdehnungslehre* del 1844, colle aggiunte della seconda edizione del 1878; e la *Geometrische Analyse*, del 1846. Contiene inoltre prefazione, osservazioni ed indice dell'editore, ed il ritratto del Grassmann. La seconda parte del 1° volume che contiene l'*Ausdehnungslehre* del 1862, sarà possibilmente publicata in principio del venturo anno. Gli altri volumi non tarderanno a comparire.

Possa questa nuova edizione delle opere di Grassmann, servire a meglio far conoscere e stimare i servizii ch'egli rese alla Matematica.

G. Peano.

Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga.

di GINO FANO.

Di ritorno dall'aver passati alcuni mesi in Germania all'Università di Gottinga, che occupa certamente, fra tutte quelle tedesche, uno dei primissimi posti, ho pensato che non sarà forse discaro ai lettori della *Rivista* di avere qualche notizia sugli insegnamenti che vi si impartiscono, e sulle usanze e consuetudini che sono quivi in vigore. E se qualcuno di essi avesse effettivamente un tal desiderio, io sarò ben lieto se colle pagine che seguono avrò contribuito a soddisfarlo.

Nelle Università tedesche l'insegnamento della matematica (e non solo di questa, ma anche di ogni altra disciplina) si informa soprattutto alla famosa « AKADEMISCHE FREIHEIT », della quale professori e studenti vanno tanto alteri. — Questa libertà d'insegnamento e di studio, che permette all'insegnante di scegliersi entro limiti certo assai ampi l'argomento delle sue lezioni, e allo studente di inscriversi, dentro e fuori della Facoltà cui appartiene, a quei corsi che più gli piacciono o l'interessano, non si ritrova certo, così completa almeno, in nessun altro paese del mondo; non in Italia, non in Francia, non in Inghilterra; qualche traccia appena ne ritroviamo negli Stati del Nord (Danimarca, Svezia e Norvegia); e perfino nella libera America non si è fatto che un primo passo in questa via nell'Università recentemente aperta a Chicago. Per quanto più specialmente si riferisce all'insegnamento della matematica, la *akademische Lehrfreiheit* ha per conseguenza che non si nominano professori di algebra o di geometria projettiva, di calcolo infinitesimale, di analisi o di geometria superiore, ma semplicemente professori di *matematica*, ciascuno dei quali va svolgendo di semestre in semestre quegli argomenti che le sue speciali tendenze e ricerche, talvolta anche i desiderî degli studenti che alle sue lezioni assistono, oppure altre circostanze qualsiansi, più gli consigliano [1]. I corsi tenuti in un semestre qualunque si continuano forse,

---

[1] E i diversi professori non vengono nemmeno nominati, come da noi, per concorso. Le Facoltà stesse, quando vi rimane un posto vacante, invitano

ma certo non si rifanno nel semestre successivo; potranno però ripetersi (e si capisce) dopo un periodo più o meno lungo, per cura dello stesso insegnante o di qualche altro.

Da questo lato noi siamo dunque colle Università tedesche, in piena opposizione. Quale dei due sistemi sia il migliore, io francamente non mi sento di dirlo. Probabilmente da una parte e dall'altra vi sono vantaggi e inconvenienti. Sono certo immensi i vantaggi del sistema in uso nelle Università tedesche, sistema che permette di evitare molti guai, fra noi continuamente lamentati. Ma anche il sistema tedesco ha i suoi inconvenienti, e per quanto a Gottinga soprattutto si sia fatto e si faccia tutto il possibile per rimediarvi, non mi pare tuttavia che si sia ancora riesciti a porvi riparo completo.

In primo luogo è chiaro che con un campo così vasto, e anzi sempre più vasto, dal quale i singoli insegnanti, a volte anche non troppo numerosi, devono trarre l'argomento delle loro lezioni, non sarà sempre possibile, o almeno non sarà facile dare nella scelta la dovuta importanza ai corsi elementari, basi di ogni altro insegnamento, e ripetere questi stessi corsi in modo che sempre agli studenti sia dato di assistervi fin dal principio dei loro studi. La divisione dell'anno in due semestri, e la possibilità di avere nell'uno e nell'altro dei due studenti nuovi del tutto allo studio della matematica, rendono questa difficoltà ancor maggiore. A questo inconveniente gravissimo si cerca dapertutto di ovviare il meglio possibile; spesso si invitano o si incaricano i liberi docenti o i professori più giovani di tenere corsi elementari, e a Gottinga si è stabilito anzi in questo senso un certo qual turno fra i diversi insegnanti. Così nel semestre invernale 1893-94 si ebbe un corso di *Calcolo differenziale* e uno di *Geometria projettiva*, e al primo fece seguito nel semestre estivo quello di *Calcolo integrale*, mentre nello stesso tempo il prof. WEBER dava principio a un corso di « *Einleitung*

---

direttamente il tale o il tal altro a venirlo a coprire. È in ciò principalmente che si esplica la pur limitata autonomia amministrativa delle Università tedesche; autonomia limitata, in quanto che il *Kurator* o cancelliere (rappresentante del Governo) vi esercita un vero e proprio ufficio di sorveglianza su tutta quanta la gestione economica, ma alla quale le Università stesse hanno pur sempre un certo diritto, poichè, almeno in parte, vivono di redditi propri. E di questo diritto appunto esse si valgono per aumentare, quando sia il caso, gli stipendi dei professori, e chiamare a sè o trattenere i più insigni. Va da sè che un invito (*Ruf*) ad altra Università (la quale offra, come sempre avviene, condizioni migliori) richiede in generale un aumento di stipendio per parte dell'Università minacciata, perchè il professore rimanga.

in die höhere Mathematik », corso che verrà continuato nell'inverno prossimo, e nel quale vengono esposti gli elementi della geometria analitica e del calcolo infinitesimale, ma collo scopo precipuo (e conviene notarlo) di darne un'idea non tanto agli studenti di matematica, quanto a quelli di chimica e di scienze naturali, che più non possono (o non dovrebbero) oggigiorno restare del tutto estranei agli studi matematici. Ma la seconda parte di questo corso non potrà esser seguìta con profitto — e si capisce — da chi non ha assistito alla prima, e fra gli altri corsi annunciati per l'inverno 1894-95 solo quello di geometria descrittiva sarà adattato ai nuovi studenti (1). E per quanto nei primi semestri sia molto consigliato lo studio delle materie complementari (*Nebenfächer*), sarebbe tuttavia desiderabile che uno studente di matematica potesse assistere già nel primo semestre a qualche corso principale oltre la geometria descrittiva, alla quale il più delle volte egli non sarà nemmeno del tutto nuovo.

In Italia questo inconveniente non può presentarsi. I corsi elementari — che sono in sostanza quelli stessi prescritti per il conseguimento della licenza in scienze fisico-matematiche (2) — vengono tenuti regolarmente ogni anno, e comprendono sempre, su per giù, le stesse cose fondamentali. In Francia questi stessi insegnamenti vengono già dati nel corso di *Mathématiques spéciales*, una delle tante suddivisioni delle ultime classi del Ginnasio. In Danimarca (ossia a Kopenhagen) gli studenti li ricevono nella Scuola Politecnica, dove si trattengono due o tre anni, e solo dopo cominciano a seguire i corsi universitari. E una parte importantissima hanno i corsi elementari anche nelle diverse Università degli Stati Uniti d'America (cfr. ad es. gli Annuari delle Università di *Wisconsin*, *California*, ecc.).



Ma c'è anche un altro inconveniente, che può diventar grave (3). In mezzo a tanti corsi, e tanto svariati, non è facile orizzontarsi, e tanto più difficile è questo per lo studente novello, il quale a mala pena

---

(1) Il prof. SCHÖNFLIES terrà però anche un corso di algebra, più o meno elevato secondo gli studenti che si presenteranno per seguirlo.

(2) Più, forse, la meccanica razionale.

(3) Potrebbe forse sembrare a prima vista che, colla libertà lasciata ai diversi professori, si avesse anche a deplorare nell'insegnamento sia la mancanza di un'unità di indirizzo, sia uno qualunque dei tanti inconvenienti, che potrebbero appunto provenire dal non essere i diversi insegnamenti

saprà (e forse nemmen tanto) che il corso di calcolo infinitesimale deve esser seguìto ad es. prima di quello di meccanica, sia pur elementare, e quello di geom. analitica prima di uno sulla teoria generale delle curve e superficie. Va bene che tutti gli insegnanti sono sempre prontissimi ad aiutare i giovani coi loro consigli e a dirigerli nella scelta dei corsi, ma non tutti i giovani hanno il coraggio o quel tanto di iniziativa che occorre per rivolgersi a loro, e alcuni, molti anzi, si contentano a volte di escire dall'imbarazzo come meglio possono, da soli [1], o coll'aiuto di qualche studente più anziano sì, ma che potrà anche dar loro per inesperienza dei consigli assai poco opportuni [2]. E se a quest'incertezza in cui ogni studente deve trovarsi da principio (e a volte anche più tardi) aggiungiamo la mancanza, talora, di certi corsi elementari, e l'abitudine degli studenti tedeschi (che potrà anche avere il suo lato buono) di cambiare ogni momento di Università, non potremo certo meravigliarci di trovare a volte studenti che parlano, e anche con cognizione di causa, di funzioni più o meno trascendenti e di equazioni differenziali, mentre d'altra parte non sanno che esista un teorema di Cartesio per le equazioni algebriche, e non sono capaci di tener dietro ai più semplici ragionamenti di geometria projettiva!

Per rimediare a quest'inconveniente gravissimo i professori dell'Università di Gottinga hanno compilato e pubblicato uno *Studienplan*, che viene distribuito man mano a tutti i nuovi studenti, e che si cerca anzi di diffondere dovunque il più possibile. Lo scopo di questo *Studienplan* è definito nettamente dalle sue prime parole:

« *Wir geben den Herrn Commilitonen, die sich für das höhere*

---

fra loro coordinati. Ma, a Gottinga almeno, i vari corsi vengon sempre stabiliti, semestre per semestre, di comune accordo fra i diversi insegnanti, che si riuniscono a tale scopo, in tempo debito, in apposita seduta; sicchè da questo lato — salvo quel po' che è detto sopra a proposito dei corsi elementari — non vi sono certo inconvenienti da lamentare.

(1) Val la pena di riferire una risposta che ebbi a questo proposito da un giovane studente, che non era neppure dei meno intelligenti: « Comincio « a andare a parecchi corsi; dove capisco, mi fermo; dove non capisco, « smetto ».

(2) Questa difficoltà diventa poi maggiore, e anzi addirittura enorme, nelle Università più grandi, dove da un lato i corsi sono in molto maggior numero (come p. e. a Berlino, dove per l'estate scorso erano annunciati ben 19 corsi di matematica, senza contare quelli di astronomia, meccanica e fisica matematica), e d'altra parte anche le relazioni personali cogli insegnanti diventano assai più difficili.

« *Lehramt in Mathematik und Physik vorbereiten wollen, einen Weg-*
« *weiser durch das weite Gebiet dieser Wissenschaften, dem sie während*
« *ihrer Studienzeit folgen können. — Es ist nicht die Absicht, einen*
« *genauen Studienplan zu entwerfen,...* » ma solo di dare « *einen*
« *Ueberblick über die Gesammtheit der Fächern, die im Laufe einiger*
« *Semester in den Vorlesungen der hiesigen Universität vorgetragen*
« *werden...* »

Con questo *Studienplan* il compito di ogni studente rimane molto facilitato, e l'imbarazzo in cui esso può trovarsi da principio molto diminuito. Certo che qualche difficoltà rimane sempre, e non si può davvero meravigliarsi, se a volte il fatto solo di un corso annunciato sotto un nome diverso basta a sconvolgere un po' le idee di qualche studentino; ma con tutto ciò lo *Studienplan* dell'Università di Gottinga è sempre un lavoro assai utile ed accurato, del quale val la pena di discorrere un po' più a lungo.



In una breve introduzione allo *Studienplan* si dànno alcune avvertenze generali, e fra le altre si raccomanda ai futuri insegnanti di scuole secondarie (e sono i più!) di non perder d'occhio questa loro missione avvenire, e di ben notare l'importanza delle odierne scienze esatte per la cultura generale da un lato, e per la luce che da un altro lato anche questioni elevate possono gettare su questioni elementari, che direttamente interessano il professore di Ginnasio. — Viene poi una prima parte, o parte generale, nella quale si discorre dei corsi elementari, della necessità di ritornare da sè sulle lezioni udite e di rivedere con cura gli appunti presi, del numero dei corsi a cui in ogni semestre si può o conviene assistere, dei corsi complementari, dei seminari ed esercitazioni pratiche, e infine anche della necessità di completare da sè la propria cultura, soprattutto colla lettura attenta di opere originali. La seconda parte tratta dei *corsi,* che vengono divisi in tre categorie: Corsi elementari (*Anfangsvorlesungen*) che vengono tenuti — o almeno dovrebbero esserlo — ogni anno; corsi più elevati, di carattere generale (*allgemeine Vorlesungen*), che si ripetono ogni due o tre anni, e corsi speciali (*Specialvorlesungen*), che mutano secondo lo stato della scienza e le tendenze personali dei diversi insegnanti, sicchè non è possibile stabilire per essi un turno determinato.

Come corsi elementari sono notati: *Geometria analitica, Calcolo differenziale e integrale,* e *Meccanica;* più la *Einleitung in die höhere Mathematik,* della quale ho già discorso.

Come *allgemeine Vorlesungen* sono notati invece, con brevi illu-

strazioni, i corsi seguenti: *Algebra, Teoria dei numeri reali e complessi, Geometria projettiva e descrittiva* ([1]), *Geometria infinitesimale, calcolo integrale* (nelle sue parti più elevate), *Teoria delle funzioni, Meccanica superiore* (e particolarmente *Teoria di Hamilton*), *Teoria del potenziale, Equazioni alle derivate parziali,* diversi corsi di fisica matematica (*elettricità, ottica, acustica,...*), *astronomia generale, calcolo delle probabilità.* A questi sarebbero ancora da aggiungere i corsi compresi sotto il nome di *Enciclopaedy der Elementarmathematik,* i quali avrebbero appunto lo scopo di gettar luce da un punto di vista alquanto più elevato su questioni di matematica elementare ([2]).

Quanto infine ai corsi *speciali*, ne sono dati diversi esempi, tolti fra quelli tenuti negli ultimi semestri, sia nel campo dell'Algebra (*Teoria degli invarianti, numeri algebrici*), sia in quello della Geometria, della Teoria delle funzioni, dell'Astronomia, della Fisica matematica. — Poche parole sono poi ancora dedicate ai corsi complementari, e in particolare alle *philosophische* e alle *naturwissenschaftliche und geographische Vorlesungen*, che mentre da un lato servono di complemento agli studi matematici propriamente detti, dall'altra formano anche parte importantissima della cultura generale ([3]).



Da queste poche notizie non sarà difficile rilevare che fin dai corsi elementari si manifestano in Germania, nell'insegnamento della matematica, abitudini e tendenze alquanto diverse dalle nostre. Molto ci

---

([1]) Ogni due o tre anni soltanto dunque il corso di Geometria projettiva; e così quello di Algebra, ecc.

([2]) A questo gruppo di corsi apparterrebbe precisamente quello tenuto nell'estate scorso dal prof. KLEIN sotto il titolo: *Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie.* In questo corso furono trattate alcune questioni sulla possibilità o meno di eseguire determinate costruzioni geometriche (raddoppiamento del cubo, trisezione dell'angolo, quadratura del circolo) con determinati mezzi. Le questioni proposte si traducono, com'è noto, in determinati problemi analitici, e così p. e. il caso in cui si disponga, come generalmente avviene, della sola riga e compasso, conduce a discorrere della risoluzione di certe equazioni per radicali quadratici. Ma costruzioni che colla sola riga e compasso non si possono ancora eseguire, diventano invece possibili quando si disponga di mezzi più elevati, e lo stesso numero π (che HERMITE e LINDEMANN dimostrarono non essere algebrico) si può oggi *costruire* coll'*integrafo* di ABDANK ABAKANOWICZ.

([3]) Per la parte relativa ai *Seminari,* cfr. più avanti.

sarebbe da discorrere su questo argomento; ma io mi limiterò a far qui notare una cosa sola. Da noi è parte importantissima dell'insegnamento elementare (ossia del primo biennio) la *Geometria projettiva,* la quale assai di spesso, forse anzi sempre, viene studiata già nel primo anno di corso. E si può quasi dire che è questa (insieme alla Geometria analitica, colla quale anzi in certe Università forma — ed è bene assai! — un corso solo) la materia, sulla quale si concentrano quasi tutti gli sforzi del primo anno. L'Algebra non è (in molte parti almeno) che la continuazione naturale (a volte anche la ripetizione) di quanto i giovani hanno già appreso nei Licei e negli Istituti Tecnici, e il calcolo infinitesimale viene quasi sempre rimandato al secondo anno. — In Germania invece si mettono gli studenti novelli subito alle prese col calcolo; si insegna loro fors'anche nello stesso tempo (e senza troppo insistervi) un po' di geometria analitica, e la geometria projettiva, soprattutto se trattata sinteticamente, la si rimanda a più tardi, salvo poi non occuparsene affatto o quasi, se intanto lo studente acquista, come spesso avviene, un sacro orrore per tutto ciò che sa anche solo lontanamente di geometria, invece di essere pura e purissima analisi. — Da questo lato dunque le consuetudini italiane mi sembrano forse preferibili. La geometria projettiva mi sembra ottima ginastica della mente, e offre anche ai giovani un numero grandissimo di questioni facili e pur interessanti, che sono assai atte a infondere in essi l'amore alla scienza. Invece il calcolo infinitesimale è materia forse più astrusa, e sarà meglio e più facilmente gustata da giovani che hanno già compiuto un anno di studio nelle Università, senza tener conto poi dell'opportunità di conoscere già prima, e a fondo, gli elementi della geometria analitica, piuttosto che andarseli studiando, più o meno in fretta, man mano che occorrono o che si rendono utili nelle applicazioni (1).



D'altra parte però è innegabile che la *Lern-und Lehrfreiheit* delle Università tedesche offre dei vantaggi grandissimi, dei quali a chiunque

(1) Lo studio sollecito del calcolo infinitesimale è richiesto però in Germania da una ragione che per noi non sussiste. Per l'esame di Stato, che spesso viene dato dopo circa otto semestri di studio, si richiedono delle cognizioni di fisica matematica molto superiori a quelle che gli studenti acquistano di solito nelle nostre Università, dove in un anno solo ben pochi argomenti possono venir trattati. E i diversi corsi che a tal uopo devono venir seguiti richiedono tutti, naturalmente, che i giovani ne abbiano già seguito prima uno di meccanica, e prima ancora, quindi, di calcolo infinitesimale. Da ciò la necessità di cominciare presto cogli elementi di quest'ultimo.

sarà facile rendersi ragione. È in questo modo che l'insegnante può condurre davvero i giovani nelle regioni più elevate della scienza, e particolarmente in quelle che a lui sono più famigliari, continuando di semestre in semestre un dato corso o gruppo di corsi, tendente a mettere in luce un dato capitolo o ramo di scienza. È così ad es. che l'illustre KLEIN colle sue lezioni sulla *Geometria non euclidea* (1889-90), sulle *Superficie di Riemann* (1891-92), sulle *Equazioni differenziali lineari* (1890-91 e 1893-94), in parte anche colla *Höhere Geometrie II* (1893), e infine colla *Zahlentheorie* del prossimo semestre invernale, va facendo luce nel campo, assai oscuro da principio, ma che si va ora man mano rischiarando, delle FUNZIONI AUTOMORFE.

Riassumendo, la differenza fra l'insegnamento italiano e quello tedesco si può forse caratterizzare (in tesi generale) così: In Italia si dànno agli studenti di matematica delle ottime basi, ma appunto perchè a queste si pone ogni cura (e un po' anche per altre ragioni) manca di solito il tempo di condurre i giovani molto avanti nella scienza, e non sono frequenti i casi in cui nei corsi di analisi, di geometria, di meccanica superiore, o in quello di fisica matematica si può esporre qualche capitolo di scienza un po' elevato. In Germania invece si sorvola spesso sulle basi (e più specialmente su certe parti di queste), e si lascia quasi agli studenti di buona volontà la cura di completarsele, ma si ha così anche il modo di condurre chi ha potuto e saputo procurarsi queste basi molto più avanti (in certi campi almeno) di quanto da noi avviene.

L'uno e l'altro dei due sistemi ha i suoi lati buoni. Ma non sarebbe possibile, conservando pur com'è, o quasi, il nostro primo biennio, riordinare il secondo in un modo analogo a quello ch'è in uso nelle Università tedesche, e con idee quindi che riescirebbero certo più conformi alle esigenze della scienza moderna? — La questione viene qui anche a collegarsi strettamente con quella vecchia e tanto dibattuta degli *esami*.



Nelle Università tedesche non si dànno esami speciali sui singoli corsi, come avviene da noi, e un tal sistema sarebbe infatti assolutamente incompatibile col modo in cui l'insegnamento viene impartito. Colla libertà che ad ogni insegnante è lasciata nella scelta dell'argomento delle sue lezioni, non si potrebbe prescrivere tutt'al più che un *numero minimo* di esami speciali, e anche questa sarebbe una prescrizione senza alcun valore pratico e affatto insufficiente come garanzia delle cognizioni acquistate e della diligenza dimostrata dai vari studenti. Tutto è riposto quindi negli *esami di Stato*, i quali aprono la via, secondo i casi, all'insegnamento o all'esercizio delle diverse professioni.

Per quanto si riferisce in particolare agli studi fisico-matematici, l'esame di Stato è un *primo passo* verso l'idoneità all'insegnamento nelle scuole secondarie (*Gymnasien. Realgymnasien, Realschulen*); dico *un primo passo*, perchè, superato anche l'esame, occorre pur sempre un anno almeno di tirocinio, prima di poter essere inscritti nell'elenco degli aspiranti a un tale insegnamento. I posti che si vanno man mano rendendo vacanti vengon poi dati ai diversi *candidati,* per ordine di anzianità. In Prussia quest'elenco è tenuto anzi separatamente per ciascuna delle diverse provincie; ma da qualche anno in qua può anche esservi inscritto chi abbia dato l'esame in un'Università non Prussiana, purchè sia egli stesso Prussiano di nascita. All'esame di Stato i giovani possono presentarsi (in Prussia almeno) dopo sei semestri di studio; ma è ben raro il caso che qualcuno vi si presenti prima dell'ottavo semestre. Gli esami sono scritti e orali. I primi consistono in un certo numero di lavori scritti, su temi assegnati, per svolgere i quali si lascia del tempo parecchio. I secondi comprendono materie principali (ad es. matematica e fisica), materie secondarie (scienze naturali) e cultura generale (storia della letteratura, filosofia, religione); in tutto otto o nove materie, sicchè il lavoro di preparazione riesce sempre assai faticoso.

Ben distinta dall'esame di Stato è invece la *laurea,* la quale conferisce il titolo, puramente onorifico, di *doctor*, colla qualifica della Facoltà in cui questo titolo è stato conseguito; secondo i casi dunque, *doct. theol.*, *doct. med., doct. jur.* o *doct. phil.* Quest'ultima laurea corrisponde da sola alle nostre in lettere e in filosofia, in matematica, fisica, chimica e scienze naturali, essendo i relativi insegnamenti tutti compresi nella *philosophische Facultät.* Per questa laurea si richiede come da noi una dissertazione scritta su argomento di libera scelta, e un esame orale. Per quanto si riferisce alla dissertazione, è forse difficile dire, in tesi generale, quali siano le esigenze, tanto più che queste possono anche variare a seconda degli insegnanti e delle Università; tutto sommato però, credo non ingannarmi dicendo che si richiede qualcosa di più che non da noi [1] [2].

---

[1] E ciò è provato indirettamente anche da una disposizione, la quale prescrive che tutte le dissertazioni di Laurea siano date alla stampa.

[2] La distinzione fra *Laurea* ed *esame di Stato* è comune anzi, come ho detto, a tutte le Facoltà. Così p. e. nella Facoltà medica l'esame di Stato conferisce il titolo di *approbirter Arzt*, ossia *medico* nel vero senso della parola, e la laurea quello di *doct. med.*, ossia *dottore in medicina.* Si può dunque esser medico senza esser dottore in medicina, e viceversa. — Nella Facoltà medica l'esame di Stato si divide però in tre parti, che vengon date successivamente in epoche diverse, e vertono anche rispettivamente su diversi gruppi di materie.

Un riordinamento del nostro secondo biennio di matematica nel senso accennato poc'anzi, come l'ebbe anche a propugnare in questa stessa *Rivista,* circa un anno fa, l'Egr. Prof. PASCAL (1), porterebbe come conseguenza necessaria l'abolizione degli esami speciali del 3° e 4° anno, e l'introduzione di una specie di esame di Stato, che abilitasse all'insegnamento nelle scuole secondarie. Ma questa seconda riforma, come lo stesso Prof. PASCAL ha giustamente osservato, completerebbe la prima nel modo più opportuno, e ciò anche per parecchie altre ragioni, sulle quali sorvolo, rinviando il lettore all'articolo citato del Prof. PASCAL. — Ma anche un altro vantaggio ci sarebbe dato in questo modo di raggiungere; si potrebbe cioè tenere la Laurea in Matematica, come cosa indipendente dall'esame di Stato, a un livello molto più alto di quello che oggi non sia. Non vi è nessun paese del mondo dove una Laurea (e specialmente una Laurea in matematica) si acquisti così *a buon mercato* come in Italia. Per non parlare della Germania, mi basti dire che in Francia si *laureano* soltanto persone di una certa età, le quali abbiano presentato un lavoro di vera e indiscussa importanza scientifica, e a prova di questo sta il fatto che nella Facoltà di Parigi le Lauree in matematica non furono in tutto il ventennio 1871-90 che circa *ottanta* (2). In Inghilterra la Laurea è anche un titolo onorifico, non facile a conseguirsi; in Danimarca e in Svezia essa abilita senz'altro alla libera docenza, ed esige perciò nel candidato requisiti corrispondentemente superiori. E infine nella maggior parte delle Università Americane il titolo di *Doctor of Philosophy* (3) non è che un *Third degree*, mentre il *first degree,* per il quale si richiedono pure, come da noi, quattro anni di studio, non conferisce che il titolo di *Bachelor* (bacceliere) *of Arts, of Science, of Letters*, e in mezzo ai due sta ancora il *Second degree,* cioè il *Master of Arts (Magister artium),* o anche *of Letters,* o *of Science.* Soprattutto sarebbe bene che la *Laurea* fosse qualcosa di diverso da un complemento *necessario* e spesso *immediato* di un determinato corso di studi (e tale è proprio sgraziatamente da noi! (4)); e a questo proposito mi piace anzi ripor-

---

(1) Cfr. questa *Rivista;* vol. III (1893): p. 170-179.

(2) E forse una mezza dozzina nelle provincie! Questo mostra pure come tutto il movimento, anche scientifico, della Francia tenda a concentrarsi in quella gran capitale!

(3) Questo nome unico dato anche qui a una Laurea, che corrisponde da sola a parecchie fra le nostre, non mi sembra certo costituire una differenza sostanziale.

(4) E la dissertazione richiesta, per la quale non si hanno a volte che esigenze assai limitate, non muta certo sensibilmente lo stato di cose. Un

tare le parole seguenti, lette sul *Catalogue of the University of Wisconsin* (1893-94).

This degree (Doctor of Philosophy) will not, however, be conferred simply on the ground of the completion of study for the prescribed length of time. Special attainments are requisite; particularly the power of original thought and indipendent investigation..... A thesis must be presented, which shall give evidence of original research and indipendent treatment...

Parole veramente sagge e assennate. E io vorrei davvero augurarmi che presto la si pensasse così anche in Italia!...



Ma c'è anche un altro punto, relativo all'insegnamento della matematica in genere, del quale voglio far cenno, sia pur brevemente.

Nelle Università si trattano oggigiorno le più alte questioni scientifiche, e si discutono a volte anche problemi che segnano l'estremo limite al quale la scienza per il momento è giunta. Ma a lato delle Università propriamente dette (o meglio delle Facoltà di Scienze) vi sono altri Istituti d'Istruzione Superiore, gli Istituti Tecnici Superiori (Scuole d'Applicazione per gli Ingegneri), nei quali lo studio della scienza pura non è certo spinto tanto innanzi, ma si dà invece la preferenza a quei problemi speciali, che più direttamente interessano i bisogni della vita pratica. E, non più a fianco, ma solo un gradino più in basso delle Università stanno anche gli Istituti, troppo spesso dimenticati, d'istruzione secondaria, nei quali altri ingegni, meno in vista forse, ma non per questo a volte meno benemeriti, sudano a dirozzare forse ancora quelle menti che, salito poi l'ultimo gradino, andranno a ricevere negli Istituti Superiori il pane della scienza, pura o applicata. Or bene, a chi le stà a fianco e a chi a breve distanza la segue, sempre conviene che l'Università stenda le braccia per reciproco aiuto; *reciproco*, in quanto che, da una parte e dall'altra, sempre vi sarà da guadagnare.

In primo luogo, per far progredire la scienza, bisogna risolvere dei problemi; e per quanto di questi ultimi non ve ne siano mai troppo pochi, non sarà male ricordare che la maggior parte di essi ci vennero dati e ci vengon proposti tuttora dalle diverse scienze applicate [1] e

---

lavoro particolare (*thesis*) si richiede del resto anche per il conseguimento del titolo di *Bachelor*.

[1] E fra queste sarebbe naturalmente prima la *fisica*. Diceva appunto il Klein, che ciò che è importante per la fisica lo è quasi sempre anche per la matematica; *e viceversa!*

dai bisogni della vita pratica. Da ciò dunque la necessità, o almeno la somma convenienza per gli Istituti destinati anche a far progredire la sola scienza pura, di tenersi continuamente a contatto di quegli altri, nei quali le scoperte già fatte ricevono il battesimo dell'utilità pratica, e che ad essi potranno in pari tempo fornire ottimo argomento di nuovi studi e nuove ricerche. D'altra parte è pur chiaro, che anche a questi ultimi Istituti il contatto coi primi, i cui risultati essi hanno continuamente da applicare, non potrà essere che di giovamento.

In secondo luogo poi basterà osservare che, mentre le Università ricevono dalle scuole secondarie i loro studenti, esse devono in pari tempo fornire a queste gli insegnanti, sicchè un buon accordo fra le une e le altre diventa, nonchè utile, quasi indispensabile. L'insegnante di Università che meglio conosca i bisogni delle scuole secondarie, meglio potrà addestrare i suoi studenti ad insegnare quivi un giorno; e l'insegnante di queste, al quale sia dato modo di mantenersi in rapporti colle Università, potrà più facilmente tener dietro ai progressi scientifici, e adempiere anche meglio al proprio ufficio.

Ciò posto, si potrebbe domandar come vanno le cose in Germania da questi due lati. In Italia, mentre le Università mantengono pur sempre rapporti più o meno stretti colle Scuole d'Applicazione per gli Ingegneri, esse vivono anche e prosperano senza quasi curarsi degli Istituti d'istruzione secondaria. In Germania invece avviene tutto il contrario, quanto al primo lato, si è ancora indietro; ma si è fatto e si fa molto dal secondo.

In Germania vi è oggi ancora separazione quasi assoluta fra le Università e gli Istituti Tecnici Superiori (*Technische Hochschulen*). Per quanto da tempo parecchio sia invalso l'uso di affidare in questi Istituti a scienziati insigni la cattedra di matematica, pure il fatto stesso che essi si trovano generalmente (con poche eccezioni, ad es. *Charlottenburg-Berlino* e *Monaco*) in città prive di altri Istituti Superiori contribuisce già non poco al loro isolamento; e solo in questi ultimi tempi si sono alzate alcune voci contro questo stato di cose. Mirabile esempio di fusione invece la Francia, dove i matematici più illustri del secolo sono tutti esciti dall' *École polytechnique!*

Ma molto avremmo invece da imparare dalla Germania per quanto si riferisce ai rapporti fra Istituti secondari e Superiori. In seguito a una disposizione del governo Prussiano ogni anno nelle vacanze Pasquali gli insegnanti di scuole secondarie sono invitati a riunirsi, quelli delle province orientali a Berlino, quelli delle province occidentali a Gottinga; e lì rimangono circa quindici giorni, a contatto degli insegnanti universitari. Conferenze e lezioni permettono da un lato ai numerosi convenuti di tenersi al corrente dei tanti e tanti progressi che la scienza

va continuamente facendo, mentre d'altra parte anche gli insegnanti di Università hanno modo di rendersi esatto conto dei bisogni e dei desideri dei primi. Le poche lezioni si aggirano naturalmente su quegli argomenti che più possono interessare i convenuti; così a Gottinga nell'anno corrrente il prof. KLEIN ebbe a dimostrare che e e π non sono numeri algebrici; il prof. DRUDE riprodusse le ormai famose esperienze del compianto HERTZ; e altre lezioni tennero i professori di zoologia, botanica, ecc. (1),

***

Sui corsi tenuti quest'anno all'Università di Gottinga non mi tratterrò qui a lungo. — L'Università conta oggi tre professori ordinari di matematica; SCHERING, KLEIN, e WEBER. A questi sono da aggiungere VOIGT, professore di fisica matematica, e SCHUR, di astronomia; Direttori questi rispettivamente della sezione corrispondente del Gabinetto di fisica, e dell'Osservatorio astronomico. SCHERING è anche Direttore del *Gauss' erdmagnetisches Observatorium*, nel quale si fanno osservazioni e ricerche di magnetismo terrestre.

È professore straordinario SCHÖNFLIES. Liberi docenti durante l'anno 1893-94 erano FRICKE, ora professore alla Scuola Superiore di *Braunschweig;* BURKHARDT, e AMBRONN (*astronomia*). RITTER e BOHLMANN daranno principio al loro insegnamento solo l'inverno prossimo.

Dei due corsi del KLEIN sulla *funzione ipergeometrica* e sulle *equazioni differenziali lineari di 2° ordine*, il primo è già uscito, il secondo uscirà fra breve litografato. Al corso di *Geometria elementare* ho già accennato (in una nota); fu un corso interessante anche dal lato sto-

---

(1) Non sarà fuor di luogo il notare a questo punto, come in Germania già per parecchie vie si sia validamente affermata l'opportunità di non abbandonare gli insegnanti di scuole secondarie al loro destino e all'opera loro individuale, ma di riunirli a determinate epoche, per rinfrescare i loro ricordi scientifici, dai quali l'insegnamento che sono chiamati a impartire troppo spesso rimane discosto, e per allargare possibilmente la loro cultura, secondo lo richiedono i progressi della scienza. Con intendimenti così fatti sorse anche anni sono il *physikalischer Verein* di Francoforte s/m, che indice annualmente riunioni di insegnanti, e provvede a che ad essi siano tenute conferenze, lezioni sperimentali, ecc. E degli interessi generali, materiali e intellettuali, degli stessi insegnanti si occupa assai anche il *Verein zur Vörderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften*, che tenne quest'anno, nelle vacanze di Pentecoste, a *Wiesbaden* la sua terza adunanza generale.

rico, essendovisi fatta parola di matematici di tutti i tempi e di tutte le nazioni, dal vecchio AHMES — vissuto in Egitto ai tempi dei *Re pastori* (2000 a. A. C.?) — che ci lasciò il famoso *Papirus Rhind*, al russo ABDANK ABAKANOWICZ, al quale è dovuto l'*integrafo*, uno dei più recenti e importanti trovati (1) (2).

Fra gli altri corsi, ricorderò quelli del WEBER sui *numeri algebrici*. Nel primo semestre, introdotti i concetti di *numero algebrico* e di *corpo di numeri*, fu trattato principalmente il problema della scomposizione in fattori ideali secondo DEDEKIND. Nel semestre estivo fu oggetto speciale del corso la teoria corrispondente di KRONECKER (3).

Complemento importantissimo dei corsi sono le esercitazioni o *seminari*, che corrisponderebbero press'a poco alla nostra *Scuola di Magistero*, o meglio a ciò che quest'ultima era in talune nostre Università (p. e. a Torino) alcuni anni or sono (4). Un estratto dello Statuto del *mathematisch-physikalisches Seminar* è annesso allo *Studienplan*, di cui ho già parlato, e ne definisce lo scopo colle parole seguenti:

Die Aufgabe des Seminars ist, die Studierenden zur Selbstthätigkeit anzuregen, und sie in der Anwendung des in den Vorlesungen Gelernten zu unterweisen.

Questo scopo viene raggiunto mediante conferenze degli stessi insegnanti, o anche esercitazioni diverse da essi dirette e consistenti in lavori scritti e conferenze per parte degli studenti. Ciascuno dei diversi *Direttori* (RIECKE, SCHERING, VOIGT, KLEIN, SCHUR, WEBER) si

---

(1) *Es zeigt sich so unsere Wissenschaft erhaben über dem Wechsel der Zeit und der Nationalität.....*

(2) Giovərà forse insistere ancora sullo scopo principale di questo corso, già accennato di sopra: *Es handelte sich darum, ob durch die Fortschritte der Mathematik neues Licht über die elementaren Fragen welche den Lehrer interessieren (geometrische Constructionen, Quadratur des Kreises) geworfen ist, ob die moderne Mathematik nicht bloss Dinge für Specialisten behandelt, sondern auch Tragweite für elementare Fragen besitzt. Eine positive Auffassung in Bezug hierauf beigebracht zu haben, und dem Pessimismus, welcher den Werth der modernen Mathematik für die Allgemeinheit leugnet, entgegengetreten zu sein, mag der Hauptzweck dieser Vorlesung gewesen sein!*

(3) SCHERING tenne anche un corso di *teoria dei numeri;* SCHÖNFLIES di *geometria projettiva* e di *geometria infinitesimale*, VOIGT di *meccanica* e *teoria del potenziale;* ecc.

(4) Fino al 1889. Fu allora appunto che nuove disposizioni ministeriali le prefissero come scopo l'addestramento dei giovani all'insegnamento secondario.

attiene, a seconda dei casi, all'uno o all'altro sistema; e così mentre Klein, e a volte anche Weber, seguono quello delle conferenze tenute da studenti, e Voigt, non a torto, preferisce (nella sua materia) il sistema dei lavori scritti (problemi di meccanica, ecc.), Riecke va svolgendo invece qualche capitolo speciale di fisica (*ottica geometrica, esperienze di Hertz*, ecc.), e Schering e Schur iniziano gli studenti ai lavori nei rispettivi osservatorî.

Nel Seminario diretto dal Prof. Klein le conferenze ebbero, nell'inverno 1893-94, argomenti svariati, collegantisi però in parte colle lezioni sulla *funzione ipergeometrica* che lo stesso Klein andava allora dettando (1). Nell'estate successivo esse si aggirarono in gran parte sulle funzioni sferiche (*Kugelfunctionen*) e loro applicazioni nella fisica matematica (2).

Coloro che sono ascritti al Seminario possono anche usufruire, volendolo, della Sala di lettura (*Mathematisches Lesezimmer*) e relativa biblioteca. Scopo di questa istituzione è di mettere a disposizione degli studenti soprattutto quei libri e periodici che più frequentemente occorre di consultare; e appunto per non venir meno a questo scopo, e lasciare sempre tutto a disposizione di tutti, è assolutamente proibito darne i libri in prestito. Chi desidera avere a casa qualche volume può rivolgersi alla biblioteca generale (*Universitätsbibliothek*) che lo accorda senza difficoltà. Per l'uso della Sala di lettura è stabilita una tassa di *tre* marchi per semestre, e di *cinque* se si desidera avere un posto speciale

---

(1) Woods: *Ueber Minimalflächen;* Snyder: *Ueber Kugelgeometrie;* Furtwaengler: *Reduction der ganzzahligen ternären cubischen Formen.* Poi: Jaccottet: *Ueber assymptotische Ausdrücke von Functionen;* Lorey: *Convergenz und Divergenz der hypergeom. Reihe* F (a, b, c, x) *im Falle* x = 1; Sig^na^ Winston: *Die Zusammenhangsformeln für die Hauptzweige der* P-*Function;* Beke: *Ueber homogene lineare Differentialgleichungen, speciell über Analogien zwischen denselben und den algebraischen Gleichungen;* Sig^na^ Chisholm: *Ueber sphärische Trigonometrie, speciell über mögliche geometrische Deutungen der gewöhnlichen Gleichungen.....* Infine per parte dello stesso Prof. Klein: *Erklärung der Einrichtungen und Sammlungen von Lesezimmer und Modellkammer.*

(2) *Ganze rationale räumliche Kugelfunctionen; Kugelflächenfunctionen; Kugelfunctionen als Specialfälle der hypergeom. Function; Entwickelung einer willkürlichen Function des Ortes auf der Kugelfläche in eine Reihe nach Kugelfunctionen; Vergleich dieser Reihen mit Fourier'schen Reihen;...* E poi la parte storica: *Die Gaussische Theorie des Erdmagnetismus; die Laplace'sche Entwickelung nach Kugelfunctionen; die alten Untersuchungen von* Sturm *und* Liouville *über lin. Diffgleich. 2ter Ordnung;* ecc.

e fisso (con cassetto); nell'uno e nell'altro caso si ricevono le chiavi della sala, sicchè vi rimane libero l'accesso a tutte le ore del giorno. Nella sala sono raccolti anche i sunti (manoscritti o litografati) di parecchi corsi tenuti dal Klein, sopratutto in quest'ultimo decennio (credo anzi di tutti i corsi, dal 1884 in poi), nonchè quelli delle conferenze di seminario, redatti dagli stessi studenti che rispettivamente le hanno tenute. Fra i libri sinora raccolti e fra quelli che si vanno man mano acquistando hanno sempre una certa parte quelli che trattano di scienze applicate, e anche di matematiche elementari. E fra i nuovi acquisti hanno larga parte anche i periodici, specialmente tedeschi e francesi (di italiani, sgraziatamente, nessuno!) per un valore complessivo di ben 300 marchi all'anno.



Non sarà male forse ch'io chiuda queste poche pagine con qualche cenno sulla *vita che si vive* a Gottinga, i cui particolari potrebbero interessare qualcuno.

Ciò che Gottinga offre di più curioso e caratteristico è l'insieme di tutti gli stranieri quivi convenuti da ogni parte d'Europa e del mondo. L'Università, che non è certo in Germania tra le più frequentate, non conta più di 800 studenti, e fra questi quelli di matematica non sono in media che da venti a trenta. Ma gli stranieri, specialmente Inglesi e Americani, hanno in questo numero decisamente il sopravvento; e parecchi hanno anzi già conseguìto in patria titoli o gradi accademici, o almeno seguìto un corso completo di studi Universitari. Fra gli stranieri, coi quali ebbi la fortuna di imbattermi, mi piace ricordare il Prof. Beke della *Staatsoberrealschule* di Budapest, ritornato di propria volontà studente dopo non pochi anni di insegnamento; e oltre a lui ricorderò pure una gentile rappresentante della bionda Albione, figlia dell'*alma mater* Camdridge. Fra gli altri paesi d'Europa, vidi rappresentate la Francia e la Svizzera, la Danimarca e la Polonia. Numerosi poi gli Americani, di tutti gli Stati del Nord e del Sud, dell'Est e dell'Ovest; e fra questi anche altra signorina, A. B., proveniente dall'Università di Wisconsin. Antichi scolari hanno anche a volte occasione di ripassare da Gottinga, e vi si trattengono più o meno lungamente; così p. es. nell'estate scorso vi rimase oltre un mese il Prof. Osgood dell' Università di Camdridge Mass., e alcuni giorni il Prof. Bolza dell'Università di Chicago.

I buoni rapporti, e non solo fra studenti, ma anche fra studenti e insegnanti, sono cementati da riunioni extrauniversitarie (o almeno all'infuori dell'orario e delle lezioni regolamentari), nelle quali gli stessi

professori sono spesso ben lieti di sedere in mezzo ai loro studenti. Fra queste riunioni, che in Germania sono larga parte della vita scientifica, ricorderò quelle della *Mathematische Gesellschaft* e del *Mathematischer Verein.*

La fondazione della *Mathematische Gesellschaft* risale a circa due anni or sono. Ne sono membri tutti gli insegnanti di matematica e fisica, e, per di più, vi sono anche temporaneamente aggregati tutti coloro — più che altro stranieri — che hanno seguìto in una qualsiasi Università un corso completo di studi fisico-matematici. La società si riunisce, di solito, una volta per settimana; e uno dei membri o aggregati tiene una conferenza, su ricerche originali se ne ha argomento, o se no su altro, p. e. su qualche opera escita di recente, o su qualche complesso di lavori, dei quali egli si propone di dare agli altri notizia. Aggiungo qui in nota i titoli di alcune fra le conferenze tenute in questi ultimi due semestri (1).



Il *Matematischer Verein* è un'associazione di studenti, e come tale partecipa a molte fra le consuetudini, a volte tanto caratteristiche, di

---

(1) KLEIN: *Bericht über Amerikanishe Reise (Aug.-Sept. 1893); Ueber Fortscritte der functionentheor. Behandlung der Diffgleich. im letzten Jahrzehnt (lineare Differentialgleichungen u. Diffgleich. 1ter Ordnung); Ueber die in der Vorlesung üb. lineare Diffgl. bez. der Hermite'schen Gleichung gegebenen Eutwickelungen;* FRICKE: *Ueb. ternäre u. quaternäre indefinite quadratische Formen; Ueb. Vorträge auf der Münchener Versammlung der D. Math. Ver.*; RITTER: *Ueb. den Beweis des Satzes: « Bei stetiger Aenderung eines Fundamentalbereiches mit linearer Kantenzuordnung ändern sich auch die zugehörigen automorphen Functionen stetig »*; FANO: *Ueb. die neuesten Untersuchungen der italienischen Geometer; Ueb. eigene Unters. im Geb. der Liniengeom.;* SOMMERFELD: *Ueb. die Methode der Hauptlösungen in der mathem. Physik; Ueb. Funct. reeller Veränd. welche durch part. Diffgl. definirt sind;* SCHÖNFLIES: *Ueb. Hexagonoide; Ueb. regelm. u. lückenlose Anordnung von Parallelepipeden;* BEKE: *Bemerkungen zur Picard-Vessiot'schen Theorie der lin. Diffgleich;* WEBER: *Ueb. algebraische Zahlen nach der Kronecker'schen Auffassung, und üb. die Beziehung der Kronecker'schen zur Dedekind'schen Theorie;* BURKHARDT: *Ueb. mathem. Unterricht in Frankreich; Ueb. neuere Resultate von Picard aus der Theorie der Diffgleich.;* HEEGARD: *Ueb. abzählende Geometrie* (nach Vorlesungen von Prof. *Zeuthen* in Kopenhagen im Jahre 1891); SCHILLING: *Ueb. den Fundamentalbereich der Schwarz'schen* s- *Function im Falle complexer Exponenten*; ecc.

queste stesse associazioni; notevole esempio del come scienza e divertimento possano stendersi la mano. Non è istituzione recente, chè anzi, dopo esser passato per vicende più o meno liete ed aver vista talora in pericolo la sua stessa esistenza, giunse poche settimane fa a celebrare felicemente il 25° anniversario della sua fondazione. E per il momento le sue sorti sembrano assicurate.

Dello Statuto di questo *Mathematischer Verein* riproduco qui i primi articoli:

§ 1. *Der « mathematische Verein zu Göttingen »..... hat zum Zweck, das gegenseitige Bekanntwerden der Mathematiker Göttingens zu vermitteln, sowie denselben Gelegenheit zu geben, sich im freien Vortrage und in Demonstrationen an der Wandtafel zu üben.*

§ 2. *Diesen Zweck sucht der Verein durch wöchentliche Versammlungen zu erreichen, die mit Ausnahme der gesetzlichen Ferien jeden Donnerstag Abend stattfinden und um 8 1/4 Uhr beginnen...*

§ 3. *Es ist wünschenswerth, dass die Mitglieder des Vereins nach Schluss des wissenschaftlichen und geschäftlichen Theiles des Abends sich zu geselligem Beisammensein vereinigen.*

Lo scopo dell'associazione è stabilito dal § 1, e sull'opportunità di raggiungerlo non ho bisogno di insistere. Le sedute di cui al § 2 hanno luogo regolarmente ogni settimana, e comprendono tre parti: *Geschäftlicher Theil*, *wissenschaftlicher Theil* e *gemüthlicher Theil*, quest'ultima in conformità del § 3.

La seconda parte (parte scientifica) consiste per lo più in una conferenza tenuta da qualche studente, su tema di libera scelta (1). Non si può in queste conferenze pretendere gran cosa, perchè il più delle volte si tratta di studenti ancor giovani, ma per questi appunto esse costituiscono un ottimo esercizio. Quando nessuno si presenti per tenere la conferenza in una data sera, qualcuno dei più giovani (che non sono ancora alle prese cogli esami) può venirvi *comandato*.

A far parte del *Verein* sono ammessi tutti gli studenti regolarmente immatricolati, *in quanto già non appartengano a qualche altra associazione.* Ma alle sedute possono anche assistere, e assistono anzi assai di

---

(1) Talvolta anche da ex-socî (*Alte Herren*); p. e. Dr RITTER: *Ueber Grundbegriffe und Randbedingungen des logarithmischen Potentials;* Dr FELGENTRAEGER: *Ueb. moderne Fernrohrkonstructionen;* ecc. Ricorderò ancora i temi di alcune conferenze elementari dell'ultimo semestre: *Ueb. Systeme von linearen Gleichungen; Ueb. die Theorie der reciproken Polaren; Ueb. das Berührungsproblem des Apollonius; Ueb. Basisapparate; Ueb. Hygrometrie;.....*

spesso, coloro che già furono studenti e soci (*alte Herren*), e ora hanno raggiunto il grado di libero docente o talvolta di professore (e professore ordinario). È così appunto che si affermano vieppiù i cordiali rapporti fra studenti e insegnanti.

Il *Verein* possiede anche una biblioteca, dalla quale i soci possono avere libri in prestito.

Quanto al *gemüthlicher Theil*, non entrerò qui in dettagli, perchè non ne è il luogo, e troppi d'altra parte ce ne vorrebbero. Mi basti dire che la seduta è regolata dalla disciplina comune a tutte le associazioni di studenti, e che anche il *canto* vi ha larga parte (1) (2).

Queste riunioni, nelle quali prima si attende colla dovuta serietà alla parte scientifica, e poi tutti si dànno alla più gaia spensieratezza, sono veramente qualcosa di caratteristico e non si ritrovano, ch' io sappia, in nessun altro paese. Bello sarebbe invero il poterle introdurre anche fra noi, perchè sia pure (come lì avviene) col bicchiere alla mano, cultura e abilità didattica dei giovani studenti sempre ci guadagnano. Ma non è possibile imporre di qua delle Alpi, da un momento all'altro o in breve periodo di tempo, ciò che di là è consuetudine invalsa da secoli e tramandata di generazione in generazione!

Colognola ai Colli (Verona), settembre 1894.

---

(1) E una certa parte ha nel canto anche la scienza! Cfr. ad es. le *Mathem. Lieder* (*Der Pytagoreische Lehrsatz*, $R^2\pi$, *die Riemann'sche Fläche!.....*).

(2) Come associazione di studenti, il *mathem. Verein* appartiene, con altre quattro (*Classisch philologischer Verein*, *Akad. historischer Verein*, *Akad. theologischer Verein*, *Theol. Verein* CONCORDIA), al *Verband wissenschaftlicher Vereine*, che è uno dei tanti *gruppi* aventi diritto ad essere rappresentati nell'*Ausschuss der Studentschaft*.

Intorno ad alcune identità algebriche.

§ 1.

Nella raccolta di *formule di matematica* (*), pubblicate insieme col vol. III di questa *Rivista*, si trovano registrate nei nn. 62 e 63 della pagina 14, le identità

$$(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5\,ab\,(a+b)\,(a^2+ab+b^2)$$
$$(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7\,ab\,(a+b)\,(a^2+ab+b^2)^2$$

le quali dipendono, come casi particolari, dal già noto teorema:

Il polinomio $(a+b)^k - a^k - b^k$ *è divisibile per* a^2+ab+b^2 *quando* k *è della forma* $6\,t \pm 1$, *ed è divisibile per* $(a^2+ab+b^2)^2$ *quando* k *è della forma* $6\,t+1$.

Non so se fosse parimente conosciuta la verità del teorema analogo:

Il polinomio $(a+b)^k + a^k + b^k$ *è divisibile per* a^2+ab+b^2 *quando* k *è della forma* $6\,t \pm 2$, *ed è divisibile per* $(a^2+ab+b^2)^2$ *quando* k *è della forma* $6\,t-2$.

Sta nel fatto che non si trovano nella raccolta le identità

$$(a+b)^2 + a^2 + b^2 = 2\,(a^2+ab+b^2)$$
$$(a+b)^4 + a^4 + b^4 = 2\,(a^2+ab+b^2)^2$$
$$(a+b)^8 + a^8 + b^8 = 2\,(a^2+ab+b^2)\,(a^6+3\,a^5\,b+10\,a^4\,b^2+ 15\,a^3\,b^3+10\,a^2\,b^4+3\,ab^5+b^6)$$
$$(a+b)^{10} + a^{10} + b^{10} = (a^2+ab+b^2)^2\,(2\,a^6+6\,a^5\,b+27\,a^4\,b^2+ 44\,a^3\,b^3+27\,a^2\,b^4+6\,ab^5+2\,b^6)\text{, ecc.}$$

che pure ne sono casi particolari.

È certo poi che, posto

$$D_m = a^m + a^{m-1}\,b + \ldots + ab^{m-1} + b^m$$

(*) *Formulario di Matematica*, II, § 4, P 62, 63.

l'uno e l'altro dei teoremi sopraenunciati sono conseguenze dei due teoremi più generali:

I. *Il polinomio*

$$(1) \qquad (a^{m-1} + a^{m-2} b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1})^k - a^{(m-1)k} - a^{(m-2)k} b^k - \ldots - a^k b^{(m-2)k} - b^{(m-1)k}$$

è divisibile per D_m *se* k *è un numero dispari e primo con* $m+1$, *ed è divisibile per* D^2_m *se è inoltre* $k \equiv 1 \pmod{m+1}$.

II. *Il polinomio*

$$(2) \qquad (a^{m-1} + a^{m-2} b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1})^k + a^{(m-1)k} + a^{(m-2)k} b^k + \ldots + a^k b^{(m-2)k} + b^{(m-1)k}$$

è divisibile per D_m *se* k *è un numero pari e primo con* $m+1$, *ed è divisibile per* D^2_m *se è inoltre* $k \equiv 1 \pmod{m+1}$.

A questi teoremi dimostrati nella mia Nota intitolata: *Alcune proprietà dei coefficienti polinomiali*, ecc. (*), mi propongo di far qui un'aggiunta (**), determinando valori di n, minori di m, tali che

$$D_n = a^n + a^{n-1} b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

sia un divisore dei polinomi (1) e (2).

§ 2.

Si premetta che quando $m+1$ è un multiplo di $n+1$, essendo $a^{m+1} - b^{m+1}$ divisibile per $a^{n+1} - b^{n+1}$, sarà altresì D_m multiplo di D_n, e quindi *i polinomi* (1) *e* (2) *ammetteranno siffatti divisori* D_n, *allorquando essi siano divisibili per* D_m.

Passando poi a considerare il caso particolare di $n = m-1$, e perciò

$$D_n = D_{m-1} = a^{m-1} + a^{m-2} b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1},$$

è chiaro che, avendosi

$$(a^{m-1} + a^{m-2} b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1})^k \equiv 0 \pmod{D_{m-1}},$$

la condizione necessaria e sufficiente affinchè i polinomi (1) e (2) siano divisibili per D_{m-1} è espressa da:

$$a^{(m-1)k} + a^{(m-2)k} b^k + \ldots + a^k b^{(m-2)k} + b^{(m-1)k} \equiv 0 \pmod{D_{m-1}}.$$

Ma questa congruenza è soddisfatta soltanto quando k ed m sono

(*) *Giornale di Matematiche.* Vol. XXXI, pag. 119-136.

(**) Essa è contenuta nei §§ 2, 3 e 4. I rimanenti paragrafi sono dedicati allo studio di altre identità.

primi fra loro, e perciò *se si avvera questa condizione, ambedue i polinomi* (1) *e* (2) *saranno divisibili per* D_{m-1}.

A ciò devesi, per esempio, che nel caso speciale di $m=2$, se k è un numero dispari, i polinomi $(a+b)^k - a^k - b^k$ e $(a+b)^k + a^k + b^k$ sono ambedue divisibili per $a+b$. E così si ha, ad un tempo:

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3\,ab\,(a+b)$$
$$(a+b)^3 + a^3 + b^3 = (a+b)\,(2\,a^2 + ab + 2\,b^2)$$

ed, insieme colle due identità citate in principio del § 1, si ha pure

$$(a+b)^5 + a^5 + b^5 = (a+b)\,(2\,a^4 + 3\,a^3\,b + 7\,a^2\,b^2 + 3\,ab^3 + 2\,b^4)$$
$$(a+b)^7 + a^7 + b^7 = (a+b)\,(2\,a^6 + 5\,a^5\,b + 16\,a^4\,b^2 + 19\,a^3\,b^3 + 16\,a^2\,b^4 + 5\,ab^5 + 2\,b^6)\,.$$

Ma se si vuole che il polinomio (1) o il polinomio (2) ammettano il divisore D_{m-1}, *insieme col divisore* D_m, ossia (essendo D_m e D_{m-1} primi fra loro) se si vuole che l'uno o l'altro dei polinomi (1) e (2) siano divisibili per il prodotto $D_{m-1}\,D_m$, allora, ricordando che affinchè il polinomio (1) sia divisibile per D_m, il numero k dev'essere dispari e primo con $m+1$, si giunge alla seguente conclusione:

Il polinomio (1) *è divisibile per il prodotto* $D_{m-1}\,D_m$ *solamente quando* k *è un numero dispari e primo coi numeri* m *ed* $m+1$.

Al contrario, poichè il polinomio (2) è divisibile per D_m se k è un numero pari e primo con $m+1$, ne consegue che $m+1$ dev'essere dispari ed m pari; e quindi è impossibile che k ed m siano primi fra loro. Dunque:

Il polinomio (2) *non è mai divisibile per il prodotto* $D_{m-1}\,D_m$.

Ciò concorda, nel caso di $m=2$, colle identità notate nel § precedente, nelle quali si trovano divisibili per $(a+b)\,(a^2+ab+b^2)$ i soli polinomi della forma $(a+b)^k - a^k - b^k$.

È altresì facile stabilire che solamente il polinomio (1) è divisibile per i fattori a, b ed $a+b$.

Esempio. — Se si pone $m=4$ e $k=3$, il numero k è certamente primo con m ed $m+1$, e perciò il polinomio

$$(a^3 + a^2\,b + ab^2 + b^3)^3 - a^9 - a^6\,b^3 - a^3\,b^6 - b^9$$

è divisibile per il prodotto $D_3\,D_4$. Effettivamente si trova

$$(a^3 + a^2\,b + ab^2 + b^3)^3 - a^9 - a^6\,b^3 - a^3\,b^6 - b^9 =$$
$$3\,ab\,(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)\,(a^4 + a^3\,b + a^2\,b^2 + ab^3 + b^4) =$$
$$3\,ab\,(a+b)\,(a^2+b^2)\,(a^4 + a^3\,b + a^2\,b^2 + ab^3 + b^4)\,.$$

Il fattore $a+b$ che, come è stato osservato, deve sempre appartenere al polinomio (1) è, in questo caso, un divisore del fattore $a^3 + a^2\,b + ab^2 + b^3$.

§ 3.

L'esistenza di altri valori di n, per i quali tanto il polinomio (1) quanto il polinomio (2) sono divisibili per D_n, è resa manifesta dal seguente teorema:

Se $n+1$ *è un numero primo con* k, *ed è un divisore di* m *o di* $m+1$ (*), *il polinomio* (1) *o il polinomio* (2), *secondochè* k *è dispari o pari, è divisibile per* D_n.

Il polinomio (1) *è divisibile per* D_n, *anche se* $n+1$ *è primo con* k, *ed è un divisore di* $m-1$.

Infatti, indicando con q e r il quoziente e il resto della divisione di $m-1$ per $n+1$, sarà

$$m-1=(n+1)q+r, \text{ con } r<n+1$$

e mediante i principii fondamentali delle congruenze non è difficile riconoscere che si ha, rispetto al modulo D_n

$$a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1} \equiv b^{(n+1)q}(a^r+a^{r-1}b+\ldots+ab^{r-1}+b^r),$$

dalla quale si trae

$$(3) \qquad (a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1})^k \equiv b^{(n+1)qk}(a^r+a^{r-1}b+\ldots + ab^{r-1}+b^r)^k.$$

Così pure si trova

$$a^{(m-1)k}+a^{(m-2)k}b^k+\ldots+a^k b^{(m-2)k}+b^{(m-1)k} \equiv b^{(n+1)qk}(a^{rk}+ a^{(r-1)k}b^k+\ldots+a^k b^{(r-1)k}+b^{rk})+qb^{[(n+1)(q-1)+r+1]k}(a^{nk}+a^{(n-1)k}b^k+\ldots + a^k b^{(n-1)k}+b^{nk}).$$

Ora, essendo per ipotesi $n+1$ primo con k, e quindi

$$a^{nk}+a^{(n-1)k}+\ldots+a^k b^{(n-1)k}+b^{nk} \equiv 0 \pmod{D_n}$$

l'ultima congruenza si semplifica e diviene

$$(4) \qquad a^{(m-1)k}+a^{(m-2)k}b^k+\ldots+b^{(m-1)k} \equiv b^{(n+1)qk}(a^{rk}+a^{(r-1)k}b^k+ \ldots+b^{rk}).$$

In virtù di questa congruenza e della (3), i polinomi (1) e (2) ammetteranno il divisore D_n, se saranno divisibili per D_n, rispettivamente, i polinomi:

(*) Il caso di $n+1$ divisore di $m+1$, non si ridurrà *sempre* a quello considerato nel principio del § 2, perchè ora non viene affatto supposto che i polinomi (1) e (2) siano divisibili *anche* per D_m.

(5) $(a^r + a^{r-1} b + \ldots + ab^{r-1} + b^r)^k - a^{rk} - a^{(r-1)k} b^k - \ldots -$
$a^k b^{(r-1)k} - b^{rk}$

(6) $(a^r + a^{r-1} b + \ldots + ab^{r-1} + b^r)^k + a^{rk} + a^{(r-1)k} b^k + \ldots +$
$a^k b^{(r-1)k} + b^{rk}$.

Dovendo esser $r < n+1$, si vede subito che si può prendere:

1°) $r = n$, perchè le due parti $(a^r + a^{r-1} b + \ldots + ab^{r-1} + b^r)^k$ e $\mp (a^{rk} + a^{(r-1)k} b^k + \ldots + b^{rk})$ che costituiscono i polinomi (5) e (6) risultano separatamente divisibili per D_n.

2°) $r = n - 1$, perchè in questo caso la divisibilità dei polinomi (5) e (6) per D_n è provata dai teoremi I e II del § 1, sostituendovi ad m il numero n.

Le condizioni $r = n$, $r = n - 1$, trasformano l'eguaglianza $m - 1 = (n+1) q + r$, rispettivamente in $m = (n+1)(q+1)$ ed $m + 1 = (n+1)(q+1)$, e queste indicano appunto che *$n+1$ è un divisore di m o di $m+1$*, in conformità della prima parte del teorema enunciato.

Supponendo invece $r = 0$, e quindi $m - 1 = (n+1) q$, ossia *$n+1$ divisore di $m - 1$*, si verifica facilmente che i secondi membri delle congruenze (3) e (4) si riducono eguali a $b^{(n+1)qk}$, onde può dirsi che, per $r = 0$, soltanto il polinomio (5) si annulla o è divisibile per D_n; e così è dimostrata anche la seconda parte del teorema.

§ 4.

Facendo uso di un teorema ausiliario dimostrato nella Nota già citata (*) si giunge a provare:

1°) *Che i polinomi* (1) *e* (2) *non sono mai divisibili per* D_n^2, *se* $n = m - 1$.

2°) *Che essi sono divisibili per* D_n^2, *se* $n+1$ *è primo con* k *ed è divisore di* $m+1$, *purchè sia inoltre* $k \equiv 1 \pmod{n+1}$.

3°) *Che essi non sono mai divisibili per* D_n^2, *se* $n+1$ *è primo con* k *ed è divisore di* m.

4°) *Che il solo polinomio* (1) *è divisibile per* D_n^2, *se* $n+1$ *è primo con* k *ed è un divisore di* $m-1$, *purchè sia altresì* $k \equiv 1 \pmod{n+1}$.

La dimostrazione di queste proprietà è analoga a quella da me fatta per riconoscere la divisibilità dei polinomi (1) e (2) per D^2_m, e può perciò essere tralasciata (**).

(*) V. *Giornale di Matematiche*, vol. XXXI, pag. 124.

(**) Non è neppur necessario l'intrattenersi sulle altre proprietà che i

Non sarà inutile, invece, il verificare sopra alcuni esempi tutti i risultati fin qui ottenuti.

Esempio 1°. — Per i valori di $m = 4$ e $k = 7$, il polinomio (1) diviene

$$D_3^7 - a^{21} - a^{14} b^7 - a^7 b^{14} - b^{21}.$$

Si riconosce, come nell'esempio dato alla fine del § 2, che questo polinomio è divisibile per il prodotto $D_3 D_4$, e dalla seconda parte del teorema dimostrato nel § precedente, osservando che per $n = 2$ si ha che $n + 1$ è divisore di $m - 1$, si deduce che il polinomio stesso è divisibile anche per D_2. Infine dall'essere $7 \equiv 1 \pmod 3$ si conclude che il polinomio dev'essere divisibile anche per D_2^2. E si verifica, infatti, che si ha:

$$D_3^7 - a^{21} - a^{14} b^7 - a^7 b^{14} - b^{21} = 7\, ab\, D_2^2\, D_3\, D_4\, (a^8 + 2\, a^6 b^2 + 3\, a^5 b^3 + a^4 b^4 + 3\, a^3 b^5 + 2\, a^2 b^6 + b^8).$$

Anche in questo caso il divisore $a + b$ del polinomio è incluso in D_3.

Esempio 2°. — Ponendo $m = 6$ e $k = 4$, il polinomio (2) si riduce a

$$D_5^4 + a^{20} + a^{16} b^4 + a^{12} b^8 + a^8 b^{12} + a^4 b^{16} + b^{20}.$$

Esso, in virtù del teorema II (§ 1) è divisibile per D_6, ma non per D_6^2. Supposto $n = 2$, il numero $n + 1 = 3$ è primo con $k = 4$, ed è divisore di $m = 6$, onde, come risulta dalla prima parte del teorema del § 3, il polinomio dev'essere divisibile anche per D_2; ma, per la terza delle proprietà sopraenunciate, non può ammettere il fattore D_2^2. Così si trova:

$$D_5^4 + a^{20} + a^{16} b^4 + a^{12} b^8 + a^8 b^{12} + a^4 b^{16} + b^{20} = 2\, D_2\, D_6\, (a^{12} + 2\, a^{10} b^3 + 3\, a^9 b^3 + 3\, a^8 b^4 + 4\, a^7 b^5 + 5\, a^6 b^6 + 4\, a^5 b^7 + 3\, a^4 b^8 + 3\, a^3 b^9 + 2\, a^2 b^{10} + b^{12}).$$

Esempio 3°. — Se si suppone $m = 5$ e $k = 4$, il polinomio (2) diventa

$$D_4^4 + a^{16} + a^{12} b^4 + a^8 b^8 + a^4 b^{12} + b^{16}.$$

Essendo k ed m, in tal caso, primi fra loro, il polinomio è divisibile (§ 2) per D_4. E dalla prima parte del teorema del § 3 si rileva altresì che il polinomio dev'essere divisibile per D_2, perchè, con $n=2$,

---

coefficienti polinomiali, indicati nella stessa Nota con $k_n^{(m)}$, vengono ad acquistare per la presenza dei divisori D_n e D^2_n nei polinomi (1) e (2), perchè esse sono conseguenze immediate dei teoremi generali ivi stabiliti. (v. l. c. pag. 128 e pag. 134 e 135).

si ha che $n+1$ è un divisore di $m+1=6$. Il polinomio è divisibile altresì per D_2^2 poichè si ha $4 \equiv 1 \pmod 3$. Sussiste infatti l'uguaglianza

$$D_4^4 + a^{16} + a^{12} b^4 + a^8 b^8 + a^4 b^{12} + b^{16} = 2 D_2^2 D_4 (a^8 - a^7 b + 2 a^6 b^2 + 2 a^5 b^3 - a^4 b^4 + 2 a^3 b^5 + 2 a^2 b^6 - a b^7 + b^8).$$

§ 5.

Un'altra formula suscettibile di estensione, trovasi nella medesima pag. 14 della raccolta al n° 60. Essa è

$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

Ed invero, poichè si ha identicamente

$$a^{2(m+1)} - b^{2(m+1)} = (a^{m+1} - b^{m+1})(a^{m+1} + b^{m+1})$$

si potrà, supponendo che $m+1$ sia un numero dispari, dividere il primo membro di questa eguaglianza per $a^2 - b^2$, e i due fattori del secondo membro per $a-b$ ed $a+b$, rispettivamente, dando luogo all'identità:

(7) $$a^{2m} + a^{2(m-1)} b^2 + a^{2(m-2)} b^4 + \dots + a^2 b^{2(m-1)} + b^{2m} = (a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \dots + ab^{m-1} + b^m)(a^m - a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 - \dots - a b^{m-1} + b^m)$$

la quale si riduce a quella surriferita nel caso di $m=2$.

Aggiungasi poi che il primo membro della (7) è della forma

(8) $$a^{mk} + a^{(m-1)k} b^k + a^{(m-2)k} b^{2k} + \dots + a^k b^{(m-1)k} + b^{mk}$$

e, come si sa, questo polinomio è divisibile per

(9) $$a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \dots + ab^{m-1} + b^m$$

quando k ed $m+1$ sono numeri primi fra loro. Se ora si fa l'ipotesi che k sia pari (ciò che assoggetta $m+1$ alla condizione di essere un numero dispari, affinchè possa essere primo con k), è evidente che il polinomio (8) non cambia col sostituirvi $-b$ in luogo di b. Esso pertanto dev'essere divisibile per

(10) $$a^m - a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 - \dots - ab^{m-1} + b^m$$

che è il polinomio in cui si trasforma il (9) colla stessa sostituzione. E poichè i polinomi (9) e (10) sono primi fra loro, ne segue che il polinomio (8) è divisibile anche per il loro prodotto. È adunque chiaro che il teorema espresso dalla (7) è un caso particolare del seguente:

Se m è pari e k è un numero pari e primo con $m+1$, il polinomio (8) *è divisibile per il prodotto dei polinomi* (9) *e* (10) (*).

(*) Questo teorema è analogo ad altri dimostrati nella mia Nota: *Sulla divisibilità dei polinomi*, ecc., v. *Periodico di matematica*, anno VI.

§ 6.

Alla formula (7), in cui m è per ipotesi un numero pari, fa riscontro un'altra per il caso in cui m è dispari. Essa può essere stabilita elementarmente nel seguente modo.

Ammesso che $m+1$ sia un numero pari, si ha

$$\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a^2-b^2}=a^{m-1}+a^{m-3}b^2+a^{m-5}b^4+\ldots+a^2b^{m-3}+b^{m-1}$$

da cui

$$\frac{(a^{m+1}-b^{m+1})^2}{a^2-b^2}=(a^{m-1}+a^{m-3}b^2+\ldots+a^2b^{m-3}+b^{m-1})(a^{m+1}-b^{m+1})=a^{2m}+a^{2(m-1)}b^2+\ldots+a^{m+1}b^{m-1}-a^{m-1}b^{m+1}-\ldots-a^2b^{2(m-1)}-b^{2m}\,.$$

Ma si ha d'altronde

$$\frac{(a^{m+1}-b^{m+1})^2}{a^2-b^2}=\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a-b}\cdot\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{a+b}=(a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots+ab^{m-1}+b^m)(a^m-a^{m-1}b+a^{m-2}b^2-\ldots+ab^{m-1}-b^m)$$

e perciò

(11) $$a^{2m}+a^{2(m-1)}b^2+\ldots+a^{m+1}b^{m-1}-a^{m-1}b^{m+1}-\ldots-a^2b^{2(m-1)}-b^{2m}=(a^m+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2+\ldots+ab^{m-1}+b^m)(a^m-a^{m-1}b+a^{m-2}b^2-\ldots+ab^{m-1}-b^m)\,.$$

La formula $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, che corrisponde ad $m=1$, è il solo caso particolare della (11) che trovasi notato nella raccolta; mentre se, per esempio, si fa $m=3$ vi si trae

$$a^6+a^4b^2-a^2b^4-b^6=(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$$

ed altre simili se ne trarrebbero facendo percorrere ad m la serie dei numeri dispari.

Si osservi ancora che il primo membro della (11) è della forma

(12) $$a^{mk}+a^{(m-1)k}b^k+\ldots+a^{\frac{(m+1)k}{2}}b^{\frac{(m-1)k}{2}}-a^{\frac{(m-1)k}{2}}b^{\frac{(m+1)k}{2}}-\ldots-a^kb^{(m-1)k}-b^{mk}$$

e che in questo polinomio (sempre supposto che m sia dispari) i primi $\frac{m+1}{2}$ termini sono positivi e gli $\frac{m+1}{2}$ termini rimanenti sono negativi. Raggruppando il termine $(n+1)^{esimo}$ positivo col termine $(n+1)^{esimo}$ negativo, può porsi, evidentemente

$$a^{(m-n)k}\, b^{nk} - a^{\frac{(m-2n-1)k}{2}}\, b^{\frac{(m+2n+1)k}{2}} = a^{\frac{(m-2n-1)k}{2}}\, b^{nk} \left(a^{\frac{(m+1)k}{2}} - b^{\frac{(m+1)k}{2}} \right)$$

laonde, facendo inoltre l'ipotesi che k sia un numero pari, ne viene di conseguenza che *il polinomio* (12) *è divisibile per* $a^{m+1} - b^{m+1}$. Da questo si deduce che il polinomio è divisibile tanto per

(13) $$a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + \ldots + ab^{m-1} + b^m$$

quanto per

(14) $$a^m - a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 - \ldots + ab^{m-1} - b^m$$

perchè questi polinomi sono ambedue divisori di $a^{m+1} - b^{m+1}$. Ma non se ne può concludere che il polinomio (12) sia divisibile anche per il loro prodotto, perchè i polinomi (13) e (14) non sono primi fra loro. Ciò nonostante la divisibilità del polinomio (12) per il prodotto dei polinomi (13) e (14) può essere riconosciuta, dimostrando che il polinomio (12), moltiplicato per $a^2 - b^2$, oltre al rimanere divisibile per $a^{m+1} - b^{m+1}$, diviene divisibile anche per $(a^{m+1} - b^{m+1})^2$. Vi si giunge, senza difficoltà, mediante il teorema ausiliario di cui è stato parlato al principio del § 4; e così, in conclusione, può dirsi che la (11) è contenuta come caso particolare nel teorema:

Se m è dispari e k è un numero pari, il polinomio (12) *è divisibile per il prodotto dei polinomi* (13) *e* (14).

Elcia Sadun.

Nuove pubblicazioni.

F. Castellano. — *Lezioni di Meccanica razionale.* Torino, tip. Candelletti, 1894, pag. 512; prezzo L. 12.

F. Porro. — *Astronomia sferica elementarmente esposta.* Pag. XIII+136, Roma, Società editrice Dante Alighieri, prezzo L. 4.

E. Cesàro. — *Introduzione alla teoria matematica della elasticità.* Pag. 214, Torino, Bocca, 1894, prezzo L. 6.

X. Antomari. — *Cours de Mécanique à l'usage des candidats à l'École militaire de Saint-Cyr.* Pag. 268, Paris, Nony et Cie, 1895.

X. Antomari et C. A. Laisant. — *Questions de Mécanique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales.* Pag. 224, Paris, Nony et Cie, 1895.

Jules Tannery. — *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure,* par E. Borel et J. Drach. Pag. 10+350, Paris, Nony et Cie, 1895.

A. Capelli. — *Lezioni di Algebra complementare, ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria.* Pag. XII+526, Napoli, B. Pellerano, 1895, prezzo L. 8.

Fine del Volume IV

RIVISTA

DI

MATEMATICA

EDITA

DA

G. PEANO

Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino

---

Volume V

TORINO

FRATELLI BOCCA

LIBRAI DI S. M.

1895

INDICE

Pag.

Sulla Parte IX del Formulario; Contributo alla teoria dei numeri algebrici (G. FANO) 1
F. Castellano, *Lezioni di Meccanica razionale* (G. PEANO) . . 11
Intorno ad alcune identità algebriche (ELCIA SADUN) 19
Sopra una generalizzazione del teorema di Fermat (G. CORDONE) . 25
Varietà: Il principio delle aree e la storia di un gatto (P.) . . 31
Sull'insegnamento della matematica nei Ginnasi e nei Licei (S. CATANIA) 33
Un capitolo di calcolo differenziale (E. PASCAL) 37
Per un nuovo libro di astronomia sferica (N. JADANZA) . . . 50
Inversion cyclique des fonctions monogènes et holomorphes (R. GUIMARAES) 52
Sulle relazioni di posizione fra punti d'una linea chiusa (G. VAILATI) 75
Charles Henry, *Abrégé de la Théorie des fonctions elliptiques* (G. VALLE) . . , ... 79
Sulla risoluzione delle equazioni numeriche di terzo grado (S. CATANIA) 81
Odoardo Jacoangeli, *Triangolazioni Topografiche e Triangolazioni Catastali* (Ing. VITTORIO BAGGI) 86
Sopra una questione elementare dei giuoco del bigliardo (G. VIVANTI) 87
Sulla trattazione intrinseca delle questioni baricentriche (E. CESÀRO) 90
Sui numeri transfiniti (Estratto d'una lettera di G. CANTOR a G. Vivanti) 104
Lettera di GEORG CANTOR a G. Peano 108
Sull'incommensurabilità, secondo il prof. Gambioli, e su certi libri di testo (E. DE AMICIS) 110
Dr G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* (G. PEANO) 122
Contribuzione al fondamento della Teoria degli insiemi transfiniti (GEORG CANTOR) 129
F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert* (G. VIVANTI) 164
Zum Infinitärcalcul (O. STOLZ) 166
Association internationale pour l'avancement des Quaternions et d'autres méthodes vectorielles 168
Le forme geometriche prospettive (D. FELLINI) 170
Sobre los circolos radicales (Don JUAN J. DHRÀN LORIGA) . . . 173
Elenco bibliografico sull'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann (P.) . 179
Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione (G. VAILATI) 183
Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse (F. D'ARCAIS) 186
Indice dei volumi I-V (1891-1895) 190

RIVISTA DI MATEMATICA

Vol. V. — 1895

Sulla Parte IX del Formulario
Contributo alla teoria dei numeri algebrici.

Proprietà generali dei numeri algebrici. - Corpo di numeri.

§ 1. Definizioni e prime conseguenze.
§ 2. Numeri algebrici interi.
§ 3. Divisibilità dei numeri algebrici interi.
§ 4. Corpo di numeri.
§ 5. Basi.
§ 6. » e determinanti.

Teoria generale dei moduli.

§ 7. Generalità sui moduli e loro divisibilità.
§ 8. Operazioni sui moduli.
§ 9. Classi di numeri rispetto a un dato modulo.
§ 10. Moduli finiti.
§ 11. Ancora sui numeri algebrici interi, e in particolare su quelli di un dato corpo.

Teoria degli ideali in un dato corpo di numeri (h)
secondo Dedekind.

§ 12. Ideali e loro prodotti. Loro divisibilità.
§ 13. Ideali primi fra loro.
§ 14. Ideali primi (assolutamente).
§ 15. Norme degli ideali.
§ 16. Classi di numeri rispetto a un dato ideale.
§ 17. Classi di ideali in un dato corpo.

La Parte IX del *Formulario* ha per iscopo di portare un primo contributo alla teoria importantissima dei *numeri algebrici*. Le proposizioni raccolte furono prese in gran parte dall'ultimo Supplemento (XI)

alle *Vorlesungen über Zahlentheorie* di DIRICHLET-DEDEKIND (4[te] Aufl. Braunschweig, 1894) (¹). Qua e là (e specialmente nei §§ 1-6) mi sono state di grande aiuto anche le lezioni sulla teoria dei numeri algebrici dettate dal Prof. H. WEBER nell'Università di Gottinga durante il semestre invernale 1893-94 (alle quali io ho avuta la fortuna di poter assistere).

Delle denominazioni nuove che compaiono in questa teoria alcune soltanto furono definite nel Formulario, omettendosi invece tutte quelle la cui introduzione non sarebbe stata quivi di alcun vantaggio. Fra queste ultime ricorderò le seguenti:

Divisibilità dei numeri algebrici interi. — Si dice che di due numeri algebrici interi x, y l'uno è divisibile per l'altro, quando il primo è uguale al prodotto del secondo per un terzo numero algebrico intero.

$$x , y \,\varepsilon\, \mathrm{A} \,.\, \supset : x \,\varepsilon\, \text{divisibile per } y \,.=.\, x \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times y$$

Si può parlare anche del *massimo comun divisore* di due numeri algebrici interi x, y. E questo numero $\mathrm{D}(x , y)$ non potrà essere che il z di cui la P11 del § 3 afferma l'esistenza:

$$x , y \,\varepsilon\, \mathrm{A} : z \,\varepsilon\, \mathrm{A} \,.\, x , y \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times z \,.\supset_z .\, z \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times x + \mathrm{A} \times y : \supset .\, z = \mathrm{D}(x , y) .$$

Discriminante (di un sistema di n numeri algebrici contenuti in un $\Omega' x$, dove x è un alg_n). — È il quadrato del determinante della matrice, che si può formare con questi stessi numeri e coi loro coniugati (opportunamente disposti). Il DEDEKIND lo indica colla lettera Δ noi ci siamo limitati a scrivere $\mathrm{Det}^2 y$, $\mathrm{Det}^2 z$, ... (§6 . P1 e seg.). Se gli n numeri scelti in $\Omega' x$ sono in particolare le potenze $x^0 = 1$, x^1, x^2, ... x^{n-1}, questo discriminante coincide col discriminante dell'equazione irriduttibile $fx = 0$, di cui x è radice.

Minimo multiplo comune di due (o più) moduli. — È l'insieme di tutti i numeri comuni a questi stessi moduli.

$$a , b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\supset .\, \mathrm{m}(a , b) = a \frown b .$$

Il DEDEKIND usa la scrittura $a - b$, che noi non avremmo avuto ragione di sostituire all'altra $a \frown b$.

Massimo comun divisore di due (o più) moduli. — È l'insieme di tutte le somme di numeri contenuti rispettivamente nei moduli proposti.

$$a , b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\supset : \mathrm{D}(a , b) = \overline{z \,\varepsilon}\, (x \,\varepsilon\, a \,.\, y \,\varepsilon\, b \,.\, z = x + y \,.-=_{x,y} \Lambda) .$$

(¹) Quest'opera si troverà citata in seguito e nel *Formulario* colla semplice indicazione DEDEKIND.

Il DEDEKIND usa per $\mathrm{D}(a, b)$ la scrittura $a + b$, alla quale noi pure ci siamo attenuti [1]. Questa notazione fu già introdotta del resto, in generale, nell'*Introduction au Formulaire,* § 4. L'operazione ivi indicata non appartiene alla logica pura, ma all'algebra; si può però collegarla coll'operazione logica $\cup$, perchè, indicato con Mod' k il *minimo modulo contenente la classe k,* si ha:

$$a + b = \mathrm{Mod}'\,(a \cup b)\,.$$

Divisibilità dei moduli. — Si dice che un modulo è divisibile per un altro, quando è contenuto in quest'ultimo (nel senso che ogni numero del primo appartiene anche al secondo).

$$a, b\, \varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, \supset : a\, \varepsilon \text{ divisibile per } b \,.=.\, a \supset b\,.$$

Il DEDEKIND usa la scrittura $a > b$.

Molte proposizioni sulla teoria dei *moduli*, che hanno pure la loro importanza, si sono quindi omesse nel Formulario, riducendosi esse, coll'uso delle notazioni $a \cap b$, $a \supset b$, a proposizioni di logica pura, già enunciate nella Parte I. Così p. e. (colle notazioni del DEDEKIND):

$$a, b\, \varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, \supset : a > b \,.\, b > a \,.=.\, a = b\,. \qquad \text{(F. I . § 1 . P3)}$$

$$a - b > a\,. \qquad \text{(» P5)}$$

$$a - b = b - a\,. \qquad \text{(» P8)}$$

$$a > b \,.\, \supset .\, a - b = a\,. \qquad \text{(» P33)}$$

$$a, b, c\, \varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, c > a \,.\, c > b \,.\, \supset .\, c > a - b\,. \qquad \text{(» P34)}$$

Congruenze rispetto a un dato modulo. — Due numeri (algebrici) x, y si dicono *congruenti* rispetto a un modulo a (e si scrive $x \equiv y\ (\mathrm{Mod}\,.\,a)$) quando la loro differenza appartiene a questo modulo. Si ha dunque:

$$x, y\, \varepsilon\, \mathrm{alg} \,.\, a\, \varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, \supset : x \equiv y\ (\mathrm{Mod}\,.\,a) \,.=.\, x - y\, \varepsilon\, a\,.$$

Di queste due notazioni equivalenti, la prima è però meno semplice della seconda, e perciò non ce ne siamo serviti affatto. L'introduzione di essa avrebbe permesso soltanto di dare nuova forma a proposizioni già enunciate, p. e.

$$x\, \varepsilon\, \mathrm{alg} \,.\, a\, \varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, \supset .\, x \equiv x\ (\mathrm{Mod}\,.\,a)\,. \qquad \text{(§7 . P3)}$$

o di enunciarne anche qualche altra, apparentemente nuova, ma già contenuta sostanzialmente nella definizione di modulo; p. e.

---

[1] Di questa, e dell'altra $a - b$, DEDEKIND aveva già fatto uso nella «*Festschrift*»: *Ueber die Anzahl der Ideal-Classen* ... (Braunschweig, 1877).

$x, y, z \varepsilon \text{alg} . a \varepsilon \text{Mod} . x \equiv y, y \equiv z (\text{Mod} . a) . \supset . x \equiv z (\text{Mod} . a)$.
$x, y, x', y' \varepsilon \text{alg} . a \varepsilon \text{Mod}. x \equiv x', y \equiv y' (\text{Mod}. a). \supset . x \pm y \equiv x' \pm y' (\text{Mod} . a)$.

Il concetto primo di *congruenza* introdotto da GAUSS viene a rientrare precisamente in quello così definito; perchè, se x, y, a sono numeri naturali, la scrittura $x \equiv y (\text{Mod} . a)$ significa che la differenza $x - y$ è un multiplo di a, e appartiene perciò al modulo $(\text{n}\, a)$ formato da questi multipli.

La notazione delle congruenze si potrebbe forse usare con qualche vantaggio nel § 16, scrivendo p. e.

$$x \equiv y (\text{id} . a) . = . o(x - y) \supset a . \text{ (1)}$$

La P1 assumerebbe allora quest'altra forma:

$$x \equiv y, x' \equiv y' (\text{id} . a) . \supset . xx' \equiv yy' (\text{id} . a) ;$$

ossia: *Congruenze rispetto a uno stesso* IDEALE *si possono anche moltiplicare membro a membro* (e, in particolare, si possono elevare a una potenza qualunque intera e positiva). E la P2:

$$xy \equiv xy' (\text{id} . a) . ox + a = o . \supset . y \equiv y' (\text{id} . a) .$$

Si può dividere cioè tutta una congruenza per un numero che sia primo coll'ideale (caso particolare del *modulo*); e la P4 direbbe poi ancora che: *Una congruenza* $x u \equiv y (\text{id} . a)$ *ammette sempre una soluzione* u *quande il coefficiente* x *è primo coll'ideale* a .

Ideali primi fra loro (*relative Primideale*). — Si chiamano così due (o più) ideali (di un corpo h) aventi per massimo comun divisore lo stesso ideale $o = h \frown \text{A}$ (ideale *unità*) (§11 . P9). Possiamo scrivere:

$$a, b \varepsilon \text{id}' h . \supset . a \pi b . = . a + b = o .$$

La P1 del §13 dice allora che il minimo multiplo comune di due ideali primi fra loro è lo stesso loro prodotto, e inversamente. E altre analogie colla teoria dei numeri primi ordinari si troveranno anche facilmente.

Un ideale a (del corpo h) e un numero x (contenuto in $o = h \frown \text{A}$) si potranno dire *primi fra loro* quando sono primi fra loro gli ideali a e ox, quando cioè $a + ox = o$. È in questo senso appunto che abbiamo usata poc'anzi (a proposito del § 16) questa stessa locuzione.

E la P12 del § 13 dice allora che due numeri algebrici interi x, y

---

(1) In queste congruenze scriviamo semplicemente id (rispetto all'ideale...) anzichè id'h .

di un corpo h sono primi fra loro, secondo la definizione del § 3 . P4 ([1]), quando sono primi gli ideali ox e oy (essendo sempre $o = h \cap \mathrm{A}$).

Ideali equivalenti fra loro. — Alla definizione di *equivalenza* data nel § 17 . P1 conviene aggiungere a volte la condizione, che il quoziente dei due numeri x , y di cui alla successiva P3 abbia norma positiva (cfr. anche Dedekind, p. 578). Allora ciascuna delle classi I si spezza in due altre.

A quanto ho detto finora aggiungerò poche altre osservazioni.

Il concetto di *numero algebrico* è il primo e il più semplice fra quelli che si spingono più in là di quello semplicissimo di *numero razionale.* La definizione di numero algebrico fu già data nella Parte VI del Formulario (§1 . P8) per cura dell'egregio Dr. G. Vivanti; e questa definizione coincide anche sostanzialmente con quella ch'io ora ne ho data al § 1 . P3 (cfr. anche la successiva P4'). Io scrivo soltanto, per brevità, alg invece di N alg .

Nel § 1 . P22, dove è accennato il quoziente x/y , è supposto esplicitamente y diverso da zero. Eguale ipotesi è fatta anche, più avanti, nella definizione di *Corpo* (per non includere in quest'ultimo degli infiniti). — La P22 del § 1 dice anche, implicitamente, che è numero algebrico ogni funzione razionale, a coefficienti razionali, di uno o più numeri algebrici.

Le P11, 12 del § 3 trovano in questo § il loro posto naturale, ma non si possono dimostrare che coll'aiuto di altre proposizioni, che compariranno solo più avanti, negli ultimi §§ (cfr. anche Dedekind, pp. 534 e 577).

Nella definizione di *Corpo* (§4 . P1) — e così in quella di *Modulo* (§ 7 . P1) — si è introdotta la condizione K alg , che cioè i numeri del *Corpo* (rispett. *Modulo*) siano tutti algebrici. Ma molte delle proposizioni enunciate pei *Corpi* e *Moduli* continuerebbero a sussistere anche quando detta condizione fosse tolta; noi l'abbiamo messa, perchè erano appunto i corpi e moduli di numeri algebrici quelli che più ci interessavano, e ai quali poi avremmo dovuto limitarci.

Il concetto di *Corpo* è uno di quelli che hanno maggiore importanza e compaiono più spesso in tutta la matematica moderna. « *Dieser Name* », dice il Dedekind, « *soll, ähnlich wie in den Naturwissenschaften, in*

([1]) Coll'avvertenza che anche i numeri u e v, di cui in questa definizione, devono ora essere contenuti in $o = h \cap \mathrm{A}$.

« *der Geometrie, und im Leben der menschlichen Gesellschaft, auch* « *hier ein System bezeichnen, das eine gewisse Vollständigkeit, Voll-* « *kommenheit, Abgeschlossenheit besitzt, wodurch es als ein organisches* « *Ganzes, als eine natürliche Einheit erscheint* ». Dal Dedekind infatti anche Klein ha preso il nome di *Corpo*, per indicare l'insieme degli enti che nascono da una data figura qualsiasi, applicandole successivamente le diverse trasformazioni di un certo *gruppo* (cfr. l'opuscolo: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*; Erlangen, 1872; o anche la traduzione italiana negli Annali di Matematica, s. 2ª, t. XVII, nota a pag. 320). Il concetto di *Corpo* coincide anche sostanzialmente con quello di *Rationalitätsbereich* (campo di razionalità) introdotto da Kronecker nella sua « *Festschrift* »: *Grundzüge einer arithm. Theorie der algebraischen Grössen* (Journal de Crelle, t. 92, 1882). E l'osservazione acutissima, che il sistema delle funzioni algebriche sopra una data *superficie di Riemann* si può anche considerare come un corpo, informa tutta la Memoria: *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen* dei Sigg. Dedekind e Weber (Journal de Crelle, t. 92).

La P5 del § 4 definisce anche il *numero algebrico rispetto a un dato corpo di numeri*, e la P6′ (altra forma della §1 . P23) dice che *un numero algebrico rispetto al corpo dei numeri algebrici è anche algebrico nel senso ordinario.* — Si potrebbe definire in modo analogo anche il *numero algebrico di ordine* n *rispetto a un dato corpo* h $= \mathrm{alg}'_n\, h$. Ma, per semplicità, possiamo ricorrere a un'altra notazione, introdotta più avanti (§ 5 . P3), e scrivere:

$$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, h \,\varepsilon\, \Omega_n \,.\, \mathsf{O} \,.\, \mathrm{alg}'_n\, h = \mathrm{alg}'\, h \frown \overline{x\,\varepsilon}\, [(1\,, x\,, \ldots x^{n-1})\, \varepsilon\, \mathrm{irr}'\, h \,. \\ (1\,, x\,, \ldots x^n) - \varepsilon\, \mathrm{irr}'\, h] \,.$$

Allora si hanno anche le due proposizioni seguenti:

$$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathsf{O} \,.\, \mathrm{alg}'_n\, \mathrm{r} = \mathrm{alg}_n \,.$$
$$h \,\varepsilon\, \Omega \,.\, \mathsf{O} \,.\, \mathrm{alg}'_1\, h = h \,.$$

Al *Corpo normale* (§ 4 . P23) si dà a volte anche il nome di *Corpo di* Galois.

Nella definizione di *Modulo* (§ 7 . P1) possiamo limitarci a far comparire la differenza $x - y$ di due numeri in esso modulo contenuti, omettendo la somma, e scrivendo perciò:

$$\mathrm{Mod} = \mathrm{K\,alg} \frown \overline{k\,\varepsilon}\, (x\,, y \,\varepsilon\, k \,.\, \mathsf{O}_{x,y} \,.\, x - y \,\varepsilon\, k) \,.$$

Infatti da questa definizione segue tosto, supposto $y = x$, la P3:

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, \mathsf{O} \,.\, 0 \,\varepsilon\, a \,.$$

E quindi:

$$a \,\varepsilon\, \text{Mod} \,.\, x \,\varepsilon\, a \,.\, \supset . [0 - x = -x] \,\varepsilon\, a \,.$$
$$a \,\varepsilon\, \text{Mod} \,.\, x \,, y \,\varepsilon\, a \,.\, \supset . [x - (-y) = x + y] \,\varepsilon\, a \,;$$

la parte cioè di definizione che avevamo omessa.

Il modulo n viene indicato dal DEDEKIND colla lettera tedesca $\mathfrak{z}$.

Il modulo $a^0 = a/a$ vien detto *ordine di* a. Le ultime proposizioni del § 8 mostrano che le moltiplicazioni e divisioni di potenze di un *modulo proprio* (P64), o anche di più moduli proprii, purchè aventi uno stesso *ordine*, godono di proprietà analoghe a quelle delle operazioni corrispondenti sui *numeri* (reali o complessi).

Scriviamo (§ 9 . P3 e seg.) R $(b\,, a)$ invece di $(b\,, a)$ (cfr. DEDEKIND, p. 509), perchè, secondo le convenzioni già adottate, $(b\,, a)$, con o senza parentesi, rappresenta semplicemente la *coppia di enti* b ed a. — Siccome la classe rappr $(b\,, a)$ (§ 9 . P1) non può essere nulla, così il numero degli individui in essa contenuti o è un N, o è infinito; il simbolo R $(b\,, a)$ risulta quindi definito dalle P3 e P4 in tutti i casi. La convenzione contenuta nella P4 è opportuna ad evitare eccezioni nelle proposizioni successive.

La definizione di *modulo finito di ordine* n (§ 10 . P7) non coincide perfettamente con quelle date dal DEDEKIND a pag. 494. Stando a quest'ultima, un modulo finito di ordine n potrebbe sempre considerarsi anche come di un ordine qualunque superiore a n. Più avanti però anche il DEDEKIND trova opportuna una definizione più precisa (come la nostra).

Le P4 e P5 del § 11 non formano in sostanza che una proposizione sola, enunciabile nei due modi indicati. Si potrebbe anche aggiungere che le y, di cui alla P5, sono funzioni razionali delle x; proprietà questa che non abbiamo fatta risultare dalla formula, per evitare l'introduzione di troppi concetti (polinomio intero, funzione razionale di più variabili, ...) che qui sarebbero stati necessarî, ma non ci avrebbero poi servito ulteriormente.

I termini *numero decomponibile* e *numero primo*, di cui al § 11 . P24 e seg., si riferiscono soltanto (per così dire) al corpo h, e quindi al modulo $o = h \frown A$, dal quale ora non vogliamo escire. Di numeri algebrici *primi* (e quindi anche *indecomponibili*) in senso veramente *assoluto*, non ne esistono (cfr. anche DEDEKIND, p. 534).

È notevole la P28: *Nel modulo o possono esistere dei numeri indecomponibili* (rispetto allo stesso modulo) *e in pari tempo non primi.* Questa proposizione fa cadere (per i numeri contenuti in o) quella sull'unicità della scomposizione in fattori indecomponibili; non si può cioè escludere l'esistenza (in o) di numeri, per i quali detta scomposizione possa effettuarsi in due modi essenzialmente diversi. Questo fatto non

si presenta invece nel sistema dei numeri naturali (quando cioè il corpo h sia quello dei numeri *razionali*), e in ogni altro caso in cui i concetti di *numero primo* e di *numero indecomponibile* vengano a coincidere.

Fu KUMMER il primo ad accorgersi di questa differenza importantissima, differenza che a lui riescì di sopprimere mercè l'introduzione dei suoi *numeri ideali* (Journ. de Crelle, t. 35). Allo stesso scopo mira anche la *teoria degli ideali* di DEDEKIND, alla quale sono dedicati i §§ 12-17 di questa parte IX; e questo scopo viene qui raggiunto sostituendo alla considerazione dei singoli numeri quella di *interi sistemi di numeri* (i nostri *ideali*; § 12 . P1). Ma la P32 del § 17 dice poi, che ogni ideale può considerarsi come il sistema dei numeri contenuti in o e divisibili per un certo numero x, che può anche essere un così detto *numero ideale* (P31), ma è in ogni caso qualcosa di ben definito, sicchè, dalla considerazione degli *ideali*, torniamo infine a quella dei *numeri*; ma di numeri formanti un sistema opportunamente ampliato, e che più non presenta l'inconveniente prima riscontrato.

Altre ricerche in questo stesso senso furono fatte dal KRONECKER; di queste il Prof. WEBER si è occupato nelle lezioni dello scorso semestre estivo.

Osserverò ancora, infine, che le due ultime proposizioni del § 16 estendono rispettivamente l'ordinario *teorema di* FERMAT, e il *teorema di* FERMAT *generalizzato*.

Colognola ai Colli (Verona), ottobre 1894.

G. FANO.

Notazioni

(oltre quelle già in uso).

Il segno	G_n	si legga	funzione intera di grado n a coefficienti interi, senza fattor comune, il cui primo coefficiente è positivo (§1 P1).
»	G	»	funzione intera a coefficienti interi, id. id. (§1 P2).
»	G_n irr	»	funzione intera di grado n, ... irriduttibile (§1 P6).
»	G irr	»	funzione intera ... irriduttibile (§1 P7).
»	grad	»	grado di (una G) (§1 P 13).
»	coeff_0	»	primo coefficiente di (una G_n) (§1 P19).
»	coeff_n	»	ultimo » » »
»	coeff_r	»	coefficiente di x^{n-r} » »
»	alg	»	numero algebrico (§1 P3).
»	alg_n	»	» » di ordine n (§1 P10).
»	A	»	» » intero (§2 P1).
»	U	»	unità (§2 P7).
»	conj	»	coniugato di (§ 1 P15 , § 4 P16).
»	conj'	»	corpo coniugato di (un $\Omega' x$) (§ 4 . P18).
»	norm	»	norma di.
»	π	»	è primo con (§3 P4).
»	Ω	»	corpo (§4 P1).
»	Ω'	»	corpo di (§4 P7, 8).
»	Ω^n	»	» di grado n (§ 5 P4).
»	Ω norm	»	corpo normale (§4 P23).
»	alg'	»	numero algebrico rispetto a (un Ω) (§ 4 P5).
»	irr'	»	sistema irriduttibile rispetto a (un Ω)(§5.P3)
»	B	»	base di (§5 P1, §10 P3).
»	B irr	»	base irriduttibile di (§10 P6).
»	B int	»	base intera di (un Ω) (§6 P7).
»	alg dec	»	numero algebrico decomponibile (in un Ω) (§11 P24).
»	alg pr	»	» » primo (in un Ω)(§11 P26).
»	alg id	»	» » ideale (in un Ω) §17 P31).

»	Mod	»	modulo (§7 P1).
»	Mod prop	»	modulo proprio (§8 P64).
»	Mod fin	»	modulo finito (§10 P1).
»	Mod fin_n	»	modulo finito di ordine n (§ 10 P7).
»	rappr (b, a)	»	rappresentante di b rispetto a(l modulo) a (§9 P1).
»	R (b, a)	»	numero degli elementi di un rappr (b, a) (§9 P3, 4).
»	Δ	»	discriminante di (un Mod) (§ 11 P7).
»	id‘	»	ideale di (un Ω) (§12 P1).
»	H‘	»	ideale principale di (un Ω) (§12 P15).
»	id pr‘	»	» primo di (un Ω) (§14 P1).
»	eq	»	equivalente (due id‘ fra loro) (§17 P1).

a ε r f(Z_n, Z_n) (opp. n f(Z_n, Z_n), ...) significa che a è una corrispondenza fra coppie di numeri interi variabili da 1 ad n, e numeri razionali (rispett. interi, ecc.). Esso si può leggere: a è una matrice ad elementi razionali (interi, ...) con n orizzontali ed n verticali, nella quale a_{ij} rappresenta l'elemento corrispondente agli indici i e j.

Det a significa allora « Il valore del determinante formato cogli elementi a ».

F. Castellano. *Lezioni di Meccanica razionale*, Torino, 1894, pag. 512.

Lo scrivere un trattato di meccanica razionale ad uso di allievi che se ne servono al solo scopo di studiare meccanica applicata, è al giorno d'oggi un'impresa che presenta gravi difficoltà.

I concetti e i principii fondamentali della Meccanica diedero luogo ad infinite discussioni che non sono punto esaurite; anzi frequentissime sono le pubblicazioni in cui si propone di schiarirli, ovvero di fondare la meccanica su nuove basi. Per dare un'idea della varietà di opinioni basta citare il parallelogrammo delle forze, che da una schiera di valenti matematici vien dimostrato; mentrechè un'altra schiera di egualmente valenti matematici lo ritiene come un postulato, e qualche volta lo si dà come definizione. Lo stesso è a dirsi del principio delle velocità vistuali (*).

A questa prima difficoltà si ovvia adottando, nelle questioni soggette a controversia, l'opinione più diffusa, e così fa il nostro autore. Ma difficoltà d'altra natura, e non lievi, si presentano ancora a chi voglia scrivere un trattato scolastico. Le scienze su cui la Meccanica basa, quale il calcolo infinitesimale, subirono in questi anni più trasformazioni. Ad es. nel calcolo furono messe in dubbio molte proposizioni prima ritenute vere; e queste stesse proposizioni furono poi riconosciute esatte, purchè più liberamente intese, e non secondo le definizioni e restrizioni, qualche volta artificiose, imposte solo più tardi; tuttavia molte proposizioni di calcolo sono oggigiorno accompagnate da condizioni restrittive minute, e che non si sanno sostituire con altre più semplici, nè si possono togliere senza rendere inesatti i teoremi.

Il prof. Castellano ebbe la ventura di essere, durante la sua carriera d'insegnamento, successivamente assistente di Algebra, di Geometria analitica, di Calcolo infinitesimale e di Meccanica razionale presso

---

(*) Veggasi ad es. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik*, 1894. L'A. dopo aver fatte a pag. 8 le osservazioni che precedono, conchiude: « In una scienza logicamente completa, nella matematica pura una tale differenza di opinioni è inconcepibile ». Veggasi pure Mach, *The science of mechanics*, 1893, dove sono accuratamente esaminate tutte le dimostrazioni date da Archimede in poi, per provare le leggi fondamentali della meccanica, e vi si nota dappertutto la loro origine sperimentale.

l'Ateneo torinese; potè così farsi una chiara idea dei metodi scientifici e didattici più moderni. In seguito da vari anni professa Meccanica razionale presso la R. Accademia militare, sicchè fu in caso di pubblicare pei suoi allievi l'attuale trattato di meccanica, che soddisfa sia sotto l'aspetto scientifico che quello didattico ad ogni più minuta esigenza.

Questo trattato è preceduto da una introduzione di 8 pagine, in cui sono richiamate le operazioni sui vettori, delle quali si fa nel seguito ampio uso. È appunto questa la caratteristica che più differenzia questo libro dai comuni trattati di meccanica; e non esitiamo punto ad affermare, che ciò costituisce nel libro del nostro Autore uno dei più notevoli progressi che si siano fatti in questi anni nella esposizione della Meccanica. E siccome questo è il punto capitale del libro, sarà bene arrestarci alquanto, senza pretendere di fare qui la storia del Calcolo geometrico, da cui derivano queste notazioni (*).

Da quasi mezzo secolo l'Hamilton introdusse il nome nuovo *vettore* per indicare un ente geometrico speciale già studiato dal nostro Bellavitis; oltre alle operazioni già note, definì il quoziente di due vettori che chiamò *quaternione*, sul quale introdusse un gruppo di operazioni (scalare, vettore, tensore, versore,...) e ne rilevò l'utilità con elegantissime applicazioni a questioni geometriche, e specialmente di meccanica razionale e superiore.

L'Hamilton era, oltre che valente matematico, valente insegnante, ed espose con chiarezza le sue teorie; quindi numerosi autori lo seguirono per la via indicata, e basti menzionare il Maxwell che espresse coi quaternioni tutte le formule del suo celeberrimo libro sull'elettricità e sul magnetismo.

E qualche anno prima di Hamilton, H. Grassmann fondava la scienza dell'estensione. Limitandoci alla geometria, egli introdusse degli enti geometrici formati con legge uniforme e di cui i vettori sono caso particolare, e su questi in sostanza due sole operazioni, l'addizione e la moltiplicazione; sicchè il calcolo di Grassmann è estremamente semplice e analogo al calcolo algebrico sui monomii e polinomii.

Il Grassmann diede alla Meccanica uno strumento di ricerca potentissimo, e ben a ragione il Mach, nel libro citato, comincia con Archimede l'elenco delle persone che diedero un notevole impulso alla Meccanica, e lo termina con Grassmann. Ma la forma nebulosa e di difficilissima lettura, con cui il Grassmann espose le sue teorie, non ne

(*) Nel libro dell'HAGEN, *Synopsis der höheren Mathematik*, t. II, a. 1894, p. 128-156 trovasi una esposizione chiara e completa, quantunque concisa, dei varii metodi di calcolo geometrico finora proposti.

attirò i lettori; durante la sua vita i suoi libri furono poco stimati, ed egli non potè nemmeno veder soddisfatto il suo desiderio di venir nominato insegnante in una Università, onde poter insegnare le sue teorie a menti giovanili, più aperte alle teorie nuove e sintetiche. Solo in quest'ultimo decennio i libri del Grassmann furono più ampiamente studiati, lasciando una viva ammirazione in quanti compirono il faticoso lavoro di penetrarvi dentro. E numerosa sempre più si fa la schiera delle persone che applicano i metodi di Grassmann a varie teorie, e specialmente a questioni di Meccanica.

Ma se numerosissime sono le persone che ritengono utilissimi alla Meccanica il calcolo di Hamilton o quello di Grassmann, e lo provarono con tante applicazioni, finora quei metodi non penetrarono nell'insegnamento nè nei libri scolastici.

La maggior parte dei trattati di Meccanica, copiandosi l'uno sull'altro, rimasero estranei ad ogni idea nuova. Però già numerosi sono quelli in cui si introducono i vettori. Ma spesso si usano metodi ibridi e notazioni difettose. Così mentre Hamilton coniò il nome nuovo *vettore* per distinguere l'ente geometrico, oggetto dei suoi calcoli, da ogni altro affine, ottenendo così una gran chiarezza, il sig. Appell (*Traité de Mécanique rationnelle,* Paris 1893) chiama vettore un ente che non è il vettore di Hamilton, ma bensì l'insieme d'un punto e d'un vettore, e fa su questi enti delle operazioni più complicate di quelle di Hamilton e di Grassmann, e finisce per farne pressochè nessun uso nel suo libro.

I vettori dell'Appell coincidono cogli *angeheftete Vectoren* del Budde (*Allgemeine Mechanik,* Berlin, 1890-91). Questi considera inoltre i *freie Vectoren* (I pag. 11) e i *linienflüchtige Vectoren* (II pag. 168), introducendo tre specie di addizioni, indicate con tre segni diversi, e in conseguenza pure tre specie di sottrazioni, ed a rigore avrebbe altresì dovuto introdurre tre specie di eguaglianze, rendendo estremamente complicato quello che è semplicissimo. Osservazioni analoghe si possono fare sul trattato dello Schell, *Th. d. Bewegung,* ecc., 2ª ediz.

Il Resal (*Traité de cinématique pure*, a. 1862, pag. 18) indipendentemente dagli autori menzionati, introduce una notazione pei vettori e loro somma, la quale è seguita dal Somoff (*Theoretische Mechanik*, 1878) pag. 10. Ma questa notazione è difettosa. Invero si indica con u la lunghezza d'un segmento, e con $\overline{u}$ il segmento considerato in grandezza, direzione e verso, cioè il vettore. Ora la lunghezza d'un vettore è funzione del vettore, ma non viceversa; quindi è permesso, indicando un vettore con un segno, di indicare colla combinazione di questo stesso segno e di un altro, la lunghezza del vettore, ma non viceversa; altrimenti, essendo 2 la lunghezza d'un vettore, si potrà avere la scrittura $\overline{2}$ che non ha alcun senso determinato. Quindi benchè questi autori si

servano elegantemente delle loro notazioni, senza mai cadere in equivoci, pure questi si possono produrre, e si produrrebbero certamente in un insegnamento scolastico.

Se adunque da tanti indizi risultava chiaramente la possibilità di trattare la meccanica con metodo semplice ed uniforme colla teoria dei vettori, spetta al Castellano il merito di aver tradotto questa possibilità in atto. Il nostro Autore non si servì di tutti gli enti geometrici introdotti dal Grassmann, ma semplicemente dei vettori, dei prodotti di due vettori, o bivettori, e loro indici, e dei prodotti di tre vettori, o trivettori. In conseguenza se a e b sono vettori, $a|b$ e $|ab$ rappresentano rispettivamente ciò che nella teoria dei quaternioni chiamasi *scalare cambiato di segno,* e *vettore* del prodotto dei vettori a e b; queste due operazioni $a|b$ e $|ab$ si presentano continuamente nella meccanica ed è già stato osservato che ciò che si presenta naturalmente è $a|b$, cioè lo scalare cambiato di segno, e non lo scalare col proprio segno (*).

Nulla si può immaginare di più semplice di queste idee; però se esse derivano dalla teoria generale del Grassmann, limitate a quanto precede sono gloria italiana, poichè a meno del nome, dobbiamo i vettori al Bellavitis, ed i bivettori al Chelini (**).

Usando, con quella precisione che è necessaria nella matematica, di queste poche operazioni, l'A. sviluppa l'intera meccanica con notevole semplicità rispetto ai trattati precedenti, in cui si fa uso costante delle coordinate. Se in problema di meccanica si presentano naturalmente tre assi, ci sarà convenienza di scomporre i vari vettori secondo questi tre assi, ed il metodo dei vettori coinciderà con quello delle coordinate. In ogni altro caso il metodo seguito dal nostro Autore è più semplice di quello ordinario. Questa semplicità si manifesta apparentemente col fatto che Egli in generale scrive una sola equazione invece di tre, e che quella sola è più breve di ognuna di queste tre. Ma il vantaggio reale è assai più importante di questa semplificazione di scrittura; e sta nel fatto che sempre si ragiona sugli enti che compaiono nel problema, senza aver bisogno di introdurre nel ragionamento assi estranei alla questione. Le formule ottenute hanno tutte la proprietà invariantiva; nè questa proprietà ha bisogno di prova; siccome si sono ottenute senza introdurre assi coordinati, esse risultano indipendenti dalla scelta di questi.

Ad esempio paragoniamo le definizioni di velocità e di accelerazione d'un punto mobile date dal Castellano con quelle date dal Kirchhoff

---

(*) Vedi nota in fine.

(**) *Saggio di Geometria analitica trattata con nuovo metodo,* Roma, 1838, pag. 39 e 44.

(*Mechanik*, Leipzig, 1883). Il primo (pag. 20) determina la velocità e l'accelerazione mediante la derivata prima e seconda del punto; e la derivata è sempre il limite del rapporto dell'incremento della funzione all'incremento della variabile. Il secondo (pag. 2-6), per introdurre questi enti, comincia a riferire il punto ad assi cartesiani ortogonali, e dette x, y, z le sue coordinate, chiama (pag. 3) grandezza della velocità il valore aritmetico di

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

e sua direzione, la direzione della retta che fa cogli assi coordinati angoli aventi per coseni

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\dots}}, \dots$$

e poi fa una trasformazione di assi e un lungo calcolo per provare che la velocità così definita dipende solo dal moto del punto, e non dal sistema di coordinate. E la stessa questione si ripresenta nelle successive pagine per l'accelerazione. Così si vede che due righe del Castellano bastano ad esprimere chiaramente e completamente ciò che il Kirchhoff esprime in più pagine; colla prima via non c'è nulla a dimostrare, nella seconda sonvi lunghi calcoli a giustificare le definizioni date. La stessa questione si presenta una terza volta a pag. 15 del Kirchhoff, e così via.

Il Kirchhoff si mette per una via lunghissima, però la percorre rigorosamente. Ma sonvi altri Autori, anche di Calcolo infinitesimale, che dànno definizioni p. es. per la lunghezza d'un arco o per l'area di una superficie, nelle quali entrano esplicitamente gli assi coordinati, e si dimenticano poi di provare che ciò che è definito è un ente collegato colla sola figura oggettiva, e indipendente dagli assi coordinati.

Possiamo pure paragonare il primo esempio di moto studiato dal Kirchhoff (pag. 6, 7) colla trattazione del Castellano. Esso è il moto d'un punto pesante supposta costante la gravità. Il primo sceglie tre assi, quello delle z verticale, integra le tre equazioni differenziali; eliminando convenientemente il tempo, trova che la traiettoria è piana; riferisce allora la curva a due assi in questo piano, e continua il suo ragionamento. Il Castellano (pag. 28) invece scrive l'equazione

$$P'' = \alpha,$$

che integrata dà successivamente

$$P' = P'_0 + \alpha t$$

$$P = P_0 + t P'_0 + \frac{\alpha}{2} t^2$$

la quale equazione esprime tutte le proprietà cercate del moto.

Il lettore può consultare la teoria del moto centrale data dal Kirchhoff a pag. 7 e segg. con quella del Castellano a pag. 30 e segg.; e si possono indefinitamente moltiplicare gli esempi, poichè non c'è pagina del libro del prof. Castellano che non porti una notevole semplificazione rispetto alla trattazione comune, e non solo una semplificazione di scrittura, ma essenzialmente una semplificazione di concetti e di ragionamenti. Mai prima di questo libro si è così ben applicato il principio meccanico del minimo sforzo all'insegnamento della meccanica stessa.

Daremo ancora un rapido cenno della distribuzione della materia. La parte I è dedicata alla Cinematica. Sono a notarsi (Cap. I) la facilità con cui si ottengono le proprietà delle accelerazioni tangenziale e normale del moto odografo. Le considerazioni sulle derivate, sulle tangenti, piani osculatori, ecc., che nei trattati di meccanica (e anche in qualche trattato di calcolo) sono fatte in generale un po' all'ingrosso, sono invece qui sviluppate con rigore insuperabile. Nel Cap. II, cinematica dei corpi rigidi, si può notare la semplicità con cui si ottengono le formule di Eulero per la rotazione dei corpi solidi; nel cap. III si trovano per via elegante le coordinate dell'accelerazione d'un corpo rotante attorno ad un punto (pag. 85); nel cap. IV si ottengono per via semplicissima le velocità ed accelerazioni del moto composto.

La parte II è la statica e dinamica del punto materiale. La relazione fra la risultante di più forze e il baricentro di più punti è ridotta ad una identità (pag. 173). Si può notare l'eleganza del problema a pag. 174 sul moto centrale d'un punto per mezzo del suo odografo, lo studio del moto d'un grave in un mezzo resistente (pag. 191), l'equazione di Binet (pag. 212).

La parte III è la meccanica dei sistemi materiali. Sono semplici le formule generali pei volumi materiali a pag. 281, ed elegante è la determinazione del potenziale a pag. 284. La teoria dei baricentri è tutta notevolmente semplificata (pag. 291); come pure la riduzione d'un sistema di forze applicate ad un corpo rigido (pag. 350), il significato geometrico dell'invariante (pag. 378, 380), la teoria dei poligoni funiculari (pag. 397), delle curve funiculari (pag. 401), la dinamica dei sistemi (pag. 409); nel cap. XIX l'A. sviluppa la dinamica dei sistemi

rigidi, il moto d'un corpo avente un punto fisso; integra le equazioni nel caso in cui è nullo il momento delle forze rispetto al punto fisso, ecc. Il cap. XX tratta delle percosse e degli urti, e il cap. XXI tratta del principio dei lavori virtuali e finisce colle equazioni del moto di Lagrange.

Si può indicare qualche menda al libro; trovansi errori di stampa e di scrittura; molti sono rilevati nell'errata-corrige, ma alcuni sono ancora sfuggiti, e potranno essere corretti in un'errata supplementare. Indicherò quello a pag. 275, linea 15ª, dove invece di *coordinate cartesiane* si deve leggere *distanze mutue* (Poinsot, *Statique,* 1836, p. 303) ovvero *coordinate di configurazione* (Hertz, l. c., pag. 58), poichè questo errore di scrittura può far fraintendere il libro da chi lo legga un po' sommariamente. Ma tutto insieme questi errori di stampa e di scrittura sono meno numerosi di quello che si possa temere in una prima edizione di un libro di oltre 500 pagine.

La parte III tratta dei sistemi materiali e dei vincoli andando dal particolare al generale; e questa via che ha i suoi vantaggi quando si debbano trattare pochi casi particolari, come probabilmente farà l'A. nel suo insegnamento, si presenta, a mio avviso, meno comoda del cammino inverso, avendosi a trattare l'intera materia come ha finito di fare il Castellano nel suo libro.

In conclusione, trattando la meccanica per via nuova, il Castellano fece l'importante lavoro di semplificare non solo le formule, ma gran parte dei ragionamenti; in tal modo egli, pure sviluppando minutamente i singoli passaggi, e specialmente quei punti su cui maggiormente si deve fermare l'insegnante, potè nel suo volume raccogliere grande quantità di proposizioni ed esempi. Noi siamo certi che il libro del Castellano avrà un onorevole posto nello sviluppo della meccanica, specialmente sotto l'aspetto didattico.

G. Peano.

Nota.

Le operazioni considerate sui vettori si presentarono direttamente a molti studiosi; e ne risultò una varietà di denominazioni e notazioni, di cui qui diremo qualche cosa.

Il bivettore ab chiamasi anche da Grassmann *prodotto esterno* dei vettori a e b, il quale lo indicò pure con $a . b$ e con $[ab]$.

L'operazione $a | b$ fu chiamata dal Grassmann *prodotto interno*; esso si può definire direttamente, come il prodotto delle lunghezze dei due

vettori pel coseno dell'angolo compreso; ovvero si può considerare come il prodotto esterno del vettore a per l'indice del vettore b. Sotto il primo punto di vista il segno | figura come segno di moltiplicazione; sotto il secondo punto, esso figura come segno d'operazione distributiva, e nei calcoli si comporta come fattore un costante; ad es. se a e b sono vettori funzioni di t, si ha:

$$\frac{d|(ab)}{dt} = \left|\left(a\frac{db}{dt} + \frac{da}{dt}b\right)\right. .$$

Le notazioni usate dal Castellano, che sono quelle stesse del Grassmann, oltre all'essere semplici, presentano ancora il vantaggio che nella loro esposizione è lecito di arrestarsi quando si vuole. Si può definire direttamente il prodotto interno di due vettori; oppure farlo dipendere dal prodotto esterno e dall'operazione | . Presentandosi l'occasione, si può parlare delle forme geometriche di varia specie, dei prodotti di punti, di linee, di superficie, prodotti progressivi o regressivi, fare la teoria delle trasformazioni lineari, appena accennata dal Grassmann, e che acquista ai nostri giorni sempre maggiore importanza, trattare dei numeri complessi d'ordine qualunque, della loro moltiplicazione alternata (onde provengono i determinanti), e delle varie altre specie di moltiplicazione; e così via. A qualunque punto uno si arresti momentaneamente, e da cui voglia poi ripartire, non avrà mai a cambiare le notazioni; poichè queste notazioni sono derivate dalla teoria vastissima e profonda studiata dal Grassmann. Sicchè mai alcuna ambiguità sarà a temersi. Però, estendendosi le definizioni, in uno sviluppo successivo possono comparire come teoremi delle proposizioni che in una teoria parziale si davano come definizioni.

Però il Grassmann stesso, in circostanze speciali, usa varie notazioni. Nella sua *Geometrische Analyse* invece di $a|b$ scrive $a \times b$. Il Macfarlane (*Algebra of Physics*) scrive cos ab e Sin ab rispettivamente al posto di $a|b$ e $|ab$. Queste due operazioni, specialmente dagli elettricisti, sono pure chiamate prodotto scalare e prodotto vettoriale di a e di b, con termini derivati dai quaternioni.

Intorno ad alcune identità algebriche.

Continuazione e fine.

§ 7.

Nell'ipotesi che m sia un numero pari, si considerino i polinomi

(15) $$A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \dots + A_m ab^{m-1} + A_{m+1} b^m$$
e
(16) $$A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \dots - A_m ab^{m-1} + A_{m+1} b^m ,$$

ove $A_1, A_2, \dots A_{m+1}$ sono $m+1$ coefficienti arbitrari.

Poichè i polinomi (15) e (16) si permutano l'uno nell'altro se si cangia a in $-a$ o b in $-b$, se n'argomenta che il loro prodotto dovrà contenere solamente potenze pari di a e di b, e che perciò si potrà porre

(17) $$(A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \dots + A_m ab^{m-1} + A_{m+1} b^m)(A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \dots - A_m ab^{m-1} + A_{m+1} b^m) =$$
$$C_1 a^{2m} + C_2 a^{2(m-1)} b^2 + C_3 a^{2(m-2)} b^4 + \dots + C_{\frac{m}{2}} a^{m+2} b^{m-2} + C_{\frac{m+2}{2}} a^m b^m$$
$$+ C_{\frac{m+4}{2}} a^{m-2} b^{m+2} + \dots + C_{m-1} a^4 b^{2(m-2)} + C_m a^2 b^{2(m-1)} + C_{m+1} b^{2m} .$$

È facile poi stabilire che i valori delle C_r sono dati da:

$$C_1 = A_1^2$$
$$C_2 = 2 A_1 A_3 - A_2^2$$
$$C_3 = 2 A_1 A_5 - 2 A_2 A_4 + A_3^2$$
. . . .
$$C_{\frac{m}{2}} = 2 A_1 A_m - 2 A_2 A_{m-1} + 2 A_3 A_{m-2} - \dots - (-1)^{\frac{m}{2}} A^2_{\frac{m}{2}}$$
$$C_{\frac{m+2}{2}} = 2 A_1 A_{m+1} - 2 A_2 A_m + 2 A_3 A_{m-1} - \dots - (-1)^{\frac{m+2}{2}} A^2_{\frac{m+2}{2}}$$

$$C_{\frac{m+4}{2}} = 2\,A_3\,A_{m+1} - 2\,A_4\,A_m + 2\,A_5\,A_{m-1} - \ldots - (-1)^{\frac{m+4}{2}}\,A^2_{\frac{m+4}{2}}$$

. . . .

$$C_{m-1} = 2\,A_{m-3}\,A_{m+1} - 2\,A_{m-2}\,A_m + A^2_{m-1}$$

$$C_m = 2\,A_{m-1}\,A_{m+1} - A^2_m$$

$$C_{m+1} = A^2_{m+1}\,.$$

La formula (7) del § 5 è un caso particolare della (17), da cui si deduce supponendovi $A_1 = A_2 = \ldots = A_{m+1} = 1$.

Se nella (17) si pone $m = 2$ e s'invertono i due membri, si ha la formula (18)

$$A_1^2 a^4 + (2A_1A_3 - A_2^2)a^2b^2 + A_3^2b^4 = (A_1a^2 + A_2ab + A_3b^2)(A_1a^2 - A_2ab + A_3b^2)$$

di cui un solo caso speciale è registrato nel *Formulario*. Ed invero, posto $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 2$, si trova

$$a^4 + 4\,b^4 = (a^2 + 2\,ab + 2\,b^2)\,(a^2 - 2\,ab + 2\,b^2)$$

che è la formula n° 59 della pag. 14.

Ma se non si richiede che i coefficienti A_1, A_2, A_3 siano reali, i valori numerici ora trovati non sono i soli che rendono $A_1^2 = 1$, $2\,A_1\,A_3 - A_2^2 = 0$, $A_3^2 = 4$, giacchè queste equazioni sono altresì soddisfatte da $A_1 = 1$, $A_2 = 2\sqrt{-1}$, $A_3 = -2$; onde si ha pure

$$a^4 + 4\,b^4 = (a^2 + 2\,ab\sqrt{-1} - 2\,b^2)\,(a^2 - 2\,ab\sqrt{-1} - 2\,b^2).$$

Ed in questa formula, o nella precedente, si ricade anche assegnando ad A_1, A_2, A_3 i valori contrari a quelli testè loro dati.

§ 8.

Allorchè m è un numero dispari, e si considerano i polinomi

(19) $$A_1\,a^m + A_2\,a^{m-1}\,b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} + A_{m+1}\,b^m$$

e

(20) $$A_1\,a^m - A_2\,a^{m-1}\,b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} - A_{m+1}\,b^m$$

trovasi, in corrispondenza della (17), la formula analoga:

(21) $$(A_1\,a^m + A_2a^{m-1}\,b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} + A_{m+1}\,b^m)\,(A_1a^m - A_2a^{m-1}\,b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} - A_{m+1}\,b^m) =$$
$$C_1\,a^{2m} + C_2\,a^{2(m-1)}\,b^2 + C_3\,a^{2(m-2)}\,b^4 + \ldots + C_{\frac{m+1}{2}}\,a^{m+1}b^{m-1} -$$
$$C_{\frac{m+3}{2}}\,a^{m-1}\,b^{m+1} - \ldots - C_{m-1}\,a^4\,b^{2(m-2)} - C_m\,a^2\,b^{2(m-1)} - C_{m+1}b^{2m}\,,$$

nella quale le C_r hanno i seguenti valori:

$$C_1 = A_1^2$$
$$C_2 = 2\,A_1\,A_3 - A_2^2$$
$$C_3 = 2\,A_1\,A_5 - 2\,A_2\,A_4 + A_3^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{\frac{m+1}{2}} = 2\,A_1\,A_m - 2\,A_2\,A_{m-1} + 2\,A_3\,A_{m-2} - \ldots - (-1)^{\frac{m+1}{2}}\,A^2_{\frac{m+1}{2}}$$
$$C_{\frac{m+3}{2}} = 2\,A_2\,A_{m+1} - 2\,A_3\,A_m + 2\,A_4\,A_{m-1} - \ldots + (-1)^{\frac{m+3}{2}}\,A^2_{\frac{m+3}{2}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{m-1} = 2\,A_{m-3}\,A_{m+1} - 2\,A_{m-2}\,A_m + A^2_{m-1}$$
$$C_m = 2\,A_{m-1}\,A_{m+1} - A_m^2$$
$$C_{m+1} = A^2_{m+1}\,.$$

È ovvio che la formula (11) del § 6 è un caso particolare della (21), e che da questa si possono trarre altre formule, limitando l'arbitrarietà delle A_r. Così, per esempio, se si suppone $m = 3$, e si domanda inoltre che i coefficienti C_1, C_2, C_3, C_4 verifichino le relazioni $C_1 = C_4 = 1$, $C_2 = C_3 = 0$, viene dimostrata direttamente la verità della eguaglianza

$$a^6 - b^6 = (a^3 + 2\,\rho\,a^2\,b + 2\,\rho^2\,ab^2 + b^3)\,(a^3 - 2\,\rho\,a^2\,b + 2\,\rho^2\,ab^2 - b^3)$$

in cui ρ è nullo, oppure è radice dell'equazione $\rho^3 - 1 = 0$.

§ 9.

Per valori pari o dispari di m, le potenze

$$P_1^k = (A_1\,a^m + A_2\,a^{m-1}b + \ldots + A_m\,ab^{m-1} + A_{m+1}\,b^m)^k$$
$$P_2^k = (A_1\,a^m - A_2\,a^{m-1}b + \ldots \pm A_m\,ab^{m-1} \mp A_{m+1}\,b^m)^k$$

con k intero e positivo, sono polinomi omogenei del grado mk, il secondo dei quali non differisce dal primo in altro che nell'avere alternativamente i termini positivi e negativi. Se si pone dunque

$$P_1^k = \sum_{n=1}^{n=mk+1} C_n\,a^{mk-n+1}\,b^{n-1}$$

$$P_2^k = \sum_{n=1}^{n=mk+1} (-1)^{n-1}\,C_n\,a^{mk-n+1}\,b^{n-1}$$

dove le C_n indicano coefficienti che hanno leggi di formazione ben

conosciute, si comprende subito che saranno identità notevoli quelle provenienti dalla

$$(22)\quad P_1^k \pm P_2^k = \sum_{n=1}^{n=mk+1} C_n\, a^{mk-n+1}\, b^{n-1} \pm \sum_{n=1}^{n=mk+1} (-1)^{n-1}\, C_n\, a^{mk-n+1}\, b^{n-1}$$

effettuando nel secondo membro tutte le riduzioni che vi hanno luogo dipendentemente dal doppio segno e dalla distinzione della parità o disparità dei numeri m e k.

Così, per esempio, se si suppone $m=1$, e s'indica con k_n il coefficiente binomiale $\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}$, si trova, nel caso in cui k è pari:

$$(A_1a+A_2b)^k+(A_1a-A_2b)^k=2(A_1^ka^k+k_2A_1^{k-2}A_2^2a^{k-2}b^2+ k_4A_1^{k-4}A_2^4a^{k-4}b^4+\ldots+A_2^kb^k)$$

$$(A_1a+A_2b)^k-(A_1a-A_2b)^k=2A_1A_2ab(k_1A_1^{k-2}a^{k-2}+ k_3A_1^{k-4}A_2^2a^{k-4}b^2+\ldots+k_{k-1}A_2^{k-2}b^{k-2})$$

e nel caso in cui k è dispari

$$(A_1a+A_2b)^k+(A_1a-A_2b)^k=2A_1a(A_1^{k-1}a^{k-1}+k_2A_1^{k-3}A_2^2a^{k-3}b^2+ k_4A_1^{k-5}A_2^4a^{k-5}b^4+\ldots+k_{k-1}A_2^{k-1}b^{k-1})$$

$$A_1a+A_2b)^k-(A_1a-A_2b)^k=2A_2b(k_1A_1^{k-1}a^{k-1}+k_3A_1^{k-3}A_2^2a^{k-3}b^2+ k_5A_1^{k-5}A_2^4a^{k-5}b^4+\ldots+A_2^{k-1}b^{k-1}).$$

Ed è evidente che alle prime due di queste quattro formule appartengono le identità $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ ed $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$, registrate nel *Formulario* (pag. 12, nn. 6 e 7).

Anche dai casi di divisibilità del binomio $P_1^k \pm P_2^k$ per $P_1 \pm P_2$ o per $P_1^r \pm P_2^r$, possono essere tratte identità meritevoli di considerazione. Per esempio, se P_1 e P_2 sono i polinomi (15) e (16), la formula $P_1^2-P_2^2=(P_1-P_2)(P_1+P_2)$ dà l'identità:

$$(23)\quad (A_1a^m+A_2a^{m-1}b+\ldots+A_mab^{m-1}+A_mb^{m+1})^2-(A_1a^m-A_2a^{m-1}b+ \ldots-A_mab^{m-1}+A_{m+1}b^m)^2=4ab(A_2a^{m-2}+A_4a^{m-4}b^2+\ldots+A_mb^{m-2}) (A_1a^m+A_3a^{m-2}b^2+\ldots+A_{m+1}b^m);$$

e se invece P_1 e P_2 sono i polinomi (19) e (20), dà:

$$(24)\quad A_1a^m+A_2a^{m-1}b+\ldots+A_mab^{m-1}+A_{m+1}b^m)^2-(A_1a^m-A_2a^{m-1}b+\ldots +A_mab^{m-1}-A_{m+1}b^m)^2=4ab(A_2a^{m-1}+A_4a^{m-3}b^2+\ldots+A_{m+1}b^{m-1}) (A_1a^{m-1}+A_3a^{m-3}b^2+\ldots+A_mb^{m-1}).$$

L'identità

$$(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2 = 4\,ab\,(a^2 + b^2)$$

(v. *Formulario,* pag. 13, nº 57) è un caso specialissimo della (23) che si ottiene supponendo $m = 2$ ed $A_1 = A_2 = A_3 = 1$; mentre con $m = 2$, $A_1 = A_2 = 1$ ed $A_3 = -1$, si trova:

$$(a^2 + ab - b^2)^2 - (a^2 - ab - b^2)^2 = 4ab(a^2 - b^2)\,, \text{ ecc.}$$

È manifesto, infine, che si avranno altre identità uguagliando al secondo membro della (22) la decomposizione in fattori del binomio $P_1^k \pm P_2^k$.

§ 10.

Alle surriferite identità generali, alle quali dànno luogo i polinomi (15) e (16) o (19) e (20), ne possono essere unite altre che provengono dai polinomi stessi, quando per particolari relazioni tra i coefficienti A_1, A_2, ... A_{m+1}, avviene che l'una o l'altra coppia di polinomi ammettono divisori comuni.

Sono vere, per un esempio, le seguenti proposizioni:

1ª) *I polinomi* (15) *e* (16), *moltiplicati per* A_2^2 *hanno per massimo comun divisore il polinomio*

$$A_2\,a^{m-2} + A_4\,a^{m-4}b^2 + \ldots + A_{m-2}\,a^2\,b^{m-4} + A_m\,b^{m-2}$$

se tra i coefficienti A_1, A_2, ... A_{m+1} *sussistono le relazioni:*

$$\frac{A_2A_3 - A_1A_4}{A_2} = \frac{A_2A_5 - A_1A_6}{A_4} = \ldots = \frac{A_2A_{m-1} - A_1A_m}{A_{m-2}} = \frac{A_2\,A_{m+1}}{A_m}\,. \tag{25}$$

2ª) *I polinomi* (19) *e* (20), *moltiplicati per* A_2, *hanno per massimo comun divisore il polinomio*

$$A_2\,a^{m-1} + A_4\,a^{m-3}b^2 + \ldots + A_{m-1}\,a^2\,b^{m-3} + A_{m+1}\,b^{m-1}$$

se tra i coefficienti A_1, A_2, ... A_{m+1} *sussistono le relazioni:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_3}{A_4} = \ldots = \frac{A_{m-2}}{A_{m-1}} = \frac{A_m}{A_{m+1}}\,. \tag{26}$$

In virtù di questi teoremi, facili a dimostrare, si verifica che si ha, per m pari:

$$A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \dots + A_m a b^{m-1} + A_{m+1} b^m =$$
$$\frac{1}{A_2^2} [A_1 A_2 a^2 + A_2^2 ab + (A_2 A_3 - A_1 A_4) b^2] (A_2 a^{m-2} + A_4 a^{m-4} b^2 + \dots$$
$$+ A_{m-2} a^2 b^{m-4} + A_m b^{m-2})$$

$$A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \dots - A_m a b^{m-1} + A_{m+1} b^m =$$
$$\frac{1}{A_2^2} [A_1 A_2 a^2 - A_2^2 ab + (A_2 A_3 - A_1 A_4) b^2] (A_2 a^{m-2} + A_4 a^{m-4} b^2 + \dots$$
$$+ A_{m-2} a^2 b^{m-4} + A_m b^{m-2})$$

e per m dispari:

$$A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \dots + A_m a b^{m-1} + A_{m+1} b^m =$$
$$\frac{1}{A_2} (A_1 a + A_2 b) (A_2 a^{m-1} + A_4 a^{m-3} b^2 + \dots + A_{m-1} a^2 b^{m-3} + A_{m+1} b^{m-1})$$

$$A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \dots + A_m a b^{m-1} - A_{m+1} b^m =$$
$$\frac{1}{A_2} (A_1 a - A_2 b) (A_2 a^{m-1} + A_4 a^{m-3} b^2 + \dots + A_{m-1} a^2 b^{m-3} + A_{m+1} b^{m-1}).$$

Si può dunque affermare che:

1°) *Se m è un numero pari, si ha, qualunque sia l'esponente n:*

$$(27)\quad (A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \dots + A_{m+1} b^m)^n \pm (A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \dots + A_{m+1} b^m)^n =$$
$$\frac{1}{A_2^{2n}} \Big([A_1 A_2 a^2 + A_2^2 ab + (A_2 A_3 - A_1 A_4) b^2]^n \pm [A_1 A_2 a^2 - A_2^2 ab +$$
$$(A_2 A_3 - A_1 A_4) b^2]^n \Big) \Big(A_2 a^{m-2} + A_4 a^{m-4} b^2 + \dots + A_m b^{m-2} \Big)^n$$

supposto che le A_1, A_2, ... A_{m+1} verifichino le relazioni (25).

2°) *Se m è un numero dispari, si ha, per qualsivoglia esponente n:*

$$(28)\quad (A_1 a^m + A_2 a^{m-1} b + \dots + A_{m+1} b^m)^n \pm (A_1 a^m - A_2 a^{m-1} b + \dots - A_{m+1} b^m)^n =$$
$$\frac{1}{A_2^n} \Big([A_1 a + A_2 b]^n \pm [A_1 a - A_2 b]^n \Big) \Big(A_2 a^{m-1} + A_4 a^{m-3} b^2 + \dots$$
$$+ A_{m+1} b^{m-1} \Big)^n$$

nell'ipotesi che le A_1, A_2, ... A_{m+1} verifichino le relazioni (26).

È inteso che ognuna delle formule (27) e (28) ne comprende solamente due, perchè in ambo i membri vanno presi ad un tempo i medesimi segni.

Roma, novembre 1894.

ELCIA SADUN.

Sopra una generalizzazione del teorema di Fermat.

1. In una nota presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi (*), il sig. Lucas dimostrava una proposizione, la quale generalizzava il teorema di Fermat, che serve di base alla teoria delle congruenze. La stessa proposizione era già stata ottenuta dal sig. Serret, almeno in un caso particolare, come conseguenza della sua teoria delle congruenze irriducibili secondo un modulo primo; e poi dal sig. Picquet con considerazioni geometriche. Il teorema, come lo concludeva il sig. Lucas, è il seguente:

Siano x e n due numeri interi, primi fra loro, e siano $a, b, c, \ldots l$ i numeri primi differenti che entrano in n. La funzione

$$F(x, n) = x^n - \Sigma x^{\frac{n}{a}} + \Sigma x^{\frac{n}{ab}} - \ldots \pm x^{\frac{n}{ab\,.\,l}}$$

(in cui le sommatorie devono estendersi rispettivamente a tutti gli esponenti che si possono formare, combinando in tutti i modi possibili 1 a 1, 2 a 2, ... i numeri a, b, ... l) è sempre divisibile per n.

Così enunciato il teorema si riferisce esclusivamente al caso in cui i numeri x e n sono primi tra loro; ma esso è vero ugualmente quando x e n non sono primi tra loro. Questo ci proponiamo anzitutto di far vedere, completando la dimostrazione del sig. Lucas; e quindi indicheremo una ulteriore generalizzazione del teorema.

2. Per semplicità considereremo il caso in cui il numero n sia della forma $n = a^{\alpha} b^{\beta}$, a e b essendo numeri primi differenti. Sia poi $x = \rho\, a^{\alpha'} b^{\beta'}$, ρ essendo un numero intero primo con n, α' e β' numeri interi positivi. Il caso in cui è ad un tempo $\alpha' = 0$ $\beta' = 0$, fu già considerato dal sig. Lucas; quindi supporremo che uno almeno dei numeri α' e β' sia diverso da 0.

(*) Seduta del 16 aprile 1883.

1° Caso. — Uno dei numeri α' e β' è nullo; è, ad esempio, $\beta'=0$. Allora la funzione

$$(1)\qquad F(x, n) = (\rho a^{\alpha'})^n - (\rho a^{\alpha'})^{\frac{n}{a}} - (\rho a^{\alpha'})^{\frac{n}{b}} + (\rho a^{\alpha'})^{\frac{n}{ab}}$$

può scriversi

$$(1')\,F(x,n) = a^{\alpha}\left\{\rho^n a^{\alpha' n - \alpha} - \rho^{\frac{n}{a}} a^{\alpha'\frac{n}{a} - \alpha} - \rho^{\frac{n}{b}} a^{\alpha'\frac{n}{b} - \alpha} + \rho^{\frac{n}{ab}} a^{\alpha'\frac{n}{ab} - \alpha}\right\}$$

e i numeri

$$\alpha' n - \alpha \quad , \quad \alpha'\frac{n}{a} - \alpha \quad , \quad \alpha'\frac{n}{b} - \alpha \quad , \quad \alpha'\frac{n}{ab} - \alpha$$

sono positivi, perchè si ha, qualunque siano a e α,

$$a^{\alpha - 1} \geqq \alpha$$

e a fortiori

$$\alpha' a^{\alpha} b^{\beta} \geqq \alpha \quad , \quad \alpha' a^{\alpha-1} b^{\beta} \geqq \alpha \quad , \quad \alpha' a^{\alpha} b^{\beta-1} \geqq \alpha \quad , \quad \alpha' a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \geqq \alpha .$$

Dunque la funzione (1') è divisibile per a^{α}.

Si ha poi pel teorema di Fermat generalizzato

$$(\rho a^{\alpha'})^{b^{\beta}} \equiv (\rho a^{\alpha'})^{b^{\beta-1}} \qquad (\mathrm{mod}\ b^{\beta})$$

quindi

$$(\rho a^{\alpha'})^{a^{\alpha} b^{\beta}} \equiv (\rho a^{\alpha'})^{a^{\alpha} b^{\beta-1}} \qquad (\mathrm{mod}\ b^{\beta})$$

od anche

$$(2)\qquad \rho^n a^{\alpha' n - \alpha} \equiv \rho^{\frac{n}{b}} a^{\alpha'\frac{n}{b} - \alpha} \qquad (\mathrm{mod}\ b^{\beta}).$$

Similmente si trova

$$(3)\qquad \rho^{\frac{n}{a}} a^{\alpha'\frac{n}{a} - \alpha} \equiv \rho^{\frac{n}{ab}} a^{\alpha'\frac{n}{ab} - \alpha} \qquad (\mathrm{mod}\ b^{\beta}).$$

Sottraendo membro a membro le (2) e (3), e radunando tutti i termini nel 1° membro si conclude

$$\rho^n a^{\alpha' n - \alpha} - \rho^{\frac{n}{a}} a^{\alpha'\frac{n}{a} - \alpha} - \rho^{\frac{n}{b}} a^{\alpha'\frac{n}{b} - \alpha} + \rho^{\frac{n}{ab}} a^{\alpha'\frac{n}{ab} - \alpha} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ b^{\beta}).$$

Dunque la funzione (1) è divisibile ad un tempo per a^{α} e per b^{β}, e perciò per $a^{\alpha} b^{\beta} = n$. cvd.

2° *Caso.* — Nessuno dei numeri α' e β' è nullo.

Poichè si ha qualunque siano a e α, b e β

$$a^{\alpha-1} \geqq \alpha \qquad b^{\beta-1} \geqq \beta$$

e a fortiori

$$\alpha' a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \geqq \alpha \qquad \beta' a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \geqq \beta$$

tutti i termini della funzione (1) sono divisibili per $a^{\alpha} b^{\beta} = n$; ne consegue $F(x, n) \equiv 0 \pmod{n}$. cvd.

3. *Teorema.* — Siano $M = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_{\lambda}^{\mu_{\lambda}}$, $r = q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \dots q_{\tau}^{\nu_{\tau}}$ dei numeri interi qualunque, $p_1, p_2, \dots p_{\lambda}$ essendo numeri primi differenti, come pure $q_1, q_2, \dots q_{\tau}$. Se si pone

$$\Phi_r(M) = M^r \left(1 - \frac{1}{p_1^r}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^r}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_{\lambda}^r}\right) = M^r - \Sigma\left(\frac{M}{p_1}\right)^r$$
$$+ \Sigma\left(\frac{M}{p_1 p_2}\right)^r - \dots + \dots + (-1)^{\lambda}\left(\frac{M}{p_1 p_2 \cdots p_{\lambda}}\right)^r$$

si avrà

$$(4) \quad \Phi_r(M) - \Sigma \Phi_{\frac{r}{q_1}}(M) + \Sigma \Phi_{\frac{r}{q_1 q_2}}(M) - \dots + (-1)^{\tau} \Phi_{\frac{r}{q_1 q_2 \cdots q_{\tau}}}(M) \equiv 0 \pmod{r}.$$

Questa proposizione non è che un semplice corollario della precedente. Infatti la (4) può scriversi:

$$(4') \quad G(r, M) = M^r - \Sigma M^{\frac{r}{q_1}} + \Sigma M^{\frac{r}{q_1 q_2}} - \dots + (-1)^{\tau} M^{\frac{r}{q_1 q_2 \cdots q_{\tau}}} -$$
$$- \left\{ \left(\frac{M}{p_1}\right)^r - \Sigma \left(\frac{M}{p_1}\right)^{\frac{r}{q_1}} + \Sigma \left(\frac{M}{p_1}\right)^{\frac{r}{q_1 q_2}} - \dots + (-1)^{\tau} \left(\frac{M}{p_1}\right)^{\frac{r}{q_1 \cdots q_{\tau}}} \right\} + \dots$$

$$+(-1)^{\lambda}\left\{\left(\frac{M}{p_1\cdots p_\lambda}\right)^{r}-\Sigma\left(\frac{M}{p_1\cdots p_\lambda}\right)^{\frac{r}{q_1}}+\Sigma\left(\frac{M}{p_1\cdots p_\lambda}\right)^{\frac{r}{q_1 q_2}}-\ldots+(-1)^{\lambda}\left(\frac{M}{p_1\cdots p_\lambda}\right)^{\frac{r}{q_1\cdots q_\tau}}\right\}.$$

ovvero, ricordando la notazione di cui al N° 2

$$G(r, M)=F(r, M)-\left\{F\left(r,\frac{M}{p_1}\right)+F\left(r,\frac{M}{p_2}\right)+\ldots+F\left(r,\frac{M}{p_\lambda}\right)\right\}+\ldots$$

$$+(-1)^{\lambda}F\left(r,\frac{M}{p_1 p_2\cdots p_\lambda}\right)$$

E poichè si ha

$$F(r, M)\equiv 0 \quad F\left(r,\frac{M}{p_1}\right)\equiv 0 \quad F\left(r,\frac{M}{p_2}\right)\equiv 0 \quad \ldots \quad F\left(r,\frac{M}{p_1\cdots p_\lambda}\right)\equiv 0 \pmod{r}$$

ne risulta

$$G(r, M)\equiv 0 \pmod{r}. \qquad \text{cvd.}$$

4. La funzione $\Phi_r(M)$ sopra definita coincide per $r=1$ colla funzione $\varphi(M)$ che esprime quanti numeri vi sono inferiori a M e primi con M; e gode d'una proprietà che può considerarsi come la generalizzazione d'un teorema noto di Gaus. Si ha infatti il seguente

« *Teorema. — Sia r un numero intero,* $M=p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\cdots p_\lambda^{\mu_\lambda}$ *un altro numero intero, e* $\delta_1=1$, $\delta_2=\ldots\delta_n=M$ *i suoi divisori. Si avrà*

$$\Phi_r(\delta_1)+\Phi_r(\delta_2)+\ldots+\Phi_r(\delta_n)=M^r \qquad (6) \text{ ».}$$

Uno qualunque degli $n=(\mu_1+1)(\mu_2+1)\ldots(\mu_\lambda+1)$ divisori di M è della forma $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_\lambda^{a_\lambda}$, a_1 essendo uno qualunque dei numeri $0, 1, 2, \ldots \mu_1$, ecc. Dunque un divisore qualunque δ_i di M coincide con un termine del prodotto

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\lambda} \sum_{\rho=\nu}^{\rho=\mu_\nu} p_\nu^\rho = \left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\mu_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\mu_2}\right)$$
$$\ldots\left(1+p_\lambda+p_\lambda^2+\ldots+p_\lambda^{\mu_\lambda}\right).$$

D'altronde si ha

$$\Phi_r(\delta_i) = \Phi_r\left(p_1^{a_1}\, p_2^{a_2} \ldots p_\lambda^{a_\lambda}\right) = \Phi_r\left(p_1^{a_1}\right)\Phi_r\left(p_2^{a_2}\right)\ldots\Phi_r\left(p_\lambda^{a_\lambda}\right).$$

Dunque una qualunque delle quantità $\Phi_r(\delta_i)$ è uguale ad un termine del prodotto

$$(8)\qquad \prod_{\nu=1}^{\nu=\lambda} \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu_\nu} \Phi_r\left(p_\nu^\rho\right) = \left[1+\Phi_r(p_1)+\ldots+\Phi_r\left(p_1^{\mu_1}\right)\right]\ldots$$
$$\left[1+\Phi_r(p_\lambda)+\ldots+\Phi_r\left(p_\lambda^{\mu_\lambda}\right)\right]$$

e la somma delle quantità $\Phi_r(\delta_i)$ al prodotto stesso. Ma l'espressione

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=\mu_\nu} \Phi_r\left(p_\nu^\rho\right) = 1+\Phi_r(p_\nu)+\Phi_r(p_\nu^2)+\ldots+\Phi_r\left(p_\nu^{\mu_\nu}\right)$$

è uguale a

$$1+\left(p_\nu^r-1\right)\left(1+p_\nu^r+p_\nu^{2r}+\ldots+p_\nu^{(\mu_\nu-1)r}\right) = p_\nu^{\mu_\nu r}.$$

Dunque si conclude

$$\prod_{\nu-1}^{\nu-\lambda} \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu_\nu} \Phi_r\left(p_\nu^\rho\right) = p_1^{\mu_1 r}\, p_2^{\mu_2 r} \ldots p_\lambda^{\mu_\lambda r} = M^r. \qquad \text{crd}$$

5. La funzione $\Phi_r(M)$ sopra definita esprime il numero delle funzioni ridotte secondo un modulo $M = p_1^{\mu_1}\, p_2^{\mu_2} \ldots p_\lambda^{\mu_\lambda}$ qualunque, e secondo una funzione intera di grado r, irriducibile secondo ciascuno dei moduli primi $p_1, p_2 \ldots p_\lambda$ (*).

(*) Vedi una nostra memoria che comparirà prossimamente nel periodico *El Progreso Matemático* (Saragozza).

L'espressione $\frac{F(r, M)}{r}$ rappresenta poi il numero delle congruenze di grado r irriducibili secondo ciascuno dei moduli $p_1, p_2 \dots p_\lambda$ e perciò secondo il modulo composto M.

Casella (Genova), ottobre 1894.

GEROLAMO CORDONE.

VARIETÀ

Il principio delle aree e la storia d'un gatto.

Molti giornali si sono occupati della discussione avvenuta all'Accademia delle Scienze di Parigi, a proposito della questione citata; sicchè non sarà fuor di luogo il darne un cenno ai nostri lettori.

Come è noto, per studiare i moti degli animali, moti troppo celeri per potersi analizzare ad occhio, si fa con speciali apparecchi una serie di fotografie istantanee dell'animale in moto, ad intervalli vicinissimi fra loro.

Dall'esperienza popolare risulta che un gatto, comunque abbandonato, cade sempre sulle proprie zampe. Il signor Murley, distinto fisiologo, volle appunto studiare i movimenti d'un gatto abbandonato colle zampe all'insù, e presentò all'Accademia delle Scienze di Parigi, in seduta del 29 ottobre, 32 fotografie da lui fatte durante la caduta di questa bestiolina. Da esse risulta chiaramente che il gatto ha compiuto esattamente un mezzo giro.

Questa comunicazione diede luogo a discussioni cui presero parte parecchi Socii, poichè ciò pareva in contraddizione colla legge di meccanica chiamata principio delle aree. Invero il Delaunay (*) afferma che se un essere animato è abbandonato libero nello spazio, non solo non può spostare il suo centro di gravità, ma nemmeno darsi un moto di rotazione attorno a questo punto.

In conseguenza, chi spiegò il fenomeno che il gatto si è effettivamente voltato, ricorrendo alla resistenza dell'aria; altri suppose che il gatto, nell'istante che è abbandonato, si imprimesse un moto rotatorio appoggiandosi colle zampe contro le mani dell'esperimentatore. Ma queste spiegazioni non sono soddisfacenti, per ragioni che qui è inutile l'esporre. D'altra parte, esaminando meglio il principio delle aree ne risulta bensì che un corpo rigido non può di per sè mettersi a rotare, nè un corpo comunque deformabile non può, in virtù di forze interne,

---

(*) *Mécanique rationnelle*, p. 450.

anche per un solo istante, rotare come rota un corpo rigido; ma effettivamente un corpo non rigido può con moti relativi delle sue parti deformarsi in modo che in fine esso si è capovolto, o se vogliamo ha rotato, benchè effettivamente in nessun istante del suo movimento esso roti come un corpo rigido. E la possibilità di questo fenomeno fu spiegata dai sigg. Guyou, Levy, Mesny, Appel, Lecornu, ecc. Il Deprez fece costrurre un apparecchio il quale, in virtù di azioni interne poteva rotare d'un certo angolo.

Ma la spiegazione del moto del gatto parmi assai semplice. Questo animale abbandonato a sè, descrive colla sua coda un cerchio nel piano perpendicolare all'asse del suo corpo. In conseguenza, pel principio delle aree, il resto del suo corpo deve rotare in senso opposto al moto della coda; e quando ha rotato della quantità voluta, egli ferma la sua coda e con ciò arresta contemporaneamente il moto suo rotatorio, salvando in tal guisa sè ed il principio delle aree.

Questo movimento della coda si vede benissimo ad occhio nudo; risulta egualmente chiaro dalle fotografie fatte. In esse si vede che le zampe anteriori, avvicinate all'asse di rotazione, non influiscono nel movimento. Le zampe posteriori, pure distese in vicinanza dell'asse di rivoluzione forse descrivono dei coni, nello stesso senso della coda, e quindi contribuiscono alla rotazione del corpo in senso opposto. Ne risulterebbe che un gatto senza coda si capovolgerebbe con molto maggiore difficoltà. Avvertenza importantissima: fare queste esperienze con un gatto fidato!

Questo moto del gatto diventa così una elegante applicazione del principio delle aree. Altre conferme sperimentali sono facili ad immaginarsi. Così se un uomo si dispone in modo da poter rotare liberamente attorno ad un asse verticale, p. e. salendo su d'un'altalena appesa ad un punto, e se colla sua mano descrive delle curve chiuse orizzontali, il suo corpo roterà in senso opposto, come se la curva descritta dalla mano fosse una ruota che ingrani nel suo corpo. E se si fa rotare un lungo bastone in un piano orizzontale, il suo corpo roterà in senso opposto. Questo bastone corrisponde alla coda del gatto.

(P.)

Sull' insegnamento della Matematica nei Ginnasî e nei Licei.

Alcuni professori son d'avviso che mentre in Italia si hanno per i Licei eccellenti manuali di Geometria, non se ne hanno, generalmente parlando, di egualmente buoni riguardo all'Algebra. Ciò detto, si intende, rispetto alla parte didattica, rispetto all'efficacia che il professore si propone di conseguire nel suo insegnamento; imperciocchè in ordine alla parte scientifica, degli ottimi trattati, quantunque in esiguo numero, fortunatamente si hanno. Ma di fronte alle attuali scolaresche troppo numerose, e costituite in gran parte di giovani poco adatti alla serietà di ogni genere di studi, e specialmente degli studi di Matematica, con un orario brevissimo, e con l'obbligo che si fa agl'insegnanti di Matematica di non assegnare che rari esercizii come lavoro domestico, un professore di Liceo difficilmente troverà un libro che alle esigenze della scienza congiunga quelle della scuola.

Intanto in Italia professori che si occupano, con piena competenza di perfezionare i metodi d'insegnamento e di porre sopra basi rigorosissime ogni ramo di Matematica se ne hanno, ed alcuni di loro sono davvero valorosissimi, per la qual cosa la causa del difetto di adattati libri d'Algebra per le scuole liceali non deve attribuirsi a mancanza di persone che li sappiano scrivere. Esprimo qui il mio debole parere intorno ad una questione così importante.

Secondo me la causa del lamentato inconveniente è da attribuirsi al modo come l'insegnamento della Matematica è distribuito nel Ginnasio superiore e nel Liceo. Il prof. Cremona notò opportunamente che fare un libro elementare, che schiettamente si adatti alle scuole, è cosa difficilissima, e richiede molto tempo, e una volta che si sia riusciti, gloria non se ne avrà, e nemmeno dei lucri. Ma, osservo io, che chi scrive un libro che costa molto lavoro e non procura gloria, non ne abbia poi a risentire un danno finanziario, è cosa molto evidente, ond'è che i libri si fanno il più possibilmente rispondenti ai programmi, e quando questi non sono ben fatti, nemmeno i libri che li sviluppano possono essere eccellenti. Mettete p. es. gl'irrazionali in un trattato d'Aritmetica, e l'argomento dovrà di necessità essere contenuto in ristretti e modesti confini; mettetelo in un corso di Analisi algebrica, e vedrete se sarà possibile non trascendere, anzi se non sarà necessario che si trascenda.

Ecco, per tornare all'argomento, come io penso che debba essere distribuito ed impartito l'insegnamento dell'Aritmetica e dell'Algebra nel Ginnasio e nel Liceo.

Il primo libro di Euclide, come saviamente osservarono i chiarissimi Proff. Valeri e Bettazzi (*Periodico di Matematica*, anni V e VI), va tolto dal Ginnasio superiore e messo al Liceo. È evidente, essi notarono, che il professore di Liceo, nello svolgimento del suo programma di Geometria non può fare assegnamento alcuno sulla conoscenza, da parte degli scolari, della materia contenuta in quel primo libro, sia perchè si trova di fronte a giovani che la detta materia hanno svolta con metodi diversi, e sia anche perchè certi giovani provenienti da scuole private, non ne hanno che una imperfetta conoscenza.

Nei primi tre anni di Ginnasio si insegna l'Aritmetica pratica. Io non so che cosa intendano i professori di Ginnasio inferiore per Aritmetica pratica; escludo però che intendano un complesso irrazionale di regole e di enunciati di teoremi. Secondo me in questa Aritmetica pratica si dimostrerà che il prodotto di due fattori è commutativo e distributivo; si dimostreranno i teoremi principali sulla divisibilità, sul massimo comune divisore, sui numeri primi; si dimostreranno le regole relative al conteggio con numeri frazionarii, e così via. I teoremi meno semplici si daranno nel solo loro enunciato, badando di farne la verifica con numerosi casi particolari. Così alla fine dei tre anni di corso del Ginnasio inferiore i giovani avranno una mediocre preparazione per potere intraprendere un corso di Aritmetica razionale. Il professore di Aritmetica razionale non può avere il compito di indugiarsi a lungo per dimostrare agli scolari che p. es. la moltiplicazione e la divisione degl'interi, eseguite nel modo ad essi noto, conducono realmente ai risultati voluti. Egli non deve fare altro che mettere bene le basi della scienza dei numeri, toccando di volo tutto ciò che si riferisce alla materialità delle operazioni pratiche. E allora non si vede perchè alla quarta ginnasiale, pur lasciando l'attuale orario, non si possa fare insieme con l'Aritmetica dei numeri interi quella dei numeri frazionarii. Io non veggo perchè nell'Aritmetica dei numeri interi non si debbano considerare il prodotto di una somma per una differenza, e quello di due differenze, e come tali sviluppi non si debbano poi estendere ai numeri frazionarii. I teoremi relativi alle potenze possono benissimo essere trattati a quarta ginnasiale.

Alla quinta ginnasiale, fatto un riepilogo dei teoremi più importanti studiati a quarta, si incomincierebbe lo studio delle frazioni periodiche. Valenti professori hanno dimostrato come qui con molta semplicità si possa introdurre il concetto di limite e svolgere le principali proprietà che a tale concetto si riferiscono. Svolte queste proprietà con la dovuta

modestia e parsimonia, e si può fare, ed è stato fatto, io non veggo nessunissima ragione perchè alla quinta ginnasiale non si debba fare una modesta teoria dei numeri irrazionali, deducendola da quella dei limiti. Esteso così il concetto di numero, si estenderanno le definizioni delle operazioni aritmetiche, e si dimostrerà con alcuni esempi come certe proprietà dimostrate per i numeri interi e per i numeri frazionarii valgono pure per gl'irrazionali.

Può in questo momento essere fecondo un riepilogo, essere utile una classificazione delle operazioni aritmetiche, e dedurre la conseguente impossibilità di eseguire tutte le sottrazioni. I numeri negativi si potranno allora introdurre, e vi sono autori che ciò fanno nel modo più semplice che si possa immaginare.

Un libro d'Aritmetica che comprenda tutto ciò di cui si è parlato può avere l'estensione d'uno dei più voluminosi manualetti Hoepli da L. 1,50 il volume, e ai miei colleghi è noto appunto il preziosissimo volumetto Hoepli d'*Aritmetica razionale* del prof. F. Panizza.

Stabiliti i programmi del Ginnasio nel modo sopra indicato, il compito del professore di Liceo riguardo all'Algebra è molto semplificato. Fin dalle prime lezioni potrà parlare di monomi e di polinomi, e di conseguenti riduzioni di termini simili, e tutto il calcolo letterale potrà essere sviluppato in pochissime lezioni. Le lettere, fin dal principio, rappresenteranno numeri razionali o irrazionali, positivi o negativi, cosa didatticamente vantaggiosa per la generalità dei risultati a cui si vuole pervenire.

La compilazione d'un buono ed adattato libro d'Algebra per i Licei sarebbe allora agevolissima cosa. Definizioni scelte, semplicità nelle dimostrazioni, parsimonia, bando a tutte le prolissità che vogliono avere per iscopo la sostituzione del libro alla viva voce dell'insegnante (sostituzione che, specialmente nell'insegnamento secondario, è impossibile) dovrebbero essere le qualità essenziali d'un tal libro. Il Direttore del *Periodico di Matematica* per l'insegnamento secondario ebbe ad esprimere saviamente, a proposito della traduzione d'un libro, alla quale il traduttore aveva aggiunto del suo parecchie note, che oramai i libri si devevano migliorare *togliendo,* non *aggiungendo* a quello che essi contenevano. E il prof. Garbieri così termina un suo bellissimo articolo diretto agl'Insegnanti di Matematica delle scuole secondarie: « Per carità, meno pompa di erudizione, meno retorica di lezioni cattedratiche; ritorniamo alla semplicità dei vecchi, i quali, umili maestri, non si sforzavano di parere gonfi di scienza e di sbalordire con la dottrina i piccoli alunni, ma s'ingegnavano di riuscire chiari e sopratutto utili ». E il prof. Pincherle scrive un manualetto d'Algebra (manuale Hoepli da L. 1,50 il volume) da servire per le scuole secondarie, e il prof.

Pascal, in manuali Hoepli, necessariamente un po' più voluminosi, detta lezioni di Calcolo infinitesimale, e così via. Sarà senza dubbio fecondo di utili risultati quest'esempio che dànno valentissimi maestri, specialmente delle Università italiane, questo richiamo alla semplicità, alla parsimonia, alla modestia; ed i professori delle scuole secondarie accetteranno di buon grado i consigli, nascosti o palesi, che ci vengono da uomini che, mentre vivono ne' campi più elevati della Scienza, sanno stare eziandio nelle regioni più umili della medesima.

Catania, gennaio 1895.

S. CATANIA.

Nuove pubblicazioni.

CHARLES HENRY, Bibliothécaire à la Sorbonne. — *Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques.* Paris, Nony, 1895, pag. 126.

G. MAUPIN. — *Questions d'Algèbre.* Avec une préface de M. C. A. LAISANT. Paris, Nony, 1894, pag. VIII+292.

A. ZIWET. — *An elementary treatise on theoretical mechanics.*
Part II. *Introduction to dynamics;* Statics, a. 1893.
Part III. *Kinetics;* a. 1894, New-York, Macmillan and Co.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série, Fiches 1 à 100. Paris, Gauthier-Villars, 1894; prix 2 fr.

O. JACOANGELI. — *Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali* Milano, Hoepli, 1895; prezzo L. 7,50.

Un capitolo di Calcolo differenziale

(sulla serie di Taylor-Maclaurin)

Nota di Ernesto Pascal, *a Pavia.*

Dopo la grande estensione data al concetto di funzione di una o più variabili, i principali teoremi e procedimenti del calcolo differenziale hanno perduto la loro validità, e quindi da parecchi anni e per opera di varii autori, è cominciato un lavorio per stabilire, per ciascuno di essi, le condizioni necessarie e sufficienti di validità.

Ora per alcuni pochi di tali teoremi il problema è risoluto in modo soddisfacente; per altri o non è stato risoluto, o lo è stato da alcuni autori in maniera che il risultato diventa quasi illusorio; inquantochè è chiaro che si potrà dire d'aver risoluto veramente il problema, quando le condizioni di cui si parla sono espresse sotto una forma facilissima, e tale da potersi applicare con poca difficoltà ai singoli casi speciali. Ma quando invece l'applicazione di quelle condizioni al caso singolo presenta difficoltà maggiori che non l'esaminare direttamente su quel caso la validità o meno del teorema, allora a buon diritto si può dire che il vantaggio e l'importanza del risultato ottenuto sono illusorii, e che non si è fatto un vero progresso nella scienza.

Ora ciò è accaduto per alcuni dei teoremi fondamentali del calcolo, ed è accaduto anche per la serie di Taylor, come dirò più sotto.

Perchè una funzione di variabile complessa sia sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno di un punto, si sa da moltissimo tempo (sin da Cauchy) sotto qual forma semplice sono espresse le condizioni necessarie e sufficienti; ma non è più lo stesso per le funzioni di variabili reali, caso che non può ricavarsi dal primo, come caso particolare.

Dopo un lavoro di König, che a mio giudizio non risolveva affatto il problema, è comparso, in questi ultimi mesi, un lavoro di Pringsheim [1], il cui risultato è senza dubbio semplice ed elegante, e perciò

(1) Pringsheim. *Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen.* Math. Ann., vol. 44, p. 57.

suscettibile di entrare subito a far parte delle ordinarie lezioni di calcolo infinitesimale.

Ora io mi propongo con questa Nota di far conoscere e divulgare fra noi questo risultato del Pringsheim che rappresenta un vero progresso nella scienza, e di esporlo in un modo che mi sembra assai semplice, e dal punto di vista didattico, assai conveniente; aggiungendovi poi ancora qualche considerazione che mi è riuscito di fare sull'argomento stesso.

Sarà poi pregio del lavoro premettere alcune considerazioni generali sul problema che ci occupa, sui suoi affini e sulla sua storia.

§ 1.

Funzioni indefinitivamente derivabili.

S'intende facilmente come al problema dello sviluppo di una funzione in serie indefinita di Taylor, sia affine l'altro della derivabilità indefinita della funzione stessa.

Anzi Lagrange credette che i due problemi fossero la stessa cosa [1], che cioè per la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor bastasse che esistessero e fossero finite le derivate di qualunque ordine della funzione.

Anche l'Hankel nel suo celebre e relativamente recente lavoro sulle funzioni oscillanti [2] pare che abbia ammessa per vera l'asserzione di Lagrange.

Il Cauchy [3] però sin da moltissimo tempo riconobbe pel primo falsa l'asserzione di Lagrange e addusse l'esempio della funzione che per x diverso da zero è $e^{-\frac{1}{x^2}}$ e per $x=0$ è zero, come un esempio di funzione contraddicente a quella asserzione.

La legittimità, e, dirò così, la purezza di un tale esempio, è stata poi oppugnata da Du Bois Reymond [4] e da Pringsheim [5], i quali del resto hanno trovato migliori esempii di funzioni della specie indicata. La difficoltà cui dà luogo l'esempio di Cauchy consiste in ciò che il valore della funzione nel punto $x=0$ non è dato dalla

---

(1) Opere, vol. 9, p. 65; v. 10, p. 72.

(2) Math. Ann., v. 20 (1870).

(3) Leçons, etc., p. 152 (1823).

(4) *Gultigkeitsbereich des Taylor' schen Entwick.* Math. Ann., v. 21, v. p. 114.

(5) *Zur Theorie der Taylor' schen Reihe, etc.* Math. Ann., vol. 42, p. 153. — *Functionen mit endlichen differentialquot. etc.*, Math. Ann., v. 44.

stessa formola analitica che fornisce gli altri valori della funzione; il che del resto dal punto di vista del moderno e largo concetto di funzione non è una vera difficoltà. È sempre però desiderabile trovare esempii esenti da una siffatta obbiezione. Gli autori citati ne hanno trovati moltissimi, e ad essi può aggiungersi anche un'altra funzione presentata da Mittag Leffler [1] e che ha il vantaggio d'essere assai semplice.

Data una funzione indefinitivamente derivabile si può formare la serie di Taylor corrispondente riferita ad un certo punto x_0. Ora se la funzione è sviluppabile nell'intorno (a destra o a sinistra) di x_0, non solo deve accadere che tale serie così formata sia convergente, ma anche che il suo valore *per ogni* x dell'intorno di x_0 sia eguale al valore della funzione. Se non si verifica la seconda condizione, la funzione non sarà sviluppabile, ma la serie che abbiamo formata potrebbe ancora essere convergente.

A prescindere dall'esempio di Cauchy, è stato il Pringsheim, che ha trovato il primo esempio di una funzione non sviluppabile in serie mentre poi la serie di Taylor è convergente (v. Math. Ann., vol. 42).

Per completare queste indicazioni storiche possiamo notare che non solo si può trovare una funzione che pure avendo le derivate tutte finite, in tutti i punti di un segmento, non sia sviluppabile in serie di Taylor riferita ad un certo punto del segmento stesso, ma si può anche trovare, come ha fatto vedere il Du Bois Reymond (Math. Ann., vol. 21. pp. 115-116, §§ 7-8), una funzione che abbia la stessa singolarità rispetto a qualunque punto del segmento stesso.

§ 2.

Discussione generale sulla sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor. Condizioni di König.

Il problema della sviluppabilità in serie di Taylor consiste in questo: Quali condizioni occorrono per la funzione $f(x)$ definita in tutto un intervallo da a sino ad $a + H$, perchè

1. La serie di Taylor formata nel solito modo mediante le derivate di $f(x)$ nel punto a sia convergente per ogni $h < H$.

2. Il suo valore per ogni $h < H$ sia il valore di $f(a+h)$.

Dai principii del calcolo si sa in che maniera si può esprimere la condizione necessaria e sufficiente, perchè ciò accada; è necessario ed è sufficiente (oltre naturalmente la derivabilità indefinita della funzione

---

[1] Acta Math., vol. 15, p. 279.

in tutto l'intervallo da a ad $a + \mathrm{H}$) che il cosidetto resto $\mathrm{R}_n(h, \vartheta)$ che è una funzione di h e di ϑ (numero compreso fra 0 e 1) converga a zero per $n = \infty$. Ora il numero ϑ dipende anche da n e da h, e quindi in generale varierà con n; non conoscendo la dipendenza di ϑ da n, non ci riesce sempre possibile verificare se R_n converge a zero. Nei casi più ordinarii può accadere che R_n converga a zero per qualunque ϑ, e che effettivamente questa sua convergenza a zero la possiamo verificare indipendentemente dalla conoscenza del valore di ϑ; ma se ciò non accade, il problema naturalmente resta irresoluto per questa via, almeno colle nozioni che abbiamo sino al presente.

E c'è da notare ancora che in generale altro è cercare il limite di R_n supponendo ϑ fisso, pure avente qualunque valore fra 0 e 1, e altro è cercarne il limite quando si suppone ϑ variabile con n; ciò risulta dalla teoria generale della continuità delle funzioni di due variabili; perchè può bensì immaginarsi una funzione di due variabili n, ϑ, tale che esista il limite di essa quando ci avviciniamo al punto rappresentativo dei valori limiti delle variabili in certe direzioni, e non esista quando ci avviciniamo in altre direzioni o in altra maniera.

Quindi il convergere a zero di R_n per qualunque valore fisso di ϑ (compreso fra 0 e 1) non lo possiamo riguardare a tutto rigore come una condizione sufficiente per il nostro problema. La difficoltà è però tolta se la convergenza a zero di R_n non è una convergenza semplice, ma una convergenza uniforme per qualunque ϑ, perchè allora R_n deve tendere a zero anche se ϑ varia in qualunque maniera con n.

Il risultato ultimo della ricerca di Pringsheim è appunto questo, che cioè se per espressione di R_n si considera quella cosiddetta di Cauchy, allora se esso deve convergere a zero per quello speciale valore di ϑ variabile con n, esso deve convergere a zero uniformemente; si può così fare assolutamente astrazione della conoscenza della dipendenza di ϑ da n; ciò costituisce una proprietà certamente singolare del Resto di Cauchy.

Vogliamo ora raccogliere qui ordinatamente, per chiarezza di esposizione, alcune osservazioni fondamentali facilmente deducibili dalla teoria ordinaria delle serie di potenze.

1). Supponiamo che per ogni valore di $h \leqq \mathrm{H}$, $f(a + h)$ sia sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a, e ordinata secondo le potenze di h. Possiamo dire che per ogni $h < \mathrm{H}$, $f^{(r)}(a + h)$ sarà anche sviluppabile in serie di Taylor.

2). Nelle stesse ipotesi del numero precedente, non possiamo dire che $f(a - h)$ (mutando cioè il segno ad h) sia anche sviluppabile in serie di Taylor.

Dai noti principii della teoria delle serie di potenze si ricava bensì

che se $h < \mathrm{H}$ la serie che si deduce mutando $+h$ in $-h$, è anche convergente, ma non si può dedurre che il suo valore sarà $f(a-h)$.

3). Nello stesso modo, se si sa che $f(a+\mathrm{H})$ è sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a, si può bensì dedurre dalla teoria delle serie di potenze che la stessa serie per *ogni* $|h| < |\mathrm{H}|$ è anche convergente; ma non si può dedurre che il suo valore è $f(a+h)$.

4). Nelle stesse ipotesi, se $f(a+h)$ è sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a per ogni $h < \mathrm{H}$, sarà per i medesimi valori di h, sviluppabile in serie di Taylor riferita ad un qualunque altro punto $a+k$ fra a e $a+h$ ($|k| < |h|$; dove k, h sono del medesimo segno).

Ponendo $h - k = k'$, per le ipotesi fatte si ha che k' è del medesimo segno di h e quindi di k, e inoltre

$$f(a+h) = f(a+k+k') = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(k+k')^n$$

$$f(a+k) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,k^n$$

$$f^{(r)}(a+k) = \sum_r^\infty \frac{1}{n-r!} f^{(n-r)}(a)\,k^{n-r}$$

e quindi sviluppando e ordinando il primo di questi sommatorii secondo le potenze di k' (il che non altera la serie, perchè per $k+k' < \mathrm{H}$ la serie di potenze è *assolutamente* convergente [1]) si ha:

---

[1] S'incominci col notare che $k\,k'$ sono due numeri del medesimo segno per le nostre ipotesi; il secondo membro di $f(a+h)$, sviluppandosi la potenza n^{ma} di $(k+k')$, può scriversi sotto forma di una particolare serie *doppia*

$$\left.\begin{array}{llll} f(a) + f'(a)\,k + \frac{1}{2} f''(a)\,k^2 & + \dots \\ \quad 0 \;+ f'(a)\,k' + \quad f''(a)\,k\,k' & + \dots \\ \quad 0 \;+ \quad 0 \quad + \frac{1}{2} f''(a)\,k'^2 & + \dots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \end{array}\right\} (\mathrm{A})$$

in cui se considero i valori assoluti di tutti i termini, e sommo per verticali ho la serie convergente $\sum_0^\infty \frac{1}{n!}\,|\,f^n(a)\,|\,(k+k')^n$; per un teorema sulle serie doppie, si ha quindi che la serie doppia (A) è *convergente*, posso cioè sommare i termini per orizzontali invece che per verticali, ed il risultato è il medesimo. Non si potrebbero fare le stesse deduzioni se $k\,k'$ fossero di segno opposto.

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k)\, k'^n$$

la quale formola dimostra il nostro assunto.

5). Perchè $f(a+h)$ sia sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto a, è evidentemente necessario che esistano e siano finite tutte le derivate di ordine finito di $f(x)$ prese nel punto a; perchè è naturale che se manca questa condizione, vien meno la stessa formazione della serie. Ora dalla considerazione del numero precedente risulta che per le stesse ragioni debbono esistere ed essere finite tutte le derivate $f^{(n)}(a+k)$ essendo k qualunque fra a e $a+H$; quindi ricaviamo subito che la funzione $f(x)$ deve avere in ogni punto x dell'intervallo (escluso al più l'estremo $x = a + H$) derivata finita di qualunque ordine.

Notiamo però che ciò non toglie che, crescendo n all'infinito, la derivata possa crescere oltre ogni limite ([1]).

6). Un'ultima osservazione finalmente ci dà argomento a parlare delle condizioni di sviluppabilità trovate da König e a cui abbiamo avanti accennato. La stessa considerazione del numero 4) ci fa vedere che la serie

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, k'^n$$

deve essere convergente per ogni x del campo, e per ogni k' tale che $x + k' < a + H$.

Ora questa è appunto una delle condizioni trovate dal König ([2]), insieme all'altra condizione che la stessa serie dev'essere derivabile termine a termine rispetto ad x. Le condizioni enumerate dal König erano propriamente tre; lo Stolz poi nel suo corso di calcolo, riferendo sui risultati di König, aggiunge anche una quarta condizione ([3]). Ora chi non vede che le condizioni di sviluppabilità espresse così, non risolvono il problema, perchè lo riconducono ad altri problemi di natura anche più difficile che esso non sia?

Nè vale il notare, come fa il König in una noticina alla fine del suo lavoro, che quelle condizioni possono applicarsi facilmente alla

---

([1]) Il Mansion (*Note sur quelques principes*, etc. Annales de la Société scient. de Bruxelles, 1879) e il König (*Nouvelles demonstr.*, etc. Nouv. Annales, 2ª serie, t. 13, p. 270), sono incorsi al proposito in errori.

([2]) König. *Ueber die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor' schen Reihe.* Math. Ann., vol. 23, p. 450.

([3]) Stolz. *Grundzüge, etc.*, I, p. 110-111.

serie binomiale, perchè la serie binomiale può studiarsi con mezzi anche più facili che non siano quelli del König, e nel caso generale non si può sostenere essere agevole il riconoscere che una certa serie sia o no derivabile termine a termine. Ben si appone quindi il Pringsheim [1] quando qualifica di illusorie, almeno dal punto di vista pratico, le condizioni trovate dal König.

§ 3.

Teorema sulle serie i cui termini sono funzioni di una o più variabili.

Si sa dagli elementi del calcolo, che se una serie, i cui termini sono funzioni *continue* di una o più variabili, è *equiconvergente* per tutti i valori delle variabili compresi in un certo campo, allora essa è una funzione continua delle variabili in tutto quel campo. La equiconvergenza della serie non è però una condizione *necessaria* per la continuità, ma solo sufficiente; per modo che il teorema reciproco non è vero; si possono dare esempii di serie che sieno funzioni continue, senza essere serie equiconvergenti. È però vero il teorema reciproco se la serie data è a termini positivi per qualunque valore delle variabili.

Propriamente vogliamo dimostrare il teorema:

Si abbia una serie assolutamente *convergente in tutto un campo (compresi gli estremi)*

$$\sum_0^\infty u_n(x_1 x_2 \ldots)$$

i cui termini sieno funzioni continue delle variabili, e la serie dei valori assoluti

$$\sum_0^\infty | u_n(x_1 x_2 \ldots)|$$

sia una funzione continua delle variabili; allora questa seconda serie, e quindi anche la prima, è una serie equiconvergente [2].

Immaginiamo un punto del campo, di coordinate $x_1 x_2 \ldots$ In questo punto la serie dei valori assoluti è convergente, e quindi, dato σ può sempre trovarsi un indice n in modo che sia

$$R_n(x_1 x_2 \ldots) < \sigma$$

---

(1) Math. Ann., vol. 44, p. 58 e p. 68.

(2) Pringsheim. Math. Ann., 44, p. 82.

indicando con R il resto della serie dei valori assoluti. D'altra parte essendo

$$R_n = \sum_0^\infty | u_n | - \sum_0^n | u_n |$$

ed essendo per ipotesi, il primo termine del secondo membro una funzione continua delle x, e anche il secondo termine del secondo membro, perchè somma d'un numero finito di funzioni continue, si ha che $R_n(x)$ è una funzione continua delle x, e quindi si possono sempre trovare dei valori finiti e diversi da zero $h_1\, h_2 \ldots$ in modo che

$$R_n(x_1 \pm \theta_1 h_1, x_2 \pm \theta_2 h_2, \ldots) - R_n(x_1\, x_2 \ldots) < \sigma$$

per qualunque sistema di valori delle $\theta_1\, \theta_2 \ldots$ comprese fra 0 e 1.

Quindi combinando colla precedente disuguaglianza, otteniamo

$$R_n(x_1 \pm \theta_1 h_1, \ldots) < 2\sigma$$

e osservando che R_n risulta di termini tutti positivi, possiamo anche conchiudere che, dato σ si può sempre trovare un indice n, e un sistema di valori $h_1\, h_2 \ldots$, cioè un intorno del punto, in modo che

$$R_{n+\nu}(x_1 \pm \theta_1 h_1, x_2 \pm \theta_2 h_2, \ldots) < 2\sigma$$

qualunque sia il valore di ν, purchè positivo, e qualunque sieno le $\theta_1\, \theta_2 \ldots$ purchè comprese fra 0 e 1.

Variando σ però evidentemente non solo varia n, ma variano anche le h.

Ad ogni σ certamente corrisponderà un valore di n, e un sistema di valori delle h; ma vi potrebbero corrispondere parecchi valori per le n, e in corrispondenza parecchi sistemi di valori per le h.

Partiamo allora da uno qualunque dei punti del supposto campo di convergenza assoluta della serie, e per esso troviamo l'indice n e le quantità h, che determineranno un certo *intorno* di quel punto.

Consideriamo un punto estremo di questo intorno, e ripetiamo rispetto ad esso la stessa considerazione; si troverà un nuovo indice n e un nuovo intorno che sarà una continuazione del primo; quello fra i due indici n, che sarà il maggiore, varrà evidentemente per ambedue quegli intorni; quindi possiamo conchiudere che si può trovare un n unico tale che per tutti i punti del campo totale costituito della somma dei due intorni sopra costruiti, sia sempre $R_{n+\nu} < 2\sigma$ qualunque sia ν positivo e qualunque sia il punto. Così continuando io dico che si può sempre fare in tal maniera la ricerca dei singoli campi parziali, che si giunga a riempire tutto il campo totale con un numero *finito* di campi parziali.

Infatti se si potesse continuare indefinitivamente l'indicato procedimento, e quindi trovare *infiniti* campi parziali, vi sarebbero anche infiniti punti che funzionano da centri di tali campi, e quindi questi infiniti punti dovrebbero ammettere almeno un punto limite

$$x' \equiv (x'_1\, x'_2 \dots)$$

A questo punto x' anche apparterrà un intorno colla solita proprietà, e un indice n'. E inoltre per la sua stessa natura di punto limite, in questo intorno esisteranno infiniti punti, centri di campi parziali; sieno

$$x^{(k)} \equiv (x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \dots)$$
$$x^{(k+1)} \equiv (x_1^{(k+1)}\, x_2^{(k+1)} \dots)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Per la stessa ipotesi che dà luogo all'esistenza di tutti questi punti, è naturale che il campo parziale attorno $x^{(k)}$ non comprende i punti $x^{(k+1)}\, x^{(k+2)} \dots x'$; ma invece tenendo presente la proprietà del costruito campo parziale relativo ad x', si vede che alterando, al massimo, il valore dell'indice $n^{(k)}$ relativo ad $x^{(k)}$, si può trovare un intorno dentro cui sieno compresi tutti quanti quegli infiniti punti; perchè se per valore dell'indice n relativo ad $x^{(k)}$ prendiamo quello già trovato per il punto x', cioè prendiamo n', allora poichè

$$R_{n'}(x^{(k+1)}) < 2\sigma$$
$$R_{n'}(x^{(k+2)}) < 2\sigma$$
$$\dots\dots\dots$$
$$R_{n'}(x') < 2\sigma$$

si ricava che tutti i punti

$$x^{(k+1)} \dots\dots x'$$

possono racchiudersi nell'intorno relativo ad $x^{(k)}$.

Si vede dunque che alterando la costruzione che per avventura fosse stata già fatta, si potrà sempre sostituire un unico campo parziale, ad infiniti di essi; e quindi distruggere il supposto punto limite x'.

Ripetendo questo processo per tutti i punti limiti, resta dunque dimostrato l'assunto. Allora tutto il campo totale resta diviso in un numero *finito* di campi parziali ad ognuno dei quali corrisponde un indice n; il maggiore di tutti sia N; esso evidentemente varrà per tutti i campi parziali, e quindi per tutto il campo totale; concludiamo dunque che dato σ si può sempre trovare un indice N in modo che

$$R_N(x)$$

per un qualunque x del campo assegnato è sempre minore di 2σ; di qui si ricava la equiconvergenza della serie dei valori assoluti, e quindi, con più ragione, di quella data.

Di questo teorema ci interessa un corollario.

Essendo $R_N(x)$ composto di termini tutti positivi, con più ragione, ciascuno di essi sarà minore di 2σ, e ciò per qualunque punto x del campo; dunque:

Nelle stesse ipotesi del teorema precedente si può sempre trovare un indice n in modo che

$$u_n(x) < 2\sigma$$

qualunque sia il punto x, cioè il termine generale della serie converge a zero uniformemente.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo ricavare due importanti corollarii del teorema qui dimostrato:

1. *Se i termini di una serie convergente sono funzioni continue di un certo numero di variabili, e per qualunque sistema di valori di queste variabili, compresi in un certo campo (gli estremi inclusi), hanno sempre valori del medesimo segno allora condizione necessaria e sufficiente per la continuità della funzione rappresentata dalla serie, è che la serie stessa sia equiconvergente.*

2. *Se i termini di una serie convergente sono funzioni continue di una variabile, e sono inoltre in un certo punto o tutte funzioni crescenti o tutte funzioni decrescenti, per modo che la serie dei rapporti incrementali in quel punto risulta di termini tutti del medesimo segno, allora condizione necessaria e sufficiente perchè in quel punto sia possibile la derivazione per serie è che la serie dei rapporti incrementali sia equiconvergente in tutto un intorno del punto.*

§ 4.

Applicazione del teorema precedente alla serie di Taylor.

Supponiamo ora che per qualunque $h < H$ si abbia sempre

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\, h^n .$$

Scegliamo *arbitrariamente* un limite superiore dei valori di h; e sia $r < H$. Abbiamo allora che la precedente relazione sussiste per ogni $h \leq r$.

Nel § 2 abbiamo visto che come conseguenza necessaria se ne ricava che sarà ancora

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k)\, k'^n$$

dove

$$h = k + k' \leqq r < \mathrm{H}$$

e la serie del secondo membro è convergente *assolutamente.*

Sarà poi ancora una serie derivabile termine a termine, cioè essendo

$$f'(a+h) = \frac{d\,f(a+h)}{d\,(a+h)} = \frac{\partial f(a+k+k')}{\partial k'}$$

si ha che

$$f'(a+h) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n-1\,!} f^{(n)}(a+k)\,k'^{n-1}$$

e la serie del secondo membro per i medesimi sistemi di valori di $k\,k'$ sarà anche assolutamente convergente. Applicando dunque il teorema del § 3 possiamo dire *che il termine*

$$\frac{1}{n\,!} f^{(n)}(a+k)\,k'_n$$

ovvero il termine

$$\frac{1}{n-1\,!} f^{(n)}(a+k)\,k'^{n-1}$$

devono essere uniformemente convergenti a zero per qualunque sistema di valori di $k\,k'$ *soddisfacenti alla relazione* $k+k' \leqq r < \mathrm{H}$.

Poniamo

$$k = \vartheta h$$
$$k' = (1-\vartheta)\,h$$

che soddisfano alla relazione

$$k + k' = h \leqq r < \mathrm{H}$$

per ogni $h \leqq r$ e per ogni ϑ compreso fra 0 e 1. *Si ha allora che*

$$\frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{n-1\,!} f^{(n)}(a+\vartheta h)\,h^{n-1}$$

deve convergere a zero uniformemente per ogni $h \leqq r$ *e per ogni* ϑ *compreso fra* 0 *e* 1.

Ora questa espressione moltiplicata per h non è altro che il così detto *Resto di Cauchy* della serie di Taylor corrispondente allo sviluppo di $f(a+h)$ secondo le potenze intere positive di h; indicando quindi con $R_n(\vartheta, h)$ tale resto di Cauchy, possiamo conchiudere, che *per la sviluppabilità di* $f(a+h)$ *in serie di Taylor per ogni valore*

di $h \leqq r < H$ *è necessario che* $R_n(\vartheta, h)$ *converga uniformemente a zero per tutti i* ϑ *e tutti gli* h *soddisfacenti alle solite condizioni.*

D'altra parte se questo si verifica, è chiaro che ha luogo appunto la sviluppabilità per ogni h, perchè allora fissato un qualunque h e fatto anche ϑ variabile con n, si potrà sempre trovare un n per cui R_n sia minore della quantità che più ci piace, e, come si sa dagli elementi del calcolo, ciò basta per conchiudere la sviluppabilità.

Nel § 2 abbiamo osservato che *non* si potrà ritenere una condizione sufficiente il tendere a zero di R_n per qualunque valore *fisso* di ϑ; ma che se la convergenza è invece uniforme, allora essa potrà sicuramente ritenersi come condizione sufficiente; ora dalle considerazioni fatte si ricava che una tale convergenza uniforme non solo è condizione *sufficiente*, ma è anche condizione *necessaria.*

Tenendo ora presente che la quantità r è arbitrariamente scelta minore di H, possiamo dunque dire che: *condizione necessaria e sufficiente perchè* $f(a+h)$ *sia sviluppabile in serie di Taylor per ogni* $h < H$, *è che il cosiddetto Resto di Cauchy*

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{n-1\,!} f^n(a+\vartheta h)\, h^n$$

sia convergente uniformemente a zero per ogni ϑ *(fra* 0 *e* 1) *e per ogni* $h \leqq r < H$.

Per un $h = H$ la convergenza a zero uniforme di R_n non è più una condizione necessaria, perchè la serie che si ottiene per $h = H$ *può essere* non *assolutamente* convergente, e quindi allora cade il ragionamento fatto sopra. Quella condizione diventa necessaria anche per $h = H$ se la serie che dà il valore di $f(a+H)$ non solo deve essere convergente, ma deve essere *assolutamente* convergente.

Quindi possiamo dire:

Se $f(a+h)$ *deve essere sviluppabile in serie di Taylor per ogni* h *minore od eguale ad* H, *e la serie corrispondente deve essere assolutamente convergente anche per* $h = H$, *condizione necessaria e sufficiente è che* $R_n(\vartheta h)$ *converga uniformemente a zero anche per* $h = H$.

Si sa che una serie di potenze per il limite superiore o inferiore dei punti compresi nel suo campo di convergenza, può essere divergente, convergente semplicemente, o convergente assolutamente. Le stesse modalità quindi può subire la serie di Taylor.

Ne possiamo quindi dedurre *che se il resto di Cauchy per* $h = H$ *non converge uniformemente a zero per tutti i valori di* ϑ, *non può cioè, dato* σ, *trovarsi un indice* n *in modo che per qualunque* ϑ *fra 0 e 1 (compresi gli estremi)* R_n *sia sempre minore di* σ, *allora*

certamente la serie di Taylor per $h = \mathrm{H}$ non sarà convergente assolutamente.

Così p. es. nella serie logaritmica il resto di Cauchy è

$$\mathrm{R}_n = \frac{x^n}{1 + \vartheta x}\left(\frac{1 - \vartheta}{1 + \vartheta x}\right)^{n-1}$$

che per ogni ϑ e per ogni x positivo minore di 1 è sempre minore di

$$(1 - \vartheta)^{n-1} x^n$$

che col crescere di n può rendersi, per *qualunque* ϑ, minore di qualunque quantità assegnabile. Dunque R_n per ogni x minore di 1, converge uniformemente a zero per ogni ϑ, ma per $x = 1$ e $\vartheta = 0$, $\mathrm{R}_n = 1$ e quindi ne deduciamo che certamente la serie logaritmica per $x = 1$ non può essere assolutamente convergente; risultato notissimo.

Invece nella serie binomiale il resto è

$$\mathrm{R}_n = \frac{m \,.\, m - 1 \ldots m - n + 1}{n - 1\,!} x^n (1 - \vartheta)^{n-1} (1 + \vartheta x)^{m-n}$$

e si dimostra che

$$u_n = \frac{m \,.\, m - 1 \ldots m - n + 1}{n - 1\,!} x^n$$

per ogni m positivo e $x \overline{\overline{<}} 1$ converge sempre a zero. Si vede allora che anche per $x = 1$ R_n converge a zero per qualunque ϑ, e quindi ne deduciamo, come del resto è ovvio, che la serie binomiale per m positivo è *assolutamente convergente* anche per $x = 1$.

Queste applicazioni sono semplicissime; noi le facciamo per illustrare la teoria esposta.

Si può infine osservare che fra le condizioni preliminari che noi avremmo dovuto stabilire negli enunciati vi dovea essere questa, che la funzione $f(x)$ abbia le derivate di qualunque ordine per qualunque x dell'intervallo da a ad $a + \mathrm{H}$, e che queste derivate abbiano sempre valore finito. Come abbiamo osservato al § 2, ciò è una conseguenza immediata della possibilità di sviluppare in serie di Taylor la funzione; ora mi sembra ozioso ripetere continuamente nei varii enunciati questa condizione necessaria, perchè essa può ritenersi inclusa nella condizione che R_n deve convergere uniformemente a zero per qualunque ϑ e h; non potendo evidentemente quest'ultima condizione verificarsi se la prima non è anche verificata.

Pavia, gennaio del 1895.

Per un nuovo libro di Astronomia sferica.

Lo scrivere un'opera di scienza destinata all'insegnamento è sempre una cosa ardua e delicata. Ciò diventa ancora più difficile quando si tratta di Astronomia su cui esistono trattati classici come p. e. quelli del BRÜNNOW e dello CHAUVENET.

Possono questi trattati servire di guida allo studioso della più bella tra le scienze naturali? Essi sono destinati agli astronomi di professione, ed è perciò che vi si trova ampiamente svolta la teoria e la pratica dei diversi strumenti adoperati nelle delicate osservazioni astronomiche. Tutto questo, che è d'importanza capitale per l'Astronomo, riesce di poco giovamento alla maggior parte dei giovani che si avviano alla Laurea nelle scienze matematiche o nelle scienze fisiche.

Di qui la necessità di un'opera destinata all'insegnamento dell'Astronomia nelle nostre Università.

Nei primi anni di questo secolo videro la luce due trattati di Astronomia per opera di due eminenti astronomi italiani. Uno del celebre PIAZZI, Direttore dell'Osservatorio di Palermo, avente per titolo: *Lezioni di Astronomia*, pubblicato nel 1817; l'altro: *Elementi di Astronomia con le applicazioni alla Geografia, Nautica, Gnomonica e Cronologia* fu pubblicato negli anni 1819-1820 dal Direttore dell'Osservatorio di Padova, GIOVANNI SANTINI.

Dopo questi due celebri trattati, che oramai sono troppo remoti dallo stato attuale della Scienza, nessuno altro è stato scritto, nemmeno da quegli Astronomi italiani che hanno avuto per molto tempo l'insegnamento dell'Astronomia nelle Università, quali gl'illustri RESPIGHI e DE GASPARIS rapiti da poco tempo alla Scienza.

Se si volesse indagare la ragione di tale mancanza si troverebbe subito nel fatto che presso di noi i libri di scienza, specialmente quelli destinati all'insegnamento superiore, rendono quasi niente all'autore che si accinge alla ingrata fatica di scrivere un libro per l'insegnamento. Quel poco, che si ricava dalla vendita di alcune copie, in parte serve a pagare le spese di stampa ed in parte al mantenimento di quegli intermediari tra il pubblico e l'autore, che si chiamano *Editori!*

Il libro che ha riempito il vòto ora lamentato è quello che ha per titolo: *Astronomia sferica elementarmente esposta dal* D.r FRANCESCO PORRO, Direttore dell'Osservatorio di Torino e Professore di Astronomia nella R. Università.

In un volume di sole 136 pagine l'egregio Autore ha saputo condensare tutte quelle parti dell'Astronomia sferica che sono necessarie in uno studio preliminare. Diciamo *condensare*, poichè approviamo completamente la forma concisa adottata dall'Autore. Essa fa sì che lo studioso sia obbligato ad appropriarsi con meditazione quanto legge, e ciò ridonda a tutto suo vantaggio.

Il libro è composto di dieci capitoli:

La sfera ed il suo moto diurno.
Il moto annuo del Sole.
Trasformazione delle coordinate.
La misura del tempo.
I movimenti della Luna.
La parallasse diurna e la refrazione.
Le variazioni dei piani fondamentali.
L'aberrazione e la parallasse annua.
Le riduzioni dei luoghi stellari ed i moti proprî.
Il sistema Solare.

Sotto forma di note a piè di pagina sono date molte notizie storiche tanto relative alle scoperte antiche dell'Astronomia, quanto alle più recenti.

Ecco come fa notare il genio di Keplero nella nota a pag. 124:

« Per apprezzare degnamente l'importanza della scoperta di Keplero, « bisogna pensare che tutta la filosofia prima di lui era ispirata al « concetto dell'impossibilità che i moti celesti non fossero circolari ed « uniformi. Lo Schiaparelli ha potuto scrivere un libro ammirabile « sui « Precursori di Copernico »; ma io credo che ben difficilmente « il più acuto raccoglitore di documenti storici troverebbe nell'astro- « nomia greca e in quella del risorgimento i precursori di Keplero. « Da questo punto di vista adunque parmi si possa dire che l'intui- « zione kepleriana è stata più ardita e più originale della copernicana, « benchè questa abbia preparato quella ».

I giudizii sui lavori altrui sono dati con una sobrietà che onora il giovane e laborioso astronomo. Il suo libro perciò merita tutto il favore del pubblico, e noi mentre lo raccomandiamo ai cultori della scienza, ci auguriamo che l'autore possa presto pubblicarne una seconda edizione nella quale vedremmo volentieri almeno tre altri capitoli, uno relativo agli eclissi, un altro relativo ai metodi che si adoperano per determinare il tempo, la latitudine, gli azimut e le longitudini ed un terzo relativo al calendario.

Torino 6 Marzo 1895.

N. Jadanza.

Inversion cyclique des fonctions monogènes et holomorphes.

Lors du 22me Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, tenu à Besançon en 1893, j'ai eu l'honneur de présenter aux 1re et 2me sections réunies (*mathématiques, astronomie, mécanique et géodesie*) un mémoire de mon compatriote Mr. le capitaine d'artillerie J. M. Rodrigues, ayant trait à l'inversion cyclique des fonctions monogènes et holomorphes, ainsi que quelques applications ressortant de certains théorèmes qu'il a établi.

L'Association française accorde à chaque auteur, pour la publication *in extenso* de ses notes et mémoires, dix pages, au maximum, dans la seconde partie du Compte rendu des Congrès, à moins qu'il ne s'agisse d'un sujet d'une importance remarquable, car alors la Commission de publication peut proposer au Conseil d'Administration de fixer exceptionnellement une étendue plus considérable.

Or, le travail de M. Rodrigues, étant assez long, je me suis permis de le fractionner, c'est-à-dire d'en former de petits mémoires dont l'étendue ne surpassât pas les limites fixées par l'Association française. Toutefois, la réduction à de telles limites de la partie la plus importante du mémoire étant impossible, le travail, dont le titre se trouve plus haut, n'a pas pu être publié alors mais seulement deux applications assez intéressantes des théories qu'on y trouve exposées. Vu cela et tenant compte en même temps d'un entretien que j'ai eu là-dessus à Turin, un mois après le Congrès, avec le directeur de la *Rivista di Matematica,* M. le professeur Peano, je me permets de faire aujourd'hui un compte rendu assez détaillé de la partie non publiée du mémoire de mon compatriote.



On sait que si une fonction à une variable imaginaire est susceptible d'une valeur unique, quel que soit le chemin qui conduise au point considéré, dans une aire donnée (C) elle est *uniforme* dans cette aire, et si elle est constamment uniforme, finie, continue et analytique, on dira qu'elle est *holomorphe* dans la même aire (C).

De même, si une fonction est holomorphe dans une aire donnée, sauf en de certains points isolés, qui sont les pôles, on dit que la fonction est méromorphe dans l'aire (C). Les propriétés de ces trois genres de fonctions, si étroitement liées, ont été assez bien étudiées par deux des plus eminents géomètres contemporains, le célèbre suédois Mittag-Leffler et l'allemand Weierstrass, ainsi que par bien d'autres savants, tels que MM. Hermite, Darboux, Picard, etc. Par contre, les fonctions inverses de ces fonctions étant peu étudiées, il me semble utile de faire connaître quelques uns des résultats obtenus par M. Rodrigues au cours de ses recherches à ce sujet.

Dans le mémoire de M. Rodrigues présenté au Congrès de Besançon, l'auteur examine si les fonctions inverses des fonctions uniformes et holomorphes, jouissent, de même que les fonctions primitives, des propriétés de monògeneité et d'holomorphisme.

De prime abord il tâche de trouver une méthode générale de l'inversion des fonctions, en concluant en suite les propriétés caractéristiques de ces fonctions, et pour cela il commence par exposer la théorie de ce qu'il appele

Cycles polaires.

Le problème de l'inversion est basé sur la détermination préalable de la distribution et séparation des *zeros* des fonctions holomorphes dans une région de l'aire, obtenue par moyen des cycles polaires.

La propriété caractéristique des polynômes consiste dans leur décomposition en facteurs primaires. En géneralisant la décomposition des polynômes en facteurs, M. Weierstrass à découvert la formule

$$\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}(0)} = e^{G(x)} \,\Pi \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{Q_\omega\left(\frac{x}{a}\right)} \right]$$

qui donne pour toutes les fonctions holomorphes, l'expression analytique qui permet de mettre en evidence leurs racines.

Les facteurs du produit Π ont été nommés par l'illustre géometre *facteurs primaires*; a_1, a_2, a_3, ... les *zéros* de la fonction et Q_ω un polynôme dont son degré caracterise l'*espèce* de fonction holomorphe.

Pour déterminer le numero de *zéros* que l'equation holomorphe

$$\mathrm{f}(z) - u \,.\, \varphi(z) = 0$$

contient dans l'intérieur d'un contour, il faut, au dire de M. Rodrigues, connaître le numero de *zéros* de la fonction $\mathrm{f}(z)$, ce qu'on obtient par

le théorème de Cauchy, en cherchant la variation de l'argument de la fonction le long d'un contour fermé si ses coordonnées sont des fonctions rationnelles d'une variable réelle.

Dans ce cas, la détermination du numero de *zéros* de la fonction holomorphe exige des opérations analogues à celles du théorème de Sturm dans l'algèbre.

Au problème de la détermination des *zéros* des fonctions à l'intérieur d'une aire, se rattache un autre — *celui de la distribution et de la séparation des racines à l'intérieur d'un contour.*

Les contours pouvent être donnés arbitrairement, ou être déterminés *a priori* pour chaque espèce de fonction, comme il résulte des propositions suivantes :

THÉORÈME. — *Si on attribue au module de* u *des valeurs inférieurs au module principale* k *de la fonction uniforme*

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = X + iP$$

les équations holomorphes

$$f(z) = 0$$
$$f(z) - u \,.\, \varphi(z) = 0$$

ont le même nombre de racines dans l'intérieur d'un contour défini par l'équation

$$k^2 = X^2 + Y^2 .$$

En effet, soit

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = X + iY ;$$

k le module de u et K le module principale de la fonction $X + iY$; l'équation

$$k^2 = X^2 + Y^2$$

représente pour toutes les valeurs de k inférieures à K un systhème de courbes fermées, lesquelles se coupent pas, vu que les fonctions sont uniformes. Or, le long de ces courbes on a pour toutes les valeurs de $k < K$

$$\operatorname{mod}\left(u \,.\, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = \frac{\operatorname{mod} . u}{\operatorname{mod}\left(\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right)} = \frac{k}{K} < 1$$

donc, à l'intérieur de ces contours les équations holomorphes

$$f(z) = 0 \quad \text{et} \quad f(z) - u \,.\, \varphi(z) = 0$$

possèdent le même nombre de racines.

Soient maintenant

$$t_1\,,\ t_2\,,\ t_3\,,\ \ldots\ t_n$$
$$z_1\,,\ z_2\,,\ z_3\,,\ \ldots\ z_n$$

les racines simples de ces équations existentes dans le même contour et disposées suivant la serie des modules croissants ; les *zéros* des fonctions holomorphes étant des points isolés séparés par des intervalles determinés, il est toujours possible de séparer les racines de la première équation par un systhème de cercles

$$c_1\,,\ c_2\,,\ c_3\,,\ \ldots\ c_n$$

dont les centres sont

$$t_1\,,\ t_2\,,\ t_3\,,\ \ldots\ t_n$$

et les rayons

$$r_1\,,\ r_2\,,\ r_3\,,\ \ldots\ r_n\,.$$

À ces cercles M. Rodrigues a donné le nom de *cycles polaires*, car leurs centres sont les lieux géometriques des pôles de la fonction méromorphe

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

et les racines de l'équation holomorphe

$$f(z) - u\,.\,\varphi(z) = 0$$

existentes dans les *aires polaires,* sont désignées sous le nom de *racines cycliques*.

Il s'ensuit de cette définition que si le long d'un cycle polaire on a constamment

$$\mathrm{mod}\left(u\,.\,\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1$$

l'équation holomorphe a une racine cyclique et une seule dans l'aire du cycle, et par suite l'aire primitive, limitée par le contour fermé C , est décomposée en des *aires polaires* et des *espaces lacunaires intercycliques*. Alors les racines cycliques sont distribuées par les cycles, en occupant une position excentrique.

Une autre conséquence est que si les racines polaires de l'équation

$$f(z) = 0$$

occupent les sommets d'un polygone à l'intérieur d'un contour fermé C , les racines cycliques de l'équation

$$f(z) - u\,.\,\varphi(z) = 0$$

se distribuent aussi à l'intérieur du contour suivant les sommets d'un polygone d'un même nombre de côtés, et comme les distances des centres des cycles sont proportionelles aux distances des excentriques, le polygone des racines polaires est semblable au polygone des racines cycliques.

Les cycles polaires ne sont pas toujours des cercles; dans beaucoup de cas particuliers ils sont des courbes fermées (des ovales de Cassini et des lemniscates de Bernouilli).

C'est ce que nous fait voir le

Théorème II. — *Si pour toutes les valeurs de la variable on a constamment*

$$\mathrm{mod}\left(u\,.\,\varphi(z)\right) < k$$

l'équation holomorphe

$$(z-t)(z-t') - u\,.\,\varphi(z) = 0$$

a deux racines séparées par des ovales de Cassini:

$$k = \mathrm{mod}\,[(z-t)(z-t')]\,.$$

En effet, l'équation

$$k = \mathrm{mod}\,(z-t) \times \mathrm{mod}\,(z-t')$$

exprime que le produit des distances de tous points du plan à deux autres fixes est constant; donc le lieu géometrique figuré par cette équation est une *cassinique.*

Or, si le long de cette courbe on a constamment

$$\mathrm{mod}\left(u\,.\,\varphi(z)\right) < k$$

on aura

$$\frac{\mathrm{mod}\left(u\,.\,\varphi(z)\right)}{k} < 1$$

et par suite

$$\mathrm{mod}\left(\frac{u\,.\,\varphi(z)}{(z-t)(z-t')}\right) < 1\ ;$$

donc dans l'intérieur de la cassinique, l'équation holomorphe a autant de racines que l'équation

$$(z-t)(z-t') = 0\,.$$

Les cycles polaires qui séparent les deux racines cycliques de l'équation proposée à l'intérieur de la cassinique, sont encore deux

ovales. En effet, k étant égal au carré de la demi-distance focale, c'est-à-dire

$$k = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \mathrm{mod}\left(\frac{t - t'}{2}\right)^2$$

l'équation

$$k = \mathrm{mod}\,[(z - t)\,(z - t')]$$

définit une *lemniscate de Bernouilli*, ayant une racine dans chaque branche.

Pour toutes les valeurs de k inférieures à $\left(\frac{\delta}{2}\right)^2$ cette équation exprime une ovale contenue dans chaque branche de la lemniscate. Ces ovales sont donc les *cycles polaires* qui séparent les deux racines cycliques de l'équation

$$(z - t)\,(z - t') - u\,.\,\varphi(z) = 0\,.$$

On doit observer que ce théorème est encore applicable à l'équation

$$\mathrm{f}(z) - u\,.\,\varphi(z) = 0$$

si la fonction $\mathrm{f}(z)$ est un polynome entier de n^{ieme} dégré. Dans ce cas l'équation holomorphe proposée a n racines cycliques dans l'intérieur de la cassinique de n foyers

$$k = \mathrm{mod}\,[(z - t_1)\,(z - t_2)\ldots(z - t_n)]$$

si le long de cette courbe on a constamment

$$\mathrm{mod}\big(u\,.\,\varphi(z)\big) < k\,.$$

Théorie de l'inversion.

Ces théorèmes étant posés M. Rodrigues traite du problème de l'inversion des fonctions monogènes, uniformes et holomorphes, lequel se traduit par l'algorithme

$$u = \mathrm{G}(z) \quad \text{et} \quad z = \mathrm{H}(u)\,.$$

Il considère toute fonction uniforme définie par le rapport entre deux fonctions holomorphes

$$u = \frac{\mathrm{f}(z)}{\varphi(z)}$$

et dans ce cas la question se ramène à la détermination des racines cycliques de la fonction holomorphe

$$\mathrm{f}(z) - u\,.\,\varphi(z) = 0$$

lesquelles, dans une région déterminée du plan, sont soumises à une certaine loi de distribution et de séparation.

M. Rodrigues envisageant ainsi la question, a établi les théorèmes suivants :

Théorème III. — *Le nombre de fonctions inverses d'une fonction uniforme dans une aire donnée*

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

est égal à celui des racines cycliques que l'équation holomorphe

$$f(z) - u \cdot \varphi(z) = 0 \qquad (a)$$

possède dans l'intérieur de son contour.

En effet, si l'équation holomorphe $G(z) = 0$ a une racine à l'intérieur d'un contour fermé, son expression analytique est donnée par la formule de Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \int_c \frac{G'(z)}{G(z)} \cdot F(z) \cdot dz \; .$$

Or, ayant n racines l'équation (a) dans un contour C, ses *zéros* sont des points isolés, séparés par des intervalles déterminés et on peut les séparer par moyen de n cycles polaires, dont chacun a une racine. De sorte qu'en appliquant à chaque cycle polaire le théorème de Cauchy, il en résulte l'expression analytique des racines cycliques de l'équation (a), à savoir :

$$\left.\begin{aligned} F(z_1) &= \frac{1}{2 i \pi} \int_{c_1} \frac{f'(z) - u \cdot \varphi'(z)}{f(z) - u \cdot \varphi(z)} \cdot F(z) \cdot dz \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(z_n) &= \frac{1}{2 i \pi} \int_{c_n} \frac{f'(z) - u \cdot \varphi'(z)}{f(z) - u \cdot \varphi(z)} \cdot F(z) \cdot dz \end{aligned}\right\}$$

Dans le cas particulier de $F(z) = z$, ces expression fournissent les racines $z_1, z_2, \ldots z_n$ en fonction des integrales curvilignes ; et en les considèrant comme des fonctions de u, elles réprésentent des fonctions inverses de la fonction uniforme

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)} \; .$$

Donc, le nombre des fonctions inverses est égale au nombre des racines cycliques.

Théorème IV. — *Les racines cycliques de l'équation holomorphe*

$$f(z) - u \, . \, \varphi(z) = 0$$

s'expriment en fonction des racines de l'équation

$$f(z) = 0$$

comprises dans la même région polaire, par des intégrales curvilignes le long de leurs cycles.

En effet, mettant l'expression générale de la fonction des racines cycliques sous la forme

$$F(z) = \frac{1}{2 i \pi} \int_c d \, . \log \left(f(z) - u \, . \, \varphi(z) \right) . \, F(z) \, . \, d z$$

il vient

$$F(z) = \frac{1}{2 i \pi} \int_c \frac{f'(z) \, . \, F(z)}{f(z)} \, d z + \frac{1}{2 i \pi} \int_c d \, . \log \left(1 - u \, . \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) . \, F(z) \, . \, d z \, .$$

Autrement, dans le cycle polaire la fonction $f(z)$ a seulement une racine, d'où l'on déduit, en vertu du théorème de Cauchy

$$F(z) = F(t) + \frac{1}{2 i \pi} \int_c d \, . \log \left(1 - u \, . \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) F(z) \, . \, d z \qquad (b)$$

et vu que

$$d \, . \left[F(z) \log \left(1 - u \, . \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) \right] = d . \log \left(1 - u \, . \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) . \, F(z) + \log \left(1 - u \, . \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) . \, F'(z) \, . \, d z$$

on aura

$$\int_c d \, . \log \left(1 - u \, . \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) . \, F(z) \, . \, d z = - \int_c \log \left(1 - u \, . \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) . F'(z) . dz \qquad (c)$$

et si l'on transporte l'origine des coordonnées au centre du cycle, la formule (*b*), en tenant compte de l'espression (*c*), deviendra enfin

$$F(z) = F(t) - \frac{1}{2 i \pi} \int_c \log \left(1 - u \, . \frac{\varphi(t + z')}{f(t + z')} \right) . \, F(t + z') \, . \, d z'$$

ce qui exprime que les racines cycliques sont des fonctions des racines polaires.

En définissant la ligne d'intégration entre deux points du plan z_0 et z, les intégrales qui expriment les fonctions inverses de la fonction uniforme déterminent une classe de fonctions qui fournissent une suite de propriétés remarquables des racines cycliques.

THÉORÈME V. — *La fonction inverse de la fonction intégrale*

$$w = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_c^z \frac{f'(z) - u \,.\, \varphi'(z)}{f(z) - u \,.\, \varphi(z)} \,.\, z \,.\, dz$$

est une fonction périodique, dont la période est la racine cyclique de la fonction holomorphe

$$f(z) - u \,.\, \varphi(z) = 0 \,.$$

Pour prouver cette proposition soit Z la fonction affectée de l'intégrale, et en partant du point initial z_0, pris sur un point quelconque du cycle polaire, la marche de la variable se réduira au parcours multiple du cycle suivi d'un chemin reetiligne $z_0\,z$; c'est-à-dire

$$\int_c^z Z \,.\, d\,z = 2\,m\,i\,\pi \,.\, R + \int_c^z Z \,.\, d\,z \,.$$

D'autre côté on sait que les *résidus* de la fonction Z sont les intégrales curvilignes qui expriment les racines cycliques de l'équation holomorphe

$$w = m\,z + v$$

où m désigne un nombre entier quelconque et v l'intégrale curviligne. La fonction intégrale w est donc une fonction de détermination multiple, ayant respectivement par périodes les racines cycliques de la fonction primitive et de la transformée.

Il en résulte que, si l'on effectue l'inversion des fonctions w et v, on obtient

$$z = H\,(w) \quad \text{et} \quad z = H\,(v)$$

et les limites supérieures des intégrales ne changeant pas, car le point z reste fixe, il résulte

$$H\,(w) = H\,(v)$$

d'où

$$H\,(m\,z + v) = H\,(v) \,.$$

La fonction H inverse de la fonction intégrale est une fonction périodique, ayant par période les racines cycliques de l'équation holomorphe

$$f(z) - u \,.\, \varphi(z) = 0 \,.$$

THÉORÈME VI. — *Les n fonctions inverses de la fonction uniforme*

$$u = \frac{f\,(z)}{\varphi\,(z)}$$

sont des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre $n-1$ *à de coefficients uniformes.*

En effet, supposant que le contour C enveloppe les cycles polaires $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ et donnant à la marche de la variable le parcours multiple de ce contour suivi d'un chemin rectiligne, la fonction intégrale

$$w = \frac{1}{2 i \pi} \int_{C}^{z} Z \,.\, dz$$

devient

$$\int_{C}^{z} Z \,.\, dz = 2 m_1 i \pi \int_{c_1} Z \,.\, dz + 2 m_2 i \pi \int_{c_2} Z \,.\, dz + \ldots$$

$$+ 2 m_n i \pi \int_{c_m} Z \,.\, dz + \int_{z_0}^{z} Z \,.\, dz$$

d'où on concluera

$$w = m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n + v$$

où

$$m_1 , m_2 , \ldots m_n$$

sont des nombres entiers indéterminés qui expriment combien de fois la variable parcourt son cycle respectif.

L'integrale curviligne le long du contour enveloppant C est d'ailleurs nulle, car d'après l'hypothèse considérée, la fonction affectée de l'integrale n'admet pas de discontinuités dans les espaces intercycliques, et par consequent l'expression précédente se réduit à

$$m_1 \mathrm{z}_1 + m_2 \mathrm{z}_2 + m_3 \mathrm{z}_3 + \ldots + m_n \mathrm{z}_n = 0$$

d'où l'on conclud que toute racine cyclique peut s'exprimer linéairement en fonction des autres $n - 1$, propriété qui caractèrise les intégrales d'une équation différentielle linéaire à de coefficients uniformes de l'ordre $n - 1$.

M. Rodrigues considère ensuite l'integrale curviligne

$$\mathrm{F}(\mathrm{z}) = \frac{1}{2 i \pi} \int_{c} \frac{\mathrm{f}'(z) - u \,.\, \varphi'(z)}{\mathrm{f}(z) - u \,.\, \varphi(z)} \,.\, \mathrm{F}(z) \,.\, dz$$

comme une fonction de la variable u, ce qui fournit d'autres conséquences assez nombreuses et qui l'ont conduit à la solution du problème en vue. Les voici exprimées par les théorèmes ci-après.

Théorème VII. — *Les fonctions inverses de la fonction uniforme*

$$u = \frac{\mathrm{f}(z)}{\varphi(z)}$$

sont des fonctions holomorphes dans les aires des cycles polaires.

En effet, les fonctions inverses de cette fonction étant les racines cycliques de l'équation holomorphe

$$f(z) - u \, . \, \varphi(z) = 0$$

il résulte, en faisant

$$G(z) = f(z) - u \, . \, \varphi(z)$$

l'identité

$$\frac{1}{G(z)} = \sum_{0}^{n} \left[\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)} \right)^p . \frac{u^p}{f(z)} \right] + \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)} \right)^n . \frac{u^n}{G(z)} \, .$$

En multipliant par $\Phi(z) \, . \, dz$, il viendra, l'intégration faite le long du cycle polaire

$$\frac{\Phi(z)}{G'(z)} = \sum_{0}^{\infty} J_p \, . \, u^p + R_n \, .$$

L'expression du reste

$$R_n = \frac{1}{2 i \pi} \int \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)} \right)^p . \frac{u^n \, . \, dz}{G(z)}$$

devient, d'après le théorème de M. Darboux

$$R_n = \frac{\lambda s}{2\pi} \, . \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)} \right)^n . \frac{u^n}{G(z)}$$

λ étant le facteur de M. Darboux, s le périmètre du cycle polaire et Z un point quelconque de ce cycle.

Or, si le long de tout cycle polaire

$$\operatorname{mod} \left(u \, . \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) < 1$$

le reste tend vers zéro, au fur et à mesure que n augmente indéfiniment, d'où l'on suit que la série

$$\frac{\Phi(z)}{G'(z)} = \sum_{0}^{\infty} J_p \, . \, u^p \qquad (d)$$

est convergente.

L'expression générale des coefficients est

$$J_p = \frac{1}{2 i \pi} \int_c \left(\frac{\Phi(z)}{f(z)} \right)^p . \frac{\Phi(z)}{\psi(z)} \, . \, dz$$

et le cycle polaire n'ayant qu'une racine, on aura

$$J_p = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_c \frac{\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^p \cdot \left(\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)}\right)}{(z-t)^{p+1}} \,.\, dz$$

d'où

$$J_p = \frac{1}{p!} \cdot \frac{d^p \left[\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p \cdot \frac{\Phi(t)}{\psi(t)}\right]}{d\,t^p}$$

et puisque

$$f(z) = (z-t) \,.\, \psi(z)$$

on a

$$\psi(z) = f'(z)$$

ce qui donne pour l'expression de la série (d)

$$\frac{\Phi(z)}{G'(z)} = \sum_0^\infty \left\{ \frac{u^p}{p\,!}\, D^p \left[\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p \cdot \frac{\Phi(t)}{f'(t)}\right] \right\}$$

qui n'exprime que le développement d'une fonction holomorphe des racines cycliques suivant les puissances de n.

En posant maintenant

$$\Phi(z) = G'(z) \,.\, F(z)$$

il résulte la série

$$F(z) = \sum_0^\infty \left\{ \frac{u^p}{p\,!} \,.\, D^p \left[\left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p \cdot \left(1 - u \,.\, \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}\right) \,.\, F(t)\right] \right\}$$

ce qui veut dire, que les racines cycliques z_1, z_2, ... z_n s'expriment en fonction des racines t_1, t_2, ... t_n, étant en même temps des fonctions holomorphes de n dans les régions de leurs cycles.

Théorème VIII. — *Les fonctions inverses d'une fonction uniforme*

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

sont des fonctions holomorphes pour toutes les valeurs du module de u *inférieures au module principale de la fonction uniforme.*

En effet, on a vu que

$$F(z) = F(t) - \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_c \log\left(1 - u \,.\, \frac{\varphi(z)}{f'(z)}\right) \,.\, F'(z) \,.\, dz$$

et en remarquant que si le long de tout cycle polaire

$$\operatorname{mod}\left(u \,.\, \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1$$

la fonction logarithmique se développe en série convergente

$$-\log\left(1-u\,.\,\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)=\sum_0^{\infty}\left[\frac{u^p}{p}\,.\left(\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)^p\right]$$

et en multipliant par $F'(z)$, et faisant l'intégration le long du cycle polaire, on arrive, d'après le théorème de Cauchy, à la série qui traduit le problème de l'inversion

$$F(z)=F(t)+\sum_1^{\infty}\left\{\frac{u^p}{p\,!}\,D^{p-1}\left[\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right]\right\}$$

dont la convergence reste à déterminer.

Pour cela, désignons par P et Q les modules *maximum* de $\varphi(z)$ et $f(z)$, par P' et Q' ceux de $F'(z)$ et $\psi'(z)$, et par μ le module *maximum* de la variable; le module *maximum* du terme général sera, en vertu d'un théorème assez connu

$$\text{mod}\ T_p \overline{\overline{<}} \frac{s}{2\,\pi\,p}\,.\,P'\left(\frac{\mu}{r}\,.\,\frac{P}{Q'}\right)^p$$

où s réprésente le périmètre du cycle et r le module *maximum* de la variable $(z-t)$.

Or, si

$$f(z)=(z-t)\,.\,\psi(z)$$

et par suite

$$Q'=r\,.\,Q$$

on a

$$\text{mod}\,.\,T_d \overline{\overline{<}} \frac{s}{2\,\pi\,p}\,.\,P'\left(\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)^p.$$

En formant la série des modules, il vient la série convergente

$$S=\frac{1}{2\,\pi}\,.\,P'\left[\left(\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)+\frac{1}{2}\left(\mu\,\frac{P}{Q}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)^3+\dots\right]$$

dont la somme est

$$S=-\frac{s}{2\,\pi}\,.\,P'\log\left(1-\mu\,.\,\frac{P}{Q}\right)$$

si

$$\mu\frac{P}{Q}<1 \quad \text{ou} \quad \mu<\frac{P}{Q}$$

mais si k est le *module principale* de la fonction

$$n=\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

on a

$$k < \frac{P}{Q}$$

donc, pour toutes les valeurs de μ inférieures à k, la série est convergente. Si l'on arrête le développement de la série au n^{ieme} terme, on aura le reste

$$R_n = \frac{1}{2\pi} \cdot P' \left[\frac{1}{n} \left(\mu \frac{P}{Q}\right)^n + \frac{1}{n+1} \left(\mu \cdot \frac{P}{Q}\right)^{n+1} + \dots \right].$$

Si l'on substitue les dénominateurs $n+1$, $n+2$, ... par n, les termes de la série augmenteront, d'où

$$R_n < \frac{s}{2\pi} \cdot \frac{P}{n} \left(\mu \frac{P}{Q}\right)^n \cdot \left[1 + \left(\mu \frac{P}{Q}\right) + \left(\mu \frac{P}{Q}\right)^2 + \dots \right]$$

et comme on doit avoir

$$\mu \frac{P}{Q} < 1$$

il viendra

$$R_n < \frac{s}{2\pi} \cdot \frac{P'}{n} \left(\mu \frac{P}{Q}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \mu \frac{P}{Q}}$$

pour l'expression de la limite supérieure du reste.

Dans le cas particulier de $F(z) = z$, les fonctions inverses de la fonction uniforme

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

sont exprimées par la série convergente dans le cycle polaire de convergence

$$z = t + \sum_1^\infty \left[\frac{u^p}{p!} \cdot D^{p-1} \left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)}\right)^p \right]$$

M. Rodrigues considérant maintenant la fonction holomorphe

$$G(z) - n = 0$$

tâche d'obtenir l'expression analytique de ses racines cycliques.

Or, cette équation étant un cas particulier de l'équation générale

$$f(z) - u \cdot \varphi(z) = 0$$

on tire pour la valeur de l'expression des racines cycliques, la série convergente

$$z = t + \sum_1^\infty \left[\frac{u^p}{p\,!} \mathrm{D}^{p-1} \left(\mathrm{G}'(t)^{-p} \right) \right]$$

expression qui traduit le

Théorème IX. — *Les fonctions inverses d'une fonction holomorphe sont des fonctions holomorphes pour toutes les valeurs du module inférieures à son module principal.*

Inversion des fonctions à plusieurs variables.

Ces propositions posées, M. Rodrigues fait la généralisation du théorème de l'inversion aux fonctions à plusieurs variables, ou plutôt à un système de deux équations à deux variables. En reprenant la marche suivie plus haut, il commence par démontrer le

Théorème X. — *Les racines cycliques de l'équation holomorphe*

$$\mathrm{f}(z) - \Sigma\, u^n \,.\, \mathrm{f}_n(z) = 0$$

sont aussi des fonctions holomorphes dans la région de leurs cycles.

En effet, si le long des cycles polaires on a constamment

$$\mathrm{mod}\left(\Sigma\, u^n \,.\, \frac{\mathrm{f}_n(z)}{\mathrm{f}(z)} \right) < 1$$

la série résultante du théorème de l'inversion

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \sum_1^\infty \left\{ \frac{u^p}{p\,!} \mathrm{D}^{p-1} \left[\mathrm{F}(t) \,.\, \left(\Sigma\, u^{n-1} \frac{\mathrm{f}_n(t)}{\mathrm{f}(t)} \right)^p \right] \right\}$$

est une série convergente.

En développant les puissances p du polynome Σ, le terme général du développement est aussi le terme général de la série résultante, ce qui donne

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \ldots + u^n\, \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{D}^{p-1} \left[\mathrm{F}(t) \,.\, \left(\frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{f}'} \right)^{p_1} \,.\, \left(\frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{f}'} \right)^{p_2} \ldots \right]}{p_1\,!\, p_2\,! \ldots} \right\} + \ldots$$

où

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$$
$$m = p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 + \ldots$$

Cette série permet d'effectuer une transformation qui donne l'expression des coefficients des puissances de n de son développement.

Soit

$$\mathrm{U}_p = u^p$$

et

$$\mathrm{U} = \Sigma\, u^{n-1} \,.\, \frac{\mathrm{f}_n(t)}{\mathrm{f}'(t)}\,.$$

En effectuant le développement de cette fonction suivant les puissances de u, on trouve

$$U_p = \sum_0^\infty \left[\frac{u^q}{q\,!} (U_p^q)_0 \right]$$

et en multipliant par F (t) et dérivant, il vient

$$D^{p+1} [F'(t) \,.\, U_p] = \sum_0^\infty [n^q \,.\, D^{p-1} (F'(t) \,.\, S_p)]$$

ou

$$S_p = \frac{1}{q\,!} \,.\, D^q (U^p)_0 \,.$$

La série

$$F(z) = F(t) + \sum_1^\infty \frac{u^p}{p\,!} \,.\, P_p$$

peut se développer suivant les puissances de n, et en effectuant l'addition de tous les coefficients de même parité, on aura

$$F(z) = F(t) + \sum_1^\infty Q_m \,.\, u^n$$

ou

$$Q_m = \frac{1}{m\,!} D^{m-1} (F(t) \,.\, S_m) + \ldots + \frac{1}{2} F(t) \,.\, S_2) + (F(t) \,.\, S_1)$$

ou, plus simplement

$$Q_m = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{p\,!} D^{p-1} (F(t) \,.\, S_p) \right]$$

où

$$S_p = \frac{1}{(m-p)\,!} \,.\, D^{m-p} \left[\left(\Sigma\, u^{n-1} \,.\, \frac{f_n(t)}{f'(t)} \right)^p \right]_0 \,.$$

Par suite, le développement en série d'une fonction des racines cycliques de l'équation holomorphe

$$f(z) - \Sigma\, u^n \,.\, f_n(z) = 0$$

suivant les puissances de n, s'obtient par la formule

$$F(z) = F(t) + \ldots + n^m\, \Sigma \left\{ \frac{D^{p-1} \left[F'(t) \,.\, \left(\frac{f_1}{f'}\right)^{p_1} \,.\, \left(\frac{f_2}{f'}\right)^{p_2} \ldots \right]}{p_1\,!\, p_2\,!\, p_3\,! \ldots} \right\} + \ldots \quad (e)$$

ou

$$F(z) = F(t) + \ldots + u^n \sum_1^\infty \left\{ \frac{1}{p!} D^{p-1} (F(t) \,.\, S_p) \right\} + \ldots$$

Or, la série primitive

$$F(z) = F(t) + \sum_0^\infty \left\{ \frac{u^p}{p\,!} D^{p-1} \left[F(t) \left(\Sigma\, u^{n-1} \cdot \frac{f_n(t)}{f'(t)} \right)^p \right] \right\}$$

étant convergente dans la région d'un cycle polaire, il faut reconnaître si les séries qui en ressortent sont aussi convergentes dans la même région.

Cette question est une conséquence directe du théorème de Mr. Weierstrass sur la convergence des séries. En effet, les séries issues du développement général de la série primitive étant convergentes dans les aires des cycles, celles qui en résultent, ordonnées suivant les puissances de u, sont aussi convergentes dans la même région.

Cela étant, M. Rodrigues considère le système de deux équations simultanées à deux variables imaginaires x et y

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) - \alpha \cdot \varphi(x, y) = 0 \\ F(x, y) - \beta \cdot \Phi(x, y) = 0 \end{array} \right\} \qquad (f)$$

où f, φ, F, Φ désignent des fonctions holomorphes.

Ces équation pouvent se mettre sous la forme

$$G(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad H(x, y) = 0$$

et si x' et y' réprésentent un système de solutions communes à ces équations, on a, en tenant compte de l'équation

$$y - y' = \frac{dy}{dx}(x - x')$$

celles-ci

$$G(x, y) = (x - x')\left(G'_x + G'_y \cdot \frac{dy}{dx} + \ldots\right)$$

$$H(x, y) = (y - y')\left(H'_y + H'_x \cdot \frac{dx}{dy} + \ldots\right)$$

ou plus simplement

$$G(x, y) = (x - x') \cdot G_1\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$$

$$H(x, y) = (y - y') \cdot H_1\left(y, \frac{dx}{dy}\right)$$

donc

$$G \cdot H = (x - x')(y - y') \cdot G_1 \cdot H_1$$

ce qui donne

$$\int_c \int_{c'} \frac{Q(x, y)}{G . H} . dx . dy = \int_c \int_{c'} \frac{\frac{Q(x, y)}{G_1 H_1}}{(x-x')(y-y')} . dx . dy$$

et en vertu du théorème de Cauchy, il résulte

$$\frac{Q(x, y)}{(G_1 . H_1)} = \frac{1}{(2 i \pi)^2} . \int_c \int_{c'} \frac{Q(x, y)}{G . H} . dx . dy .$$

Mais

$$(G_1 H_1) = G'_{x'} H'_{x'} + \frac{d y'}{d x'} . G'_{y'} H'_{y'} + \frac{d x'}{d y'} . G'_{x'} . H'_{x'} + G'_{y'} H'_{x'}$$

et

$$G'_{x'} + \frac{d y'}{d x'} . G'_{y'} = 0 \quad , \quad H'_{x'} + \frac{d y'}{d x'} . H'_{y'} = 0$$

d'où

$$(G_1 H_1) = \frac{dG}{dy'} . \frac{dH}{dx'} - \frac{dG}{dx'} . \frac{dH}{dy'} = \Delta(x', y')$$

et par suite

$$\frac{Q(x', y')}{\Delta(x', y')} = \frac{1}{(2 i \pi)^2} . \int_c \int_{c'} \frac{Q(x, y) . dx dy}{G(x, y) . H(x, y)}$$

est l'expression analytique d'une fonction holomorphe d'un système de solutions des équations simultanées

$$G(x, y) = 0 \quad , \quad H(x, y) = 0 .$$

En appliquant maintenant cette intégrale curviligne aux équations simultanées (f), il résulte le théorème de l'inversion généralisé.

En effect, on a les identités

$$\frac{1}{G(x, y)} = \sum_0^n \left(\frac{\varphi}{f}\right)^p . \frac{\alpha^p}{f} + \left(\frac{\varphi}{f}\right)^n . \frac{\alpha^n}{G}$$

$$\frac{1}{H(x, y)} = \sum_0^n \left(\frac{\Phi}{F}\right)^p . \frac{\beta^q}{F} . \left(\frac{\Phi}{F}\right)^n . \frac{\beta^n}{H}$$

et en effectuant le produit de ces expressions et intégrant le long des cycles des variables, d'après les avoir multipliées par $Q(x, y)$, il résulte

$$\frac{Q(x', y')}{\Delta(x', y')} = \sum_0^n \alpha^p \beta^q . J_{p, q} + R_n + R_{n'} + R_{n''} .$$

Or, d'après le théorème de M. Darboux, on sait que si le long des cycles polaires les conditions

$$\operatorname{mod}\left(\alpha \frac{\varphi(x, y)}{f(x, y)}\right) < 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{mod}\left(\beta \frac{\Phi(x, y)}{F(x, y)}\right) < 1$$

sont vérifiées, les restes tendent vers zéro, au fur et à mesure que n augmente indéfiniment, d'où l'on conclut que la série

$$\frac{Q(x' y')}{\Delta(x' y')} = \sum_0^\infty \alpha^p \beta^q \, . \, J_{p,q}$$

est convergente, ayant

$$J_{p,q} = \frac{1}{(2 i \pi)^2} \int_c \int_{c'} \left(\frac{\varphi}{f}\right)^p \left(\frac{\Phi}{F}\right)^q . \frac{Q(x, y)}{f . F} . d x d y .$$

pour expression générale des coefficients.

En désignant par a et b les solutions communes aux équations

$$f(x, y) = 0 \quad , \quad F(x, y) = 0$$

il résulte

$$f(x, y) = (x - a) . f_1\left(x, \frac{d y}{d x}\right)$$

$$F(x, y) = (y - b) . F_1\left(y, \frac{d x}{d y}\right)$$

et si l'on met, pour abréger,

$$X = \frac{\varphi}{f_1} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\Phi}{F_1}$$

on aura

$$J_{p,q} = \frac{1}{(2 i \pi)^2} \int_c \int_{c'} \frac{X^p . Y^q . \dfrac{Q}{f_1 F_1}}{(x-a)^{p+1} . (y-b)^{q-1}} . d x d y$$

donc

$$J_{p,q} = \frac{1}{p ! \, q !} . D^{p+q}\left(X^p . Y^q . \frac{Q(a, b)}{\Delta_1(a, b)}\right)$$

où Δ désigne le déterminant fonctionel

$$\Delta_1(a, b) = \frac{d f}{d a} . \frac{d F}{d a} - \frac{d f}{d b} . \frac{d F}{d b} .$$

Et alors on aura la série

$$\frac{Q(x', y')}{\Delta(x', y')} = \sum_0^\infty \left\{ \frac{\alpha^p \beta^q}{p ! \, q !} . D^{p+q}\left(X^p . Y^q . \frac{Q(a, b)}{\Delta_1(a, b)}\right) \right\}$$

Et si l'on pose

$$Q(x, y) = \Delta(x, y) \,.\, P(x, y)$$

il vient cette autre série

$$P(x', y') = \sum_{0}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha^p \, \beta^q}{p!\, q!} \,.\, D^{p+q} \left(X^p \,.\, Y^q \,.\, \frac{\Delta}{\Delta} \,.\, P(a, b) \right) \right\}$$

qui exprime le développement d'une fonction holomorphe des solutions communes des équations simultanées données.



De ce qui précède on voit bien la suite de théorèmes si intéressants auxquels M. Rodrigues a été conduit au cours de ses recherches dans le but d'établir le théorème de l'inversion des fonctions.

Une fois obtenu le résultat cherché, il a tâché d'en appliquer au développement en série des fonctions à variables imaginaires, à la résolution algébrique des équations et au développement en série des fonctions algébriques.

Les applications à ces deux derniers sujets ayant déjà paru dans le Compte-rendu du Congrès de Besançon (2me vol., pag. 289 e 293) je me bornerai à faire un aperçu général sur l'application du théorème de l'inversion au développement en série des fonctions.

On sait que les fonctions holomorphes sont susceptibles de se développer en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances de la variable, d'après le théorème de Maclaurin.

Or, la variable étant définie par une équation implicite, le développement sera alors soumis à la loi de l'inversion. C'est-à-dire, étant

$$w = f(z)$$

une fonction holomorphe

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

l'équation de définitition de la variable, le développement des fonctions holomorphes en série convergente est donné par le théorème de l'inversion

$$F(z) = F(t) + \sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{u^p}{p!} \,.\, D^{p-1} \left[F(t) \,.\, \left(\frac{\varphi(t)}{f'(t)} \right)^p \right] \right\} \qquad \text{(A)}$$

formule d'où l'on tire les séries de Burmann, Lagrange, Laplace et celle due à mon savant compatriote le Dr. G. Teixeira.

Série de Burmann. — Pour obtenir la série de Burmann il suffit d'éliminer n entre l'expression (A) et la fonction

$$u = \frac{\mathrm{f}(z)}{\varphi(z)}$$

ce qui donne

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \sum_1^\infty \mathrm{A}_p \left(\frac{\mathrm{f}(z)}{\varphi(z)}\right)^p$$

série qui sera convergente dans la région des cycles polaires.

Or, en désignant par A_p le terme général de la série on a

$$\mathrm{A}_p = \frac{1}{p!} \mathrm{D}^{p-1} \left[\mathrm{F}(t) \cdot \left(\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\right)^p\right]$$

et en observant que

$$\mathrm{f}(z) = (z - t) \cdot \Phi(z)$$

on aura

$$\mathrm{A}_p = \frac{1}{p!} \mathrm{D}^{p-1} \left(\frac{\mathrm{F}'(t)}{\left(\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right)^p}\right)$$

donc

$$\mathrm{A}_p = \frac{1}{p!} \cdot \mathrm{D}^{p-1} \left(\frac{(z-t)^p \cdot \mathrm{F}'(t)}{\left(\frac{\mathrm{f}(z)}{\varphi(z)}\right)^p}\right)$$

qui est la loi découverte par Burmann.

Série de Lagrange. — Pour obtenir la série de Lagrange il suffit de faire

$$\mathrm{f}(z) = z - t$$

d'où

$$u = \frac{z-t}{\varphi(z)} \quad \text{ou} \quad z = t + u \cdot \varphi(z)$$

hypothèse qui ramene la formule (A) à celle-ci

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(t) + \sum_1^\infty \left\{\frac{u^p}{p!} \cdot \frac{d^{p-1}[\mathrm{F}'(t)(\varphi(t))^p]}{d\,t^{p-1}}\right\}.$$

Or cette série doit être convergente pour toutes les valeurs de u dont leur module soit inférieur au module principal de la fonction

$$u = \frac{z-t}{\varphi(z)}$$

ce qui constitue une vérification des résultats.

L'expression analytique de cette racine par les intégrales curvilignes le long de leur cycle, est donc

$$z = t - \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_c \log\left(1 - u\,.\,\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right).\,dz\,.$$

La ligne d'intégration étant définie par son cycle polaire suivi d'un chemin rectiligne, la racine cyclique de Lagrange est une période de la fonction inverse de la fonction intégrale

$$w = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_c^z \log\left(1 - u\,.\,\frac{\varphi(z)}{z - t}\right).\,dz\,.$$

La série de Laplace est aussi une conséquence du théorème (A) de l'inversion des équations simultanées

$$\left.\begin{array}{l} x = a + \alpha\,.\,\varphi(x\,,y) \\ y = b + \beta\,.\,\Phi(x\,,y) \end{array}\right\}$$

Pour

$$f(x\,,y) = x - a \quad ; \quad F(x\,,y) = y - b$$

ces équations sont comprises dans les équations générales

$$\left.\begin{array}{l} f(x\,,y) - \alpha\,.\,\varphi(x\,,y) = 0 \\ F(x\,,y) - \beta\,,\Phi(x\,,y) = 0 \end{array}\right\}$$

donc, en introduisant ces valeurs particuliers dans la série générale

$$P(x'\,,y') = \sum_0^\infty \left\{\frac{\alpha^p\,\beta^q}{p!\,q!}\,.\,D^{p+q}\left(X^p\;Y^q\,.\,\frac{\Delta(a\,,b)}{\Delta_1(a,b)}\right).\,P(a\,,b)\right\}$$

on obtient la série de Laplace

$$P(x',y') = \sum_0^\infty \left\{\frac{\alpha^p\,\beta^q}{p!\,q!}\,.\,D^{p+q}\left[\varphi(a\,,b)^p\,.\,\Phi(a\,,b)^q\,.\,\Delta(a\,,b)\,.\,P(a\,,b)\right]\right\}$$

où

$$\Delta(a\,,b) = \alpha\frac{d\varphi}{da} + \beta\,\frac{d\Phi}{db} + \alpha\beta\left(\frac{d\varphi}{db}\,.\,\frac{d\Phi}{da} - \frac{d\varphi}{da}\,.\,\frac{d\Phi}{db}\right) - 1\,.$$

Série du Dr. Teixeira. — En considérant l'équation

$$z = t + u\,f_1(z) + u^2\,f_2(z) + u^3\,f_3(z) + \ldots$$

l'illustre directeur de l'Académie polytechnique de Porto (Portugal) a démontré, il y à quelques années, dans le *Journal de Liouville* que le développement d'une fonction d'une variable définie par l'équation précédente, était donné par la série

$$F(z) = F(t) + \ldots + u^m\,.\,\Sigma\left\{\frac{D^{p-1}(F'(t))\,.\,(f_1(t))^{p_1}\,.\,(f_2(t))^{p_2}\,.\,\ldots}{p_1\,!\,p_2\,!\,p_3\,!\,\ldots}\right\} + \ldots$$

où

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad m = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots$$

Or, d'après M. Rodrigues, on obtient cette série, en faisant $\mathrm{f}(z) = z - t$ dans la série (e) rélative à l'équation holomorphe

$$\mathrm{f}(z) - \Sigma u^n \mathrm{f}_n(z) = 0 .$$

***

Je ne m'étendrai pas davantage sur le travail de M. Rodrigues.

On voit bien que les conséquences des théorèmes dont j'ai fait mention sont assez nombreuses et importantes.

Il importe de ne pas omettre une circonstance; c'est que le sujet dont M. Rodrigues s'est occupé, a besoin de larges développements. Cependant, le travail qu'il a fait constitue, pour ainsi dire, la voie ouverte pour une suite d'études de la part des mathématiciens qui font de l'analyse leur spécialité.

En effet, en lisant attentivement le mémoire en question, on trouve à tout propos des conséquences qu'il faut développer. Ce sont notamment les théorèmes II et III les plus fertiles en résultat à étudier.

Le théorème II, d'après lequel est fait le groupement et la séparation des racines des fonctions holomorphes dans une aire donnée, est legerement tracé. En effet, il ne concerne qu'un cas particulier — la séparation des racines par des cassiniques —; mais, est-ce qu'il y aura une loi plus générale? Chercher la distribution des racines à l'intérieur d'un contour fermé et reconnaître si elles obeïssent à une loi déterminée de distribution, voilà une des questions que l'on pourra poser.

La détermination de la loi de distribution des racines multiples considérées comme des points de discontinuité, que j'ai fait rémarquer tout-à-l'heure, au cours de l'exposition des diverses propositions, c'est une autre question à considérer en détail.

Enfin de théorème III frappe aussitôt l'attention du lecteur. Il nous montre que le nombre des fonctions inverses d'une fonction uniforme est égal à celui des racines cycliques de l'équation donnée. Or, ce théorème a trait seulement au nombre de racines cycliques que la fonction holomorphe possède à l'intérieur de son contour. Il serait bien convenable d'étudier plus largement les propriétés des fonctions intégrales qui admettent par périodes des racines cycliques.

1 janvier 1895.

Rodolphe Guimaraes
officier du génie, à Lisbonne.

Sulle relazioni di posizione tra punti d'una linea chiusa.

Si abbiano quattro punti su di una linea chiusa e conveniamo che la scrittura $ab \parallel cd$ stia per indicare che essi occupano sulla linea posizioni tali che la coppia di punti *ab* separi la coppia di punti *cd* o, in altre parole, che dei due punti *c, d* l'uno appartenga all'una e l'altro all'altra delle due classi di punti determinate sulla linea data dalla coppia di punti *a, b*.

Lo studio delle proprietà della relazione $\parallel$ così definita presenta interesse dal punto di vista della geometria di posizione pel fatto che, quando essa sussiste fra quattro elementi d'una punteggiata, sussiste anche fra i quattro corrispondenti di qualunque altra punteggiata che si possa ottenere da quella per mezzo di projezioni e sezioni. Per questa ragione è importante ricercare *se* e *come* le altre relazioni tra punti d'una linea chiusa che si considerano nella geometria di posizione possano esser definite per mezzo della relazione $\parallel$ [1]. Infatti da ciò si potrà essere condotti a dimostrare che anche per tali altre relazioni sussiste la stessa proprietà invariantiva di cui gode la relazione $\parallel$.

Per giungere a conclusioni di questa specie occorre anzitutto determinare quali tra le proprietà della relazione $\parallel$ possono convenientemente essere assunte come primitive e quante di esse occorre assumere per poterne dedurre le altre. Essendomi proposto tale questione ho cominciato coll'enumerare e paragonare fra loro le varie proprietà della relazione $\parallel$, di cui si fa uso nella geometria di posizione, classificandole secondo il numero dei punti che sono considerati nei loro rispettivi enunciati ed escludendo quelle che si potevano dedurre da altre

---

(1) Mi preme accennare che a far nascere in me l'idea di occuparmi di tale questione hanno contribuito ripetute discussioni che ebbi su questo argomento col mio egregio amico Dott. Mario Pieri, che sta appunto preparando un lavoro sui fondamenti della geometria projettiva. Del concetto fondamentale a cui s'informano le presenti considerazioni, la subordinazione, cioè, della nozione di *elementi ordinati* a quella di *elementi che si separano*, sono quindi a lui in parte debitore.

per le quali il numero dei punti considerati fosse minore. Procedendo in tal modo sono andato riducendo sempre più il numero delle proprietà indecomponibili finchè non ne rimasero che sette sole [1]. Di queste, quattro implicano la considerazione di quattro punti soltanto e sono

1) $ab \parallel cd \,.=.\, cd \parallel ab$

2) $ab \parallel cd \,.=.\, ab \parallel dc$

3) $ab \parallel cd \,.\, ac \parallel bd :=\Lambda$

4) $ab \parallel cd \,.\cup.\, ac \parallel bd \,.\cup.\, ad \parallel bd \,.$

Le rimanenti tre implicano anche la considerazione di un quinto punto:

5) $ab \parallel cd \,.\, ac \parallel be : \supset .\, ac \parallel de$

6) $ab \parallel cd \,.\, ac \parallel be : \supset .\, cd \parallel be$

7) $ab \parallel cd \,.\, ab \parallel ce \,.\, ab \parallel ed :=\Lambda \,.$

Supponiamo ora che cinque punti situati su una linea chiusa abbiano posizioni tali che sia verificata la condizione seguente:

$$ab \parallel cd \,.\, cd \parallel ae \,.\, ae \parallel bd \,.\, bd \parallel ce \,.\, ce \parallel ab : \cup : ab \parallel cd \,.\, cd \parallel ae \,.\, ae \parallel cb \,.\, cb \parallel ed \,.$$
$$ed \parallel ab : \cup : ab \parallel cd \,.\, cd \parallel eb \,.\, eb \parallel ac \,.\, ac \parallel de \,.\, de \parallel ab : \cup : ac \parallel bd \,.$$
$$bd \parallel ec \,.\, ec \parallel ad \,.\, ad \parallel eb \,.\, eb \parallel ac : \cup : ad \parallel cb \,.\, cb \parallel ae \,.\, ae \parallel cd \,.\, cd \parallel eb \,.$$
$$eb \parallel ad : \cup : ad \parallel cb \,.\, cb \parallel ed \,.\, ed \parallel ac \,.\, ac \parallel eb \,.\, eb \parallel ad \,.$$

Se a, b, c si considerano come punti fissi di riferimento e d ed e come punti variabili il verificarsi della condizione suddetta definisce una relazione tra d ed e, *le cui proprietà si potranno dedurre da quelle della relazione* $\parallel$ cioè dalle proposizioni 1-7.

Se conveniamo di indicare il sussistere tra d ed e di tale relazione scrivendo $e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d$ (che potremo leggere *e segue d nell'ordine abc*) [2], o anche semplicemente $e\,\mathrm{S}\,d$ quando non vi sia pericolo d'ambiguità, si può dimostrare [3] che la relazione S gode delle seguenti proprietà

---

[1] Che tali sette proprietà siano ulteriormente irreduttibili cioè indipendenti tra loro, per quanto probabile, non deve essere facile a dimostrare. A ogni modo la validità e l'opportunità dei ragionamenti che seguono si basa sul fatto che esse sono *sufficienti* per dimostrare le altre, siano poi *necessarie* o no.

[2] Ed è facile verificare, esaminando a parte i sei casi che possono presentarsi, che la relazione di posizione tra due punti così definita corrisponde effettivamente a quella designata con tal frase nel linguaggio ordinario.

[3] Per l'argomento che ho in vista non è necessario che mi occupi delle dimostrazioni analoghe che potrebbero darsi delle altre proprietà fondamentali della relazione S, quali, ad esempio, $e\,\mathrm{S}\,(abc)\,d \,.=.\, e\,\mathrm{S}\,(ade)\,b \,.=.\, e\,\mathrm{S}\,(bca)\,d \,.$

1′) $\qquad e \, \mathrm{S} \, d \, . \, d \, \mathrm{S} \, e : = \Lambda$

2′) $\qquad f \, \mathrm{S} \, e \, . \, e \, \mathrm{S} \, d : \supset . \, f \, \mathrm{S} \, d \, .$

Infatti per dimostrare la 1′) basta sostituire nel primo membro di essa al posto di $e \, \mathrm{S} \, d$ e $d \, \mathrm{S} \, e$ le espressioni che loro equivalgono per definizione ed eseguire il prodotto logico indicato. Si avrà allora una somma di prodotti logici ciascuno dei quali in virtù delle proposizioni 1-3 si riduce a Λ. Parimenti per dimostrare la 2′) si farà l'analoga sostituzione ed eseguendo le operazioni indicate si otterrà un prodotto di 36 fattori di cui 26, sempre in virtù delle proposizioni 1-3, si riducono a Λ, e gli altri 10, applicando oltre alle proposizioni 1-3 anche le 5) e 6), si possono ridurre a contenere ciascuno come fattore uno dei termini della somma logica equivalente per definizione al secondo membro. Valendoci allora di un noto teorema di logica [1] potremo dedurre dal primo membro della 2′) il secondo.

Così, per esempio, considerisi il termine proveniente dal prodotto del terzo termine della somma logica equivalente a $f \, \mathrm{S} \, e$ pel primo termine della somma logica equivalente a $e \, \mathrm{S} \, d$, cioè:

$ab \parallel cd \, . \, ae \parallel cd \, . \, ab \parallel ce \, . \, ae \parallel bd \, . \, ce \parallel bd \, . \, ac \parallel ef \, . \, ac \parallel fb \, . \, ab \parallel ef \, . \, fb \parallel ce \, .$

Osservando che, in virtù della proposizione 5), si ha:

$$ab \parallel ef \, . \, ae \parallel bd : \supset . \, ab \parallel fd$$
$$ae \parallel cd \, . \, ac \parallel ef : \supset . \, ac \parallel fd$$

e in virtù della 2) e della 6):

$$ab \parallel cd \, . \, ac \parallel fb : \supset . \, bf \parallel cd$$

si potrà dedurre dal prodotto suddetto il seguente altro:

$$ab \parallel ce \, . \, ce \parallel bd \, . \, fb \parallel ce \, . \, ab \parallel cd \, . \, ac \parallel fb \, . \, ab \parallel fd \, . \, ac \parallel fd \, . \, bf \parallel cd$$

i cui cinque ultimi fattori sono precisamente quelli che compaiono nel terzo termine dell'espressione che corrisponde per definizione a $f \, \mathrm{S} \, d$.

In modo affatto analogo si può procedere per gli altri 9 prodotti. Indicando per brevità i termini della somma equivalente a $e \, \mathrm{S} \, d$ col loro nnmero d'ordine, quelli delle somme corrispondenti a $f \, \mathrm{S} \, e$ e $e \, \mathrm{S} \, d$ col loro numero d'ordine munito rispettivamente di uno o due apici, i prodotti che non si riducono a Λ sono i seguenti:

$$11', \; 25', \; 12', \; 13', \; 26', \; 34', \; 44', \; 55', \; 64', \; 56'$$

---

[1] Precisamente del seguente $ah \cup bk \cup \ldots \supset a \cup b \ldots$

e di essi il primo contiene come fattore 1″, il secondo e il terzo contengono ciascuno 2″, il quarto, quinto e sesto 3″, il settimo 4″, l'ottavo 5″ e gli ultimi due 6″.

D'altra parte la relazione S che gode delle due proprietà sopradette, essendo stata definita unicamente per mezzo della relazione || dovrà possedere anch'essa la stessa proprietà invariantiva che quella possiede, il che equivale a dire che dalle considerazioni precedentemente svolte risulta *dimostrata* la proposizione seguente:

Presi tre punti qualunque a, b, c su una punteggiata, se due altri punti d, e si succedono nel verso abc, allora, indicando con a′, b′, c′, d′, e′ rispettivamente i punti corrispondenti di qualunque altra punteggiata ottenuta da quella con un numero finito di projezioni o sezioni, i punti d′, e′ si succedono nel verso a′b′c′.

Credo che non sia senza qualche vantaggio l'aver mostrato come quest'ultima proposizione, la quale d'ordinario sotto una forma o un'altra (1) si assume come postulato sulla trattazione dei fondamenti della geometria di posizione, può considerarsi come conseguenza di un'altra più intuitiva e più semplice e implicante la considerazione di soli quattro punti invece di cinque.

G. Vailati.

---

(1) Nella pregevole nota del Dott. Enriques pubblicata nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, S. II, vol. 27° (1893) essa è rappresentata dal postulato VI nel quale l'A., facendo uso del concetto di « *ordine naturale* » prima definito, assume che « *fra le disposizioni circolari naturali che si possono stabilire in una forma di prima specie* a *ne esiste una che viene trasformata in sè stessa da ogni proiettività su* a, *cioè in ogni forma di prima specie* a *si può stabilire un ordine naturale il quale per qualunque projettività in* a *può subire solo una permutazione circolare accompagnata o no da un'inversione* ».

CHARLES HENRY. *Abrégé de la Théorie des fonctions elliptiques.* — Paris, Nony et C[ie], 1895.

Fino a questi ultimi tempi la teoria delle funzioni ellittiche pareva dovesse svilupparsi nel campo più elevato e puramente teorico delle matematiche e non potesse discendere a far parte di quelle materie dell'insegnamento ordinario, che debbono essere famigliari a tutti coloro i quali, senza coltivare di proposito le matematiche, hanno tuttavia bisogno di averle presenti per le loro frequenti applicazioni. Eppure le funzioni ellittiche sono destinate a prestare in tutti i rami delle matematiche eminenti servizi analoghi a quelli, che offrono le funzioni trigonometriche e circolari. Da varii anni fortunatamente questa teoria è entrata a far parte degli studi ordinari per opera di eminenti scienziati, i quali, grazie ai metodi più spediti ed eleganti, sostituirono ai lunghi e laboriosi calcoli pochi e concisi ragionamenti, ed alla molteplicità delle formole, poche idee fondamentali, dalle quali ogni altra proprietà discende spontanea ed è posta in completa evidenza.

Ai dì nostri non mancano trattati, nei quali la teoria venga esposta coi metodi moderni: l'eccellente libro di HALPHEN racchiude quanto di meglio si possa desiderare in tale materia; ma un libro che, in poche pagine e con metodo facile riassumesse l'intera teoria, era tuttavia desiderato; l'A. si è proposto col presente lavoro, di colmare questa lacuna, ed a me sembra che lo scopo propostosi di appianare ai giovani studiosi la via di rendersi famigliare questa importante teoria, sia, almeno in gran parte, raggiunto.

L'Operetta si divide in quattro parti, nella prima delle quali, ricordate le definizioni di funzione biperiodica in generale, e di funzione ellittica in particolare, vengono esposti due teoremi coi quali si stabilisce che una funzione analitica ed uniforme, la quale ammetta più di due periodi distinti, ovvero sia tale che il rapporto dei suoi due periodi sia reale, si riduce ad una costante. In seguito si dà un cenno della trasformazione delle funzioni ellittiche in generale e della funzione pu in particolare, dimostrando come per la funzione pu il problema della trasformazione si riduce a quello della divisione dei periodi della funzione stessa, ed in fine si chiude questa prima parte dimostrando alcuni teoremi fondamentali dai quali dipende la costruzione delle funzioni ellittiche e particolarmente della funzione pu, che l'A. passa a studiare, nella parte seguente, sotto forma di una serie dimostrando in un primo capitolo com'essa soddisfaccia all'equazione

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

con la condizione:

$$\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2 \gtrless 0\,.$$

In un secondo capitolo studia la stessa funzione pu mostrando com'essa sia un integrale particolare dell'equazione differenziale:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4\, z^3 - g_2\, z - g_3$$

ed è particolarmente rimarchevole la semplicità, colla quale l'A. sviluppa questo capitolo nel quale si espongono le proprietà fondamentali della funzione pu.

Nei capitoli 3° e 4° vengono studiate le funzioni ζu e σu, i loro sviluppi in serie e le espressioni delle varie funzioni ellittiche mediante le tre pu, ζu e σu. Nei capitoli 5° e 6° si dànno le formule di addizione e di moltiplicazione dell'argomento delle funzioni precedenti e si chiude questa 2ª parte col capitolo 7° in cui l'A. dimostra come la funzione $p\left(u\,, \frac{\omega_1}{u}\,, \omega_2\right)$ si possa esprimere razionalmente mediante la funzione $p\,(u\,, \omega_1\,, \omega_2)$.

Nella 3ª parte si studiano le funzioni ellittiche *snu*, *cnu*, *dnu*, derivandole dalla pu, a cui sono collegate mediante le funzioni ellittiche speciali σ_{01}, σ_{02}, σ_{03}, delle quali l'A. espone sommariamente le principali proprietà, periodi, gli zeri e gli infiniti, nonchè i teoremi di addizione e di moltiplicazione dell'argomento.

Finalmente nella 4ª parte l'A. introduce le funzioni θ di Jacobi, dando le relazioni che collegano queste con le funzioni precedenti *snu*, *cnu*, *dnu*, e termina il suo lavoro mostrando come si possano calcolare queste e la funzione pu mediante i loro rispettivi periodi.

Lo scopo propostosi dall'A. non gli consentì di entrare in maggiori e più minuti particolari, nè di dare al suo libro più ampi sviluppi, certo di per sè stessi interessanti, ma non indispensabili per farne comprendere l'intera teoria. Parmi tuttavia che, pur ammettendo nota la teoria delle funzioni a variabile complessa, l'A. avrebbe resa più chiara e più proficua la lettura del suo libro, riportando le principali definizioni e le principali proprietà, che formano la base dei suoi ragionamenti.

Vi si riscontrano pure qua e là alcune piccole mende ed errori di stampa, che il lettore potrà facilmente correggere da sè stesso, ma uno va particolarmente segnalato, che si riscontra nella 1ª formola del § 19, dove in luogo di pu si deve leggere p^2u; nè, a mio giudizio, si poteva non rilevare espressamente il fatto che nella 3ª formola si deve assumere $n > 2$, essendo inutile od illusoria negli altri casi.

Questi leggeri difetti non tolgono che pochissimo alla bontà del libro, il quale anche per nitidezza di caratteri e per eleganza di edizione diligentemente curata, sarà letto con piacere e con frutto dagli studiosi.

Torino, aprile 1895.

G. Valle.

Sulla risoluzione delle equazioni numeriche di terzo grado

Nota di S. Catania, *a Catania.*

Suppongo un'equazione cubica ridotta alla forma

$$x^3 - px + q = 0 . \tag{1}$$

Se α è una sua radice reale, dividendo l'equazione per $x - \alpha$, e risolvendo l'equazione quadratica che ne risulta, si ottengono le formole

$$\beta = \frac{-\alpha + \sqrt{4p - 3\alpha^2}}{2}, \quad \gamma = \frac{-\alpha - \sqrt{4p - 3\alpha^2}}{2}, \tag{2}$$

le quali dànno le rimanenti radici della (1), radici che io suppongo reali.

Se α è razionale, le (2) danno le rimanenti radici, esattamente, se tali radici sono razionali, con quel grado d'approssimazione che si vuole, se sono irrazionali.

Se però α è irrazionale, e noto con determinata approssimazione, le formole (2) non sono più vere, perchè il resto della divisione del primo membro della (1) per $x - \alpha$ in questo caso non è nullo. Si domanda, entro quali limiti d'approssimazione le (2) daranno le rimanenti radici. La determinazione di tali limiti è l'oggetto della presente nota, anche a proposito d'una memoria del prof. G. Zurria, recentemente pubblicata negli Atti dell'Accademia Gioenia (*), nella quale si afferma che data α con determinata approssimazione, con *simile* approssimazione le (2) daranno le rimanenti radici della data cubica.

Siccome mi occorrono alcuni teoremi sulle approssimazioni numeriche, reputo opportuno, per maggior chiarezza, di qui riportarli (**).

(*) *Risoluzione delle equazioni di 3° grado dedotta dall'integrale d'una equazione a differenze di terz'ordine.* Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania, vol. VIII, serie 4ª, 1895.

(**) M. J. Vielle. *Théorie générale des approximations numériques.* — Paris, Bachelier, 1854.

Bertrand. *Aritmetica.*

Moreno. *Aritmetica.*

a) Se a e b sono due numeri approssimati, e α e β sono gli errori assoluti di cui sono affetti, l'errore assoluto di $a+b$ è minore di $\alpha+\beta$.

b) E se b è approssimato per eccesso, a per difetto, l'errore di $a-b$ è minore di $\alpha+\beta$.

c) Se a è un numero esatto, e b è approssimato per difetto, l'errore assoluto di ab è minore del prodotto di a per l'errore assoluto di b.

d) Se a è approssimato, e b è esatto, l'errore assoluto di $\frac{a}{b}$ è minore di $\frac{1}{b}$ dell'errore assoluto di a.

e) Se a è approssimato, l'errore assoluto di a^2 è minore del prodotto di $2a$ per l'errore assoluto di a.

f) Se a è approssimato, l'errore assoluto di $\sqrt{a}$ è minore di $\frac{\alpha}{2\sqrt{a-\alpha}}$, dove α è l'errore assoluto di a.

g) Se in a vi sono m cifre esatte, in a^2 ve ne potranno essere m, $m-1$ ovvero $m-2$;

h) In $3a^2$ ve ne potranno essere m o $m-1$;

i) In $\sqrt{a}$ ve ne potranno essere $m+1$, o m, o $m-1$.

Ciò posto, sia α una radice della (1) approssimata per difetto fino alla m^{esima} cifra a cominciare dalla prima cifra significativa a sinistra. Applicando il teorema *g*), in α^2 si potranno avere m, $m-1$ o $m-2$ cifre esatte. Applicando in seguito il teorema *h*), si potranno avere, in $3\alpha^2$, m, $m-1$, $m-2$ o $m-3$ cifre esatte. Calcolando $4p-3\alpha^2$, si ha nella differenza un errore assoluto minore dell'errore assoluto di $3\alpha^2$, come indica il teorema *b*), e tale differenza potrà contenere un numero di cifre esatte eguale a quello di $3\alpha^2$, o minore, o maggiore. Se p. es. $4p=5348$ e $3\alpha^2=1672{,}54$, esatto, quest'ultimo valore, fino ai centesimi, allora $4p-3\alpha^2=4675{,}46$ avrà sei cifre esatte, quante ne aveva $3\alpha^2$; se $3\alpha^2=8{,}54$, esatto fino ai centesimi, $4p-3\alpha^2=5339{,}46$ avrà sei cifre esatte, mentre $3\alpha^2$ ne aveva tre solamente; e, infine, se $3\alpha^2=5347{,}54$, esatto fino ai centesimi, $4p-3\alpha^2=0{,}46$ avrà, a cominciare dalla sua prima cifra significativa a sinistra, due cifre esatte, laddove $3\alpha^2$ ne conteneva sei. In ogni caso però, mediante l'applicazione successiva dei teoremi *e*), *c*), *b*) rimane determinato il numero delle cifre di $4p-3\alpha^2$ sulle quali si potrà fare assegnamento.

In seguito il teorema *i*) insegna che questo numero di cifre esatte potrà conservarsi in $\sqrt{4p-3\alpha^2}$, potrà aumentare o diminuire d'una unità, e il teorema *f*) poi ci dirà quale di questi tre casi si verificherà. Infine coll'applicazione dei teoremi *a*), *b*), *d*) sapremo quante cifre esatte conterranno i valori di β e γ dedotti dalle (2).

Trascurando il caso in cui $\sqrt{4p-3\alpha^2}$ conterrà più di m cifre esatte, perchè nella somma $-\alpha\pm\sqrt{4p-3\alpha^2}$ delle cifre che seguono la m^{esima} nel valore di $\sqrt{4p-3\alpha^2}$ non se ne può tener conto, essendo α calcolato con m cifre esatte, dalla precedente discussione risulta che β e γ possono essere calcolate, mediante le formole (2), collo stesso grado di approssimazione con cui è calcolato α, e nel caso contrario può determinarsi il grado di approssimazione con cui le formole medesime dànno β e γ.

Si consideri p. es. l'equazione

$$x^3-7x+7=0$$

le cui radici sono, esatte fino alla quinta decimale,

$$\alpha=1{,}35689 \quad , \quad \beta=1{,}69202 \quad , \quad \gamma=-3{,}04891\,.$$

Si supponga noto il valore di α. Si ha:

$$\alpha^2=1{,}8411504721 \quad , \quad 3\alpha^2=5{,}5234514163 \quad , \quad 4p-3\alpha^2=22{,}4765485837$$

$$\sqrt{4p-3\alpha^2}=4{,}74094 \quad , \quad \beta=1{,}69202 \quad , \quad \gamma=-3{,}04891\,.$$

Applicando i teoremi sopra riportati si ha:

Errore assoluto di $\alpha < 0{,}00001$

» » $\alpha^2 < 2.2.0{,}00001 \;(=0{,}00004)$ [e]

» » $3\alpha^2 < 0{,}00012$ [c]

» » $4p-3\alpha^2 < 0{,}00012$ [b]

» » $\sqrt{4p-3\alpha^2} < \dfrac{0{,}00012}{2\sqrt{22{,}47\ldots.}} \;(=0{,}00001\ldots.)$ [f]

» » » $< 0{,}00002$

» » $-\alpha\pm\sqrt{4p-3\alpha^2} < 0{,}00003$ [a, b]

» » $\dfrac{-\alpha\pm\sqrt{4p-3\alpha^2}}{2} < 0{,}00002$ [d]

Siccome 0,00002 è manifestamente troppo grande, i valori di β e γ devono considerarsi esatti fino alla quinta decimale, come è effettivamente.

Si consideri l'equazione

$$x^3-21x+37=0\,.$$

Le sue radici, esatte fino alla quinta decimale, sono:

$$\alpha=-5{,}29085 \quad , \quad \beta=2{,}71688 \quad , \quad \gamma=2{,}57397.$$

Si supponga noto α. Si ha:

Errore assoluto di		α	$< 0{,}00001$	
»	»	α^2	$< 2.6.0{,}00001\ (=0{,}00012)$	[e]
»	»	$3\alpha^2$	$< 0{,}00036$	[c]
»	»	$4p-3\alpha^2$	$< 0{,}00036$	[b]
»	»	$\sqrt{4p-3\alpha^2}$	$< \frac{0{,}00036}{2.0{,}1}\ (=0{,}0018)$	[f]
»	»	$-\alpha \pm \sqrt{4p-3\alpha^2}$	$< 0{,}00181$	[a, b]
»	»	$\frac{-\alpha \pm \sqrt{4p-3\alpha^2}}{2}$	$< 0{,}0009....$	

Dunque β e γ saranno, in questo caso, approssimate solamente fino alla terza cifra decimale inclusa. Facendo i calcoli si trova

$$\beta=2{,}71739 \quad , \quad \gamma=2{,}57345 \,,$$

che, confrontate con quelle trovate dal Lottieri, da cui la predetta equazione fu risoluta, si trovano esatte fino alla terza decimale.

Si noti che l'ultima cifra conservata può essere errata d'una unità, pur conservando l'errore assoluto il limite trovato.

Se occorre conoscere se l'ultima cifra conservata è esatta oppure è errata d'una unità, si potrà procedere nel seguente modo.

Posto $f(x)=x^3-21x+37$ si ha

$$f(2{,}716) = -0{,}0010...$$
$$f(2{,}717) = +0{,}021...$$

Dunque l'ultima cifra 7 del valore β è errata d'una unità per eccesso.

Similmente si trovano:

$f(2{,}573)$ = numero positivo;
$f(2{,}574)$ = numero negativo;

dunque l'ultima cifra 3 di γ è esatta. Così abbiamo

$$\beta=2{,}716 \quad , \quad \gamma=2{,}573$$

a meno di 0,001 per difetto, ed è facile vedere poi se l'errore è minore di mezzo millesimo.

In ultimo si può osservare che se β e γ sono immaginarie, i teoremi precedenti ci conducono a determinare con quale approssimazione si può avere il coefficiente di $\sqrt{-1}$ nei valori di β e γ.

Per es. $\alpha=-3{,}22636$ è il valore dell'unica radice reale, esatto fino alla quinta decimale, della cubica

$$x^3-7x+11=0\,.$$

Col metodo precedente si trovano

$$\beta = 1{,}61318 + 0{,}89836 \sqrt{-1}$$
$$\gamma = 1{,}61318 - 989836 \sqrt{-1}\,,$$

e la discussione ci condurrà a concludere che tutte le cifre calcolate sono esatte.

Catania, maggio 1895.

Prof. S. Catania.

Triangolazioni Topografiche e Triangolazioni Catastali dell'Ing. Odoardo Jacoangeli. — Ulrico Hœpli, Milano, 1895.

Sotto forma di manuale l'ing. O. Jacoangeli ha testè pubblicate le norme teoriche e pratiche per procedere nei lavori di triangolazioni topografiche e catastali alle quali spesso si deve ricorrere nelle varie operazioni d'ingegneria.

Colla scorta delle *Disposizioni di Massima relative al riordinamento dell'Imposta Fondiaria* pubblicate in Roma negli anni 1889-90-92 per cura del Ministero delle Finanze e colle norme suggerite dall'esperienza propria, l'Autore si addentra e svolge in modo più che sufficiente per i bisogni della pratica il problema del rilevamento e calcolazione di una rete trigonometrica quando questa si svolge sopra un terreno nel quale siansi già eseguite triangolazioni geodetiche.

I molti esempî e quadri che illustrano l'opera rendono chiara l'esposizione che l'Autore fa di ogni parte trattata, ma con rincrescimento dobbiamo far notare che all'Autore sfuggirono alcuni errori di concetto nella parte che riguarda le *verifiche e correzioni del teodolite*, mentre converrebbe insistere molto su di esse, inquantochè le applicazioni della matematica alla compensazione delle poligonali e delle reti triangolari a nulla giovano senza la perfetta conoscenza degli strumenti dai quali si deducono gli elementi di calcolo.

Il prezzo del manuale (L. 7,50) è anche un po' elevato inquantochè tolti i quadri, la parte rimanente comprende appena 240 pagine di piccolo formato.

L'esposizione dei varî capitoli è però ben ordinata e adatta tanto a chi aspira alla carriera catastale, quanto al libero professionista.

Aspettiamo che l'Autore dia alla luce gli altri due manuali, uno sulle Poligonazioni e l'altro sul Rilevamento parcellare che ha promesso di prossima pubblicazione, e siccome essi formeranno parte indivisibile di quello già pubblicato, speriamo che l'Autore vi aggiunga alcune pagine da sostituire a quelle poche che nell'attuale manuale contengono errori che non si possono chiarire in una semplice *errata-corrige*.

Torino, maggio 1895.

Ing. Vittorio Baggi.

Sopra una questione elementare del giuoco del bigliardo.

Nell'*Intermédiaire des mathématiciens*, T. II, p. 132, viene proposta la seguente questione:

Une bille de billard est lancée sur un billard obliquement à la bande; son mouvement est supposé se continuer indéfiniment, la bille n'obéissant qu'à la loi: l'angle de réflexion sur une bande égale l'angle d'incidence. Ira-t-elle passer par un point du billard qu'on fixe seulement après que la bille est lancée?

Sia ABCD il bigliardo, e pongasi $AB=CD=a$, $BC=DA=b$. La palla parta da un punto P_0 della sponda AB (ciò che non toglie nulla della generalità) facendo col tratto P_0B un angolo acuto α, e vada ad incontrare la sponda BC in P_1, indi dopo riflessione CD in P_2, ecc. La traiettoria della palla si comporrà d'una infinità di tratti paralleli alternativamente alle due *direzioni fondamentali* P_0P_1, P_1P_2. I tratt paralleli all'una od all'altra direzione formano un insieme *numerabile* mentre l'insieme di tutti i tratti paralleli ad una medesima direzione che possono tracciarsi entro il rettangolo ABCD ha *la seconda potenza.* Ne segue che vi ha un'infinità (non numerabile) di tratti paralleli a ciascuna direzione fondamentale che non possono far parte della traiettoria.

Può però dimostrarsi che, se $\frac{a \operatorname{tang} \alpha}{b}$ è irrazionale, segnato un punto qualsiasi M del bigliardo e presa una grandezza δ arbitrariamente piccola, la palla passerà a distanza da M minore di δ.

Porremo $\operatorname{tang} \alpha = t$, $\frac{b}{t} - a = c$; inoltre:

$$AP_0=x_0,\ BP_1=x_1,\ CP_2=x_2,\ DP_3=x_3,\ AP_4=x_4,\ \ldots$$

Si ha evidentemente:

$$x_1=(a-x_0)t,\ x_2=(b-x_1)\frac{1}{t},\ x_3=(a-x_2)t,\ x_4=(b-x_3)\frac{1}{t},$$

da cui:

$$x_4=x_0+2c.$$

Se $c=0$, P_4 coincide con P_0, e la palla continua indefinitamente a percorrere il perimetro del parallelogramma $P_0P_1P_2P_3$.

Se $c \neq 0$, basterà considerare p. es. il caso di $c>0$. In questo caso non potrà mai avvenire che un tratto parallelo alla prima direzione fondamentale non incontri quella delle due sponde di lunghezza b verso la quale è diretto; ma potrà accadere invece che un tratto parallelo alla seconda direzione fondamentale non incontri quella delle sponde di lunghezza a verso la quale è diretto il tratto stesso. Supponiamo che ciò avvenga per la prima volta per la sponda AB. Se:

$$x_{4r_1}=x_0+2r_1c<a\,, \quad x_0+2(r_1+1)c>a\,,$$

il tratto che parte dal punto P_{4r_1+3} di DA non incontrerà AB, ma incontrerà invece BC in un punto Q e riflettendosi in questo colpirà AB in $P_{4(r_1+1)}$. Detto $P'_{4(r_1+1)}$ il punto d'incontro del prolungamento di $P_{4r_1+3}Q$ con quella di AB, sarà:

$$B\,P'_{4(r_1+1)}=P_{4(r_1+1)}\,B\,, \quad A\,P'_{4(r_1+1)}=x_0+2(r_1+1)c\,,$$

quindi:

$$x_{4(r_1+1)}=A\,P_{4(r_1+1)}=a-P_{4(r_1+1)}B=2a-x_0-2(r_1+1)c\,.$$

È facile vedere che si avrà poi:

$$x_{4(r_1+2)}=2a-x_0-2(r_1+2)c\,,\ldots, x_{4r_2}=2a-x_0-2r_2c\,.$$

Supposto che non sia mai avvenuto che un tratto diretto verso la CD non la incontri, e supposto inoltre che sia

$$x_{4r_2}>0\,,\ 2a-x_0-2(r_2+1)c<0\,,$$

il tratto che parte dal punto P_{4r_2+3} di BC non incontrerà AB, ma incontrerà invece DA in un punto R, e quivi riflettendosi colpirà AB in $P_{4(r_2+1)}$. Denotando con $P'_{4(r_2+1)}$ il punto d'incontro del prolungamento di $P_{4r_2+3}R$ con quello di BA, sarà:

$$\begin{aligned} x_{4(r_2+1)}&=A\,P_{4(r_2+1)}=P'_{4(r_2+1)}A=-[2a-x_0-2(r_2+1)c]\\ &=x_0-2a+2(r_2+1)c\,. \end{aligned}$$

Si troverebbe poi:

$$x_{4(r_2+2)}=x_0-2a+2(r_2+2)c\,,$$

etc. Adunque i punti d'incontro della palla colla sponda AB sono dati da:

$$\begin{aligned} &x_0\,,\ x_0+2c\,,\ x_0+4c\,,\ \ldots\,,\ x_0+2r_1c\,,\\ &2a-x_0-2(r_1+1)c\,,\ \ldots\,,\ 2a-x_0-2r_2c\,,\\ &x_0-2a+2(r_2+1)c\,,\ \ldots\,,\ x_0-2a+2r_3c\,,\\ &4a-x_0-2(r_3+1)c\,,\ \ldots\,,\ 4a-x_0-2r_4c\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

espressioni che possono comprendersi nell'unica forma:

$$\pm(x_0+2hc-2ka) \qquad (1)$$

dove h e k sono due numeri interi e positivi soggetti alla sola condizione che il valore dell'espressione corrispondente sia positiva ed inferiore ad a.

Se $\frac{at}{b}$, e quindi anche $\frac{c}{a}$, è irrazionale, possono trovarsi, come è noto, due numeri interi e positivi p, q tali che sia:

$$|2pc-2qa|<\delta,$$

essendo δ una quantità positiva arbitrariamente piccola. Supponiamo p. es. $2pc-2qa$ positivo, ed indichiamone il valore con g. Sia E un punto qualunque di AB, e sia $AE=y$, $g<y$. Denotiamo con m il massimo intero contenuto in $\frac{y+2\varepsilon a-x_0}{g}$, dove ε ha il valore 0 od 1 secondochè $y \gtrless x_0$; sarà, θ designando una quantità compresa fra 0 ed 1:

$$\frac{y+2\varepsilon a-x_0}{g}=m+\theta,$$

da cui:

$$y-\theta g=x_0+mg-2\varepsilon a=x_0+2mpc-2(mq+\varepsilon)a.$$

Ora, poichè $a>y-\theta g>0$, l'espressione di $y-\theta g$ appartiene all'insieme (1), e il punto G di AB dato da $AG=y-\theta g$ è uno dei punti in cui la palla incontra AB; inoltre si ha $GE=\theta g<\delta$. Analogamente si procederebbe se $2pc-2qa$ fosse negativo.

I punti in cui la palla incontra la sponda AB formano adunque un insieme I condensato in tutto l'intervallo AB.

Per ciascun punto dell'insieme I passano due tratti della traiettoria paralleli alle due direzioni fondamentali. L'insieme dei punti di tutti questi tratti è condensato in tutto il campo ABCD. Ne segue che, preso un punto qualunque M del bigliardo e designando con δ una grandezza arbitrariamente piccola, la palla passerà a distanza minore di δ dal punto M.

Mantova, 2 aprile 1895.

G. Vivanti.

Sulla trattazione intrinseca delle questioni baricentriche

Nota di E. Cesàro

Quando si voglia studiare una curva dal punto di vista delle sue proprietà baricentriche, è ben naturale prendere come assi (mobili) gli assi principali d'inerzia della doppia infinità dei suoi archi. Le coordinate d'un punto fisso sono allora funzioni di due variabili, poichè dipendono dai valori s_1 ed s_2 che prende negli estremi d'un arco qualunque la lunghezza s dell'arco di curva, contato a partire da un'origine fissa; ma le derivate parziali di tali funzioni si potranno sempre esprimere linearmente nelle coordinate stesse, in virtù della nota composizione della velocità assoluta, che nel caso attuale è nulla, mediante la velocità relativa e quella di trascinamento. Così per le curve piane si avrà

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = u_1 - \omega_1 y \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} = u_2 - \omega_2 y \quad ,$$
$$\frac{\partial y}{\partial s_1} = v_1 + \omega_1 x \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial s_2} = v_2 + \omega_2 x \quad ,$$

ed i coefficienti u, v, ω, funzioni delle variabili s_1 ed s_2, si determineranno subito col solo derivare le relazioni

$$\int_{s_1}^{s_2} x ds = 0 \quad , \quad \int_{s_1}^{s_2} y ds = 0 \quad , \quad \int_{s_1}^{s_2} xy ds = 0 \quad .$$

Chiamata σ la lunghezza dell'arco $s_2 - s_1$, se si distinguono con indici 1 e 2 tutte le quantità che si riferiscono all'uno o all'altro estremo, e se si pone

$$\int_{s_1}^{s_2} (x^2 - y^2)\, ds = \varkappa \sigma \quad ,$$

si trova

$$u_1 = \frac{x_1}{\sigma} \quad , \quad v_1 = \frac{y_1}{\sigma} \quad , \quad \omega_1 = \frac{x_1 y_1}{\varkappa\sigma} \quad ,$$

$$u_2 = -\frac{x_2}{\sigma} \quad , \quad v_2 = -\frac{y_2}{\sigma} \quad , \quad \omega_2 = -\frac{x_2 y_2}{\varkappa\sigma} \quad .$$

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\int_{s_1}^{s_2} x ds = -x_1 + \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial x}{\partial s_1} ds = -x_1 + \sigma u_1 \text{ ; ecc.}$$

Dopo ciò le relazioni fondamentali per lo studio delle proprietà baricentriche delle curve piane si riducono alla forma

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = \left(1 - \frac{y y_1}{\varkappa}\right)\frac{x_1}{\sigma} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} = -\left(1 - \frac{y y_2}{\varkappa}\right)\frac{x_2}{\sigma} \quad ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s_1} = \left(1 + \frac{x x_1}{\varkappa}\right)\frac{y_1}{\sigma} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial s_2} = -\left(1 + \frac{x x_2}{\varkappa}\right)\frac{y_2}{\sigma} \quad .$$

La coppia di sinistra non è applicabile ad (x_1, y_1), e quella di destra non è applicabile ad (x_2, y_2). Per questi punti, se si rappresenta con φ l'inclinazione della tangente sull'asse x, si ha

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma x_1}{\partial s_1} = \cos\varphi_1 - \omega_1 y_1 \quad , \quad \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma x_2}{\partial s_2} = \cos\varphi_2 - \omega_2 y_2 \quad ,$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma y_1}{\partial s_1} = \operatorname{sen}\varphi_1 + \omega_1 x_1 \quad , \quad \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma y_2}{\partial s_2} = \operatorname{sen}\varphi_2 + \omega_2 x_2 \quad .$$

Per fare un'applicazione di queste formole vogliamo prima cercare le formole analoghe per le coordinate

$$\xi_1 = x_1 - \rho_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \quad , \quad \xi_2 = x_2 - \rho_2 \operatorname{sen}\varphi_2$$

$$\eta_1 = y_1 + \rho_1 \cos\varphi_1 \quad , \quad \eta_2 = y_2 + \rho_2 \cos\varphi_2$$

dei centri di curvatura negli estremi dell'arco σ. Osservando le relazioni evidenti

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} = \omega_1 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} = \omega_1 + \frac{1}{\rho_1} \quad ,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} = \omega_2 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} = \omega_2 + \frac{1}{\rho_2} \quad ,$$

si ottiene, per uno dei centri,

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s_2} = -\frac{x_2}{\sigma} - \omega_2 \eta_1 \ , \quad \frac{\partial \sigma \xi_1}{\partial s_1} = -\omega_1 \sigma \eta_1 - \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1} \operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial s_2} = -\frac{y_2}{\sigma} + \omega_2 \xi_1 \ , \quad \frac{\partial \sigma \eta_1}{\partial s_1} = \omega_1 \sigma \xi_1 + \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1} \cos\varphi_1 \ ,$$

e per l'altro

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s_1} = \frac{x_1}{\sigma} - \omega_1 \eta_2 \ , \quad \frac{\partial \sigma \xi_2}{\partial s_2} = -\omega_2 \sigma \eta_2 - \frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2} \operatorname{sen}\varphi_2 \ ,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial s_1} = \frac{y_1}{\sigma} + \omega_1 \xi_2 \ , \quad \frac{\partial \sigma \eta_2}{\partial s_2} = \omega_2 \sigma \xi_2 + \frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2} \cos\varphi_2 \ .$$

Ciò premesso, proponiamoci di trovare una curva tale, che il baricentro di qualunque arco ed i centri di curvatura negli estremi dell'arco stesso siano in linea retta. Si dovrà avere $\xi_2 \eta_1 = \xi_1 \eta_2$, e derivando questa relazione si otterrà

$$(\xi_1 \cos\varphi_1 + \eta_1 \operatorname{sen}\varphi_1)\, \rho_1 + (\xi_2 \cos\varphi_1 + \eta_2 \operatorname{sen}\varphi_1) \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1} = 0 \ ,$$

$$(\xi_2 \cos\varphi_2 + \eta_2 \operatorname{sen}\varphi_2)\, \rho_2 - (\xi_1 \cos\varphi_2 + \eta_1 \operatorname{sen}\varphi_2) \frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2} = 0 \ ,$$

cioè, chiamando K il comune valore dei rapporti $\xi_2 : \xi_1$ ed $\eta_2 : \eta_1$,

$$\frac{d}{ds_1} \log\rho_1 = \frac{\mathrm{K}-1}{\mathrm{K}\sigma} \ , \quad \frac{d}{ds_2} \log\rho_2 = \frac{\mathrm{K}-1}{\sigma} \ .$$

In queste relazioni i primi membri sono i valori che la funzione

$$\frac{d}{ds} \log\rho = \mathrm{f}(s)$$

prende negli estremi dell'arco, dimodochè si ha, eliminando K,

$$s_1 + \frac{1}{\mathrm{f}(s_1)} = s_2 + \frac{1}{\mathrm{f}(s_2)} \ .$$

Ne segue che $s + \dfrac{1}{\mathrm{f}(s)}$ deve avere un valore costante, e questo valore si può prendere uguale a zero fissando convenientemente l'origine degli archi. Quindi, successivamente,

$$\mathrm{f}(s) = -\frac{1}{s} \ , \quad \rho s = \textit{costante} \ ,$$

ed anche $K = \rho_2 : \rho_1$. La curva cercata è dunque la *clotoide,* ed il baricentro di qualunque arco è centro di similitudine dei circoli osculatori estremi.

Questa caratteristica proprietà della clotoide è notevole anche perchè è ben difficile immaginarne un'estensione tale, che vi risponda effettivamente qualche curva. Per esempio, non è possibile che l'area $\frac{1}{2}\mathfrak{J}$ del triangolo formato dal baricentro e dai centri estremi di curvatura sia costante e non nulla. È questa, del resto, un'impossibilità prevedibile, perchè i tre vertici debbono tendere ad allinearsi sulla normale quando σ tende a zero. Ma il calcolo mostra che non si può nemmeno fare in modo che $\mathfrak{J}$ dipenda solo dalla lunghezza dell'arco σ. Infatti dalle formole precedentemente stabilite è facile dedurre

$$\sigma \frac{\partial^2 \sigma \mathfrak{J}}{\partial s_1 \partial s_2} = \left(\rho_1\rho_2 + \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1} \frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2}\right) \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) . \tag{1}$$

Per $\mathfrak{J}$ costante, siccome non può essere sempre $\varphi_1 = \varphi_2$ senza che la linea si riduca ad una retta, si dovrebbe avere

$$\rho_1 \frac{ds_1}{d\rho_1} - \rho_2 \frac{ds_2}{d\rho_2} = \sigma ,$$

e si ritroverebbe così la clotoide, per la quale è necessario che sia $\mathfrak{J} = 0$. Suppongasi, più generalmente, $\mathfrak{J}$ funzione della sola σ, e la derivata terza di $\mathfrak{J}$ prenda, per $\sigma = 0$, il valore $\frac{3}{4} k$, arbitrario; poi, fissato per s_1 un valore qualunque s, si faccia tendere s_2 ad s. Allora nel secondo membro di (1) si ha

$$\lim \frac{1}{\sigma} \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{\rho} \quad , \quad \lim \frac{1}{\sigma^2} \left(\rho_1\rho_2 + \frac{\partial \sigma \rho_1}{\partial s_1} \frac{\partial \sigma \rho_2}{\partial s_2}\right) = \rho^3 \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{\rho} \quad ,$$

ed occorre pertanto che sia

$$\rho^2 \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{\rho} = -\lim \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \sigma \mathfrak{J}}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{1}{2} \lim \frac{d^4 \sigma \mathfrak{J}}{d\sigma^4} = \frac{3}{2} k .$$

Dunque la curva appartiene necessariamente alla classe definita dall'equazione intrinseca

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{k\rho + k'\rho^4}} .$$

In particolare per $k = 0$ si ritrova la clotoide, e per $k' = 0$ si ottiene

la spirale $a\rho = s^2$, che prende origine in un punto assintotico e si svolge parabolicamente all'infinito. Ma tutte queste curve, per $k \gtrless 0$, non godono dell'accennata proprietà se non per archi infinitesimi, e ciò si deve alla presenza del segno trigonometrico nella formola (1). Così, per esempio, per la curva $a\rho = s^2$ si ha $2a\vartheta = \sigma^3$, e la (1) diventa

$$\frac{a\sigma}{s_1 s_2} = \operatorname{sen} \frac{a\sigma}{s_1 s_2} ,$$

e tende ad essere soddisfatta solo per archi infinitesimi, o per qualunque arco compreso fra punti infinitamente distanti dal punto assintotico.

Cerchiamo ancora quali curve hanno il baricentro di ogni loro arco ed il punto d'incontro delle tangenti estreme congiunti da una retta invariabile in direzione. Le distanze

$$q_1 = x_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - y_1 \cos\varphi_1 \quad , \quad q_2 = x_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - y_2 \cos\varphi_2$$

del baricentro alle tangenti estreme, e gli angoli di queste con la direzione invariabile, soddisfano alle relazioni

$$\frac{\partial q_2}{\partial s_1} = \frac{1}{\sigma}(x_1 \operatorname{sen}\varphi_2 - y_1 \cos\varphi_2) \quad , \quad \frac{\partial \sigma q_1}{\partial s_1} = \frac{1}{\rho_1}(x_1 \cos\varphi_1 + y_1 \operatorname{sen}\varphi_1)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_2} = \frac{1}{\sigma}(x_2 \operatorname{sen}\varphi_1 - y_2 \cos\varphi_1) \quad , \quad \frac{\partial \sigma q_2}{\partial s_2} = \frac{1}{\rho_2}(x_2 \cos\varphi_2 + y_2 \operatorname{sen}\varphi_2)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial s_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial s_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial s_1} = \frac{1}{\rho_1} \quad , \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial s_2} = \frac{1}{\rho_2} \quad ,$$

che si stabiliscono facilmente mercè le formole fondamentali. Ora dall'equazione del problema $q_1 \operatorname{sen}\psi_2 = q_2 \operatorname{sen}\psi_1$ si deducono, differenziando parzialmente, le relazioni

$$\frac{q_1}{\sigma} \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{q_2}{\rho_1} = 0 \quad , \quad \frac{q_2}{\sigma} \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{q_1}{\rho_2} = 0 ,$$

e da queste risulta

$$\rho_1 \rho_2 \operatorname{sen}^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \sigma^2 . \tag{2}$$

In particolare, se b è il valore di ρ per $s=0$, e se si pone

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{\rho} ,$$

si deve avere $b\rho \operatorname{sen}^2\varphi = s^2$, da cui segue

$$\frac{b}{s} = -\int \frac{bds}{s^2} = -\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} = \cot\varphi + k \ ,$$

e finalmente, dopo aver posto $b = (1 + k^2)\,a$ ed aver trasportato in $s = ka$ l'origine degli archi,

$$\rho = a + \frac{s^2}{a} \ .$$

Si constata poi con facilità che, vincolato in tal modo ρ ad s, la relazione (2) è soddisfatta da qualunque coppia di valori di s_1 ed s_2. Adunque la proprietà enunciata appartiene esclusivamente alla *catenaria*.

A base dello studio baricentrico d'una linea piana si può anche porre la rete delle curve che inviluppano nei baricentri gli assi principali d'inerzia. Le variazioni delle coordinate del baricentro si deducono facilmente dalle formole fondamentali ricorrendo alla composizione delle velocità, ricordata in principio. Esse sono

$$d\varsigma_1 = -\frac{1}{\sigma}(x_1 ds_1 - x_2 ds_2) \quad , \quad d\varsigma_2 = -\frac{1}{\sigma}(y_1 ds_1 - y_2 ds_2) \ .$$

Ne segue che, se si vuole che l'asse x tocchi nel baricentro il proprio inviluppo, bisogna spostare gli estremi dall'arco σ in modo che sia costantemente $y_1 ds_1 = y_2 ds_2$, ed allora l'arco elementare dell'inviluppo è $d\varsigma_1$. Se invece gli estremi di σ si fanno scorrere lungo la curva in modo che si abbia sempre $x_1 ds_1 = x_2 ds_2$, il baricentro subirà uno spostamento $d\varsigma_2$ sull'asse y. Si costituisce così una rete ortogonale, nella quale si sa che le condizioni d'immobilità del punto (x, y) sono

$$\frac{\partial x}{\partial \varsigma_1} = g_1 y - 1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \varsigma_2} = -g_2 y \quad ,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varsigma_2} = g_2 x - 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \varsigma_1} = -g_1 x \quad .$$

In queste formole i coefficienti g_1 e g_2 (curvature delle linee coordinate) sono obbligati soltanto alla condizione di Lamé

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varsigma_2} + \frac{\partial g_2}{\partial \varsigma_1} = g_1{}^2 + g_2{}^2 \quad ,$$

necessaria e sufficiente per l'esistenza delle funzioni x ed y. Se si osserva che fra i quozienti differenziali relativi alle variabili s ed alle ς si hanno le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = -\frac{1}{\sigma}\left(x_1\frac{\partial}{\partial \varsigma_1} + y_1\frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\right) \ , \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{1}{\sigma}\left(x_2\frac{\partial}{\partial \varsigma_1} + y_2\frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\right) ,$$

dalle quali, chiamando $\frac{1}{2}\tau$ l'area del triangolo formato dal baricentro e dagli estremi dell'arco σ, si deducono le altre

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_1} = \frac{\sigma}{\tau}\left(y_2\frac{\partial}{\partial s_1} + y_1\frac{\partial}{\partial s_2}\right) \ , \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} = -\frac{\sigma}{\tau}\left(x_2\frac{\partial}{\partial s_1} + x_1\frac{\partial}{\partial s_2}\right) ,$$

la trasformazione delle nuove formole fondamentali nelle antiche porge i valori delle curvature:

$$g_1 = (x_2 - x_1)\frac{y_1 y_2}{\varkappa\tau} \ , \quad g_2 = (y_2 - y_1)\frac{x_1 x_2}{\varkappa\tau} \ . \tag{3}$$

Qui si noti che, se i precedenti valori si lasciano sotto la forma

$$g_1 = -\frac{\sigma}{\tau}(\omega_1 y_2 + \omega_2 y_1) \ , \quad g_2 = -\frac{\sigma}{\tau}(\omega_1 x_2 + \omega_2 x_1) ,$$

e se d'altra parte si osserva che, rappresentando con φ l'angolo che una direzione invariabile fa con l'asse x, si ha

$$\omega_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial s_1} \ , \quad \omega_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} ,$$

si ha pure

$$g_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial \varsigma_1} \ , \quad g_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial \varsigma_2} ,$$

e si riconosce subito che la condizione di Lamé è soddisfatta: basta applicare alla funzione φ la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial^2}{\partial \varsigma_1 \partial \varsigma_2} - \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_2 \partial \varsigma_1} = g_1\frac{\partial}{\partial \varsigma_1} - g_2\frac{\partial}{\partial \varsigma_2} \ .$$

Quando per s_1 si fissa un valore qualunque s, e si fa poi tendere s_2 ad s, un asse principale tende a diventare tangente alla curva, l'altro normale. Scelto il primo come asse x, è facile riconoscere, tenendo presenti le relazioni

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \ , \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \ ,$$

che, per soddisfare alle formole fondamentali con serie che procedono secondo le potenze di σ, si deve prendere

$$x_1 = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^3}{48\rho^2} + \frac{\sigma^4}{120}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \dots \quad , \quad y_1 = \frac{\sigma^2}{12\rho} + \frac{\sigma^3}{60}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \dots ,$$

$$x_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{48\rho^2} - \frac{\sigma^4}{80}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \dots \quad , \qquad y_2 = \frac{\sigma^2}{12\rho} + \frac{\sigma^3}{40}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \dots$$

Ne segue

$$\tau = \frac{\sigma^3}{12\rho} + \frac{\sigma^4}{24}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho} + \dots \tag{4}$$

Inoltre, se si osserva che

$$\frac{\partial \varkappa \sigma}{\partial s_1} = y_1^2 - x_1^2 \quad , \quad \frac{\partial \varkappa \sigma}{\partial s_2} = x_2^2 - y_2^2 \quad ,$$

si ottiene anche

$$\varkappa = \frac{\sigma^2}{12} - \frac{\sigma^4}{180\rho^2} + \dots$$

Queste formole rendono facile la discussione dei fatti geometrici della rete baricentrica nel dominio di qualunque punto ordinario della curva considerata. In particolare le formole (3) diventano, per $\sigma = 0$,

$$g_1 = \frac{1}{\rho} \quad , \quad g_2 = \frac{3}{5}\frac{d}{ds}\log\rho \, ,$$

e mentre la prima costituisce una verifica dei nostri calcoli, l'altra conduce ad una costruzione semplice dei centri di curvatura, lungo la data curva, di tutte le trajettorie (ad angolo costante) delle linee coordinate. Inoltre le ultime formole mostrano che non ogni rete ortogonale si può considerare come baricentrica di qualche curva, perchè occorre che in uno dei due sistemi di linee coordinate, per esempio nel sistema ς_1, la rete racchiuda una curva tale, che la curvatura delle linee dell'altro sistema prenda, sulla detta curva, i valori

$$g_2 = -\frac{3}{5}\frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\log g_1 \, .$$

Del resto è chiaro geometricamente che le baricentriche sono reti specialissime. Così, per esempio, un doppio sistema di circoli ortogonali non costituisce, in generale, una rete baricentrica, perchè tale potrebbe essere solo per una delle sue circonferenze, e d'altra parte è ovvio che la rete baricentrica d'una circonferenza è costituita dalle circonferenze concentriche e dal fascio dei comuni diametri.

Osserviamo, per finire, che una curva qualunque appartiene alla propria rete baricentrica come luogo dei baricentri degli archi nulli, e però serve di confine fra la regione dei baricentri degli archi reali

e quella dei baricentri di archi immaginarii. La prima regione si può idealmente scomporre in due fogli, immaginando ciascun punto come appartenente all'uno o all'altro foglio secondo che il corrispondente arco s'intende percorso in un senso o in senso opposto. In tal modo, per poco che si stacchino i due fogli, pur lasciandoli connessi lungo la data curva, si riesce a porre in rilievo la superficie luogo dei baricentri di tutti gli archi *reali* della curva stessa. Per ogni movimento continuo d'una coppia di punti, sulla curva, si ha un movimento continuo del corrispondente baricentro, ed il passaggio di questo da un foglio all'altro indica lo scambio delle posizioni relative dei due punti sulla curva. In tutto ciò il baricentro si comporta come se inseguisse i due punti col proposito di non raggiungerne uno senza raggiungere contemporaneamente anche l'altro. Nondimeno può accadere, in casi eccezionali, che il baricentro non raggiunga i due punti, quando questi si confondono, o che ne abbandoni uno per raggiungere l'altro. Per esempio, se due punti, confusi in origine, si staccano inseguendosi sempre in un senso lungo una circonferenza, il baricentro dell'arco primitivamente nullo finisce per trovarsi nel centro quando il punto più veloce raggiunge il più lento; ma si noti che allora un altro punto, baricentro dell'arco complementare, lascia il centro per andare a confondersi con entrambi i punti. Invece se due punti si rincorrono lungo una clotoide avvicinandosi ad un punto assintotico, e se il più veloce tende ad occupare questa posizione lasciando in altra il più lento, il baricentro finisce per confondersi col primo; ma in questo caso si deve notare che l'arco σ cresce indefinitamente. È in tutti i casi manifesta la tendenza del baricentro a raggiungere di preferenza quel punto che più rapidamente tende a sfuggirgli.

In forma geometricamente più chiara si presenta il luogo dei baricentri d'una curva storta. Siccome il baricentro si dirige verso un estremo mobile dell'arco, se l'altro resta fisso, è ovvio che il piano tangente in un punto qualunque della superficie baricentrica è individuato dal baricentro (punto di contatto) e dagli estremi del corrispondente arco. Quando l'arco tende a zero, il baricentro tende generalmente a collocarsi in un punto (nel punto di mezzo) dell'arco stesso, e però il piano tangente alla superficie tende ad osculare la curva. Dunque *una* delle infinite superficie, sulle quali una data curva è assintotica, ha la seguente proprietà: ogni piano tangente alla superficie stacca dalla curva un arco, che ha il baricentro nel punto di contatto. Tre punti qualunque della curva sono gli estremi di tre archi, i cui baricentri stanno sopra una retta, e però i baricentri dei sei archi determinati da quattro punti si distribuiscono in terne su quattro rette. Le superficie baricentriche sono dunque tali che ad ogni coppia di

punti se ne possono associare altre due, che insieme alla prima sono le tre coppie di vertici opposti d'un quadrilatero completo. È poi chiaro che da qualunque punto della superficie si possono condurre infinite rette, che incontrano la superficie in altri due punti: son questi i baricentri dei due archi, nei quali si può in una semplice infinità di modi spezzare l'arco corrispondente al punto dato. Tutto ciò mette bene in evidenza che non ogni superficie è baricentrica di qualche curva, come risulta anche dall'osservare, per esempio, che una quadrica rigata non è mai baricentrica, perchè tale potrebbe essere soltanto rispetto ad una sua generatrice rettilinea. Infatti, quando una superficie è baricentrica, la corrispondente curva è una delle sue assintotiche; e può anche darsi che la superficie sia baricentrica per tutte le assintotiche d'un sistema, come realmente accade nell'elicoide rigata ad area minima.

L'analisi intrinseca delle superficie baricentriche è tutta fondata su formole analoghe a quelle che si son trovate in principio per le curve piane. Rispetto agli assi principali d'inerzia, le condizioni d'immobilità del punto (x, y, z) sono

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} = \left(1 - \frac{yy_1}{\nu} + \frac{zz_1}{\mu}\right)\frac{x_1}{\sigma} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} = -\left(1 - \frac{yy_2}{\nu} + \frac{zz_2}{\mu}\right)\frac{x_2}{\sigma} \quad ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial s_1} = \left(1 - \frac{zz_1}{\lambda} + \frac{xx_1}{\nu}\right)\frac{y_1}{\sigma} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial s_2} = -\left(1 - \frac{zz_1}{\lambda} + \frac{xx_2}{\nu}\right)\frac{y_2}{\sigma} \quad ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial s_1} = \left(1 - \frac{xx_1}{\mu} + \frac{yy_1}{\lambda}\right)\frac{z_1}{\sigma} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial s_2} = -\left(1 - \frac{xx_2}{\mu} + \frac{yy_2}{\lambda}\right)\frac{z_2}{\sigma} \quad ,$$

dove si è posto

$$\int_{s_1}^{s_2} (y^2 - z^2)\, ds = \lambda\sigma \, , \qquad \int_{s_1}^{s_2} (z^2 - x^2) ds = \mu\sigma \, , \qquad \int_{s_1}^{s_2} (x^2 - y^2) = \nu\sigma \, ,$$

dimodochè $\lambda + \mu + \nu = 0$. Sia l la distanza del baricentro ad un punto della curva, e ψ l'angolo che la tangente in questo punto fa col raggio vettore. Fra le numerose formole che si possono dedurre dalle relazioni fondamentali conviene segnalare le seguenti:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma l_1}{\partial s_1} = \cos\psi_1 \, , \quad \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma l_2}{\partial s_2} = \cos\psi_2 \, . \tag{5}$$

Siano ξ, η, ζ le coordinate del punto fisso quando si prende per asse ξ la retta che congiunge il baricentro ad un estremo dell'arco, e per asse ζ la normale alla superficie baricentrica. Siano n, g, t la curvatura normale, la curvatura geodetica e la torsione geodetica della

curva che il baricentro descrive quando insegue il predetto estremo. È noto che le condizioni d'immobilità del punto (ξ, η, ζ) sono

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varsigma} = n\zeta - g\eta - 1 \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial \varsigma} = g\xi - t\zeta \quad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \varsigma} = t\eta - n\xi \quad ,$$

e queste si debbono poter dedurre dalle formole segnalate in principio, tenendo presenti le relazioni che intercedono fra le antiche coordinate x, y, z e le nuove ξ, η, ζ, relative all'uno o all'altro estremo, ed osservando inoltre che si ha

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_1} = -\frac{\sigma}{l_1}\frac{\partial}{\partial s_1} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} = \frac{\sigma}{l_2}\frac{\partial}{\partial s_2} \quad ,$$

come risulta, del resto, dalla stessa trasformazione delle antiche formole nelle nuove. Eseguendo questa trasformazione, e chiamando φ e χ le inclinazioni, sul piano tangente, della tangente alla curva in un dato punto, e del piano determinato dalla tangente stessa e dal baricentro, si trovano i valori delle curvature:

$$n_1 = -\frac{\sigma}{l_1^2}\operatorname{sen}\varphi_1 \quad , \quad g_1 = -\frac{\sigma}{l_1^2}\operatorname{sen}\psi_1 \cos\chi_1 \quad , \quad t_1 = -n_1 \cot\theta \quad ,$$

$$n_2 = \frac{\sigma}{l_2^2}\operatorname{sen}\varphi_2 \quad , \quad g_2 = \frac{\sigma}{l_2^2}\operatorname{sen}\psi_2 \cos\chi_2 \quad , \quad t_2 = n_2 \cot\theta \quad .$$

Già dall'ultima coppia di formole, in cui θ rappresenta l'angolo delle rette che dal baricentro vanno agli estremi dell'arco, si vede che le linee secondo le quali il baricentro insegue l'uno o l'altro estremo costituiscono una rete di curve coniugate. Sia $\frac{1}{2}\omega$ l'angolo di cui bisogna far ruotare la tangente ad una linea di curvatura perchè vada a dividere per metà l'angolo θ. È noto che, se N_1 ed N_2 sono le curvature principali, si hanno le relazioni

$$n_1 = \frac{1}{2}(N_1+N_2) + \frac{1}{2}(N_1-N_2)\cos(\omega+\theta) \quad , \quad t_1 = \frac{1}{2}(N_1-N_2)\operatorname{sen}(\omega+\theta) \quad ,$$

$$n_2 = \frac{1}{2}(N_1+N_2) + \frac{1}{2}(N_1-N_2)\cos(\omega-\theta) \quad , \quad t_2 = \frac{1}{2}(N_1-N_2)\operatorname{sen}(\omega-\theta) \quad ,$$

dalle quali si deduce

$$N_1+N_2 = \frac{n_1+n_2}{\operatorname{sen}^2\theta} \quad , \quad N_1N_2 = \frac{n_1 n_2}{\operatorname{sen}^2\theta} \quad , \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\operatorname{tg}\theta \quad . \qquad (6)$$

L'ultima formola serve alla determinazione delle linee di curvatura;

la seconda fornisce la seguente notevole espressione della curvatura totale:

$$G = -\frac{\sigma^2}{\tau^2}\,\mathrm{sen}\varphi_1 \mathrm{sen}\varphi_2\ . \qquad (7)$$

Quando s_1 ed s_2 tendono insieme verso un dato valore di s, il baricentro tende a collocarsi sulla curva in modo che, mentre θ tende a π, i rapporti di l_1 ed l_2 a σ tendono ad $\frac{1}{2}$, e, poichè la curva è un'assintotica della superficie, t_1 e t_2 tendono a $-\frac{1}{r}$. Ne segue

$$\lim \frac{n_1}{\mathrm{sen}\theta} = -\frac{1}{r} \quad . \quad \lim \frac{n_2}{\mathrm{sen}\theta} = \frac{1}{r} \quad ,$$

e $\lim G = -\frac{1}{r^2}$, conformemente al teorema di Enneper. D'altra parte, se si osserva che la formola (4), limitata al primo termine, vale anche pèr le curve storte, si ottiene

$$\frac{1}{12\rho} = \lim \frac{l_1 l_2 \mathrm{sen}\theta}{\sigma^3} = \frac{1}{4} \lim \frac{\mathrm{sen}\theta}{\sigma}\ ;$$

quindi

$$\lim \frac{n_1}{\sigma} = -\frac{1}{3\rho r} \quad , \quad \lim \frac{n_2}{\sigma} = \frac{1}{3\rho r} \quad ,$$

vale a dire che gli sviluppi in serie delle curvature normali hanno la seguente forma:

$$n_1 = -\frac{\sigma}{3\rho r} + 4k_1\sigma^2 + \dots \quad , \quad n_2 = \frac{\sigma}{3\rho r} + 4k_2\sigma^2 + \dots$$

Se si conoscessero i coefficienti k, si avrebbe subito il valore della curvatura media della baricentrica lungo la curva considerata:

$$H = \lim \frac{1}{2}\,(N_1 + N_2) = 2(k_1 + k_2) \lim \frac{\sigma^2}{\mathrm{sen}^2\theta} = 18(k_1 + k_2)\,\rho^2\ .$$

Quindi si potrebbero costruire, in ogni punto della predetta curva, le linee di curvatura e le assintotiche dell'altro sistema, perchè dall'ultima relazione (6) si ricava $\cot\omega = Hr$. Ora dagli sviluppi delle curvature normali si deducono gli altri

$$\mathrm{sen}\varphi_1 = \frac{\sigma^2}{12\rho r} - k_1\sigma^3 + \dots \quad , \quad \mathrm{sen}\varphi_2 = \frac{\sigma^2}{12\rho r} + k_2\sigma^3 + \dots \qquad (8)$$

dai quali è più facile trarre i valori dei coefficienti k, perchè il significato geometrico delle φ permette di calcolare facilmente questi angoli servendosi di qualunque sistema di assi. Così in più modi si riesce ad ottenere

$$k_1 = -\frac{\rho^2 r^3}{120}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^3 r^4} \quad , \quad k_2 = \frac{\rho^6 r^5}{120}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^7 r^6} \quad ;$$

poi

$$H = \frac{3}{10}\rho^3\frac{d}{ds}\frac{1}{r\rho^2} \; .$$

È questo valore della curvatura media, lungo la data curva, che serve a distinguere la baricentrica fra le infinite superficie che ammettono la curva stessa come assintotica.

Altri sviluppi utili si possono dedurre dalle medesime formole. Così, per esempio, portando in (7) gli sviluppi (4) ed (8) si ottiene

$$G = -\frac{1}{r^2} - \frac{\sigma}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{r^2} - \ldots$$

In particolare si noti, fra le conseguenze di questa formola, che ogni curva a torsione costante determina sulla propria baricentrica una striscia di larghezza infinitesima, che si può considerare come staccata da una superficie pseudosferica. Un altro fatto che conviene segnalare si deduce dagli sviluppi

$$l_1 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{72\rho^2} - \frac{\sigma^4}{180}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \ldots \quad , \quad l_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma^3}{72\rho^2} - \frac{\sigma^4}{120}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} - \ldots ,$$

dai quali, osservando le (5), si trae

$$\cos\psi_1 = -1 + \frac{\sigma^2}{18\rho^2} + \frac{\sigma^3}{72}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \ldots \quad , \quad \cos\psi_2 = 1 - \frac{\sigma^2}{18\rho^2} - \frac{\sigma^3}{24}\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho^2} + \ldots \; ;$$

quindi

$$\lim\frac{\psi_1 - \pi}{\sigma} = \frac{1}{3\rho} \quad , \quad \lim\frac{\psi_2}{\sigma} = \frac{1}{3\rho} \; .$$

Ciò premesso, poichè χ_1 e χ_2 tendono ad annullarsi con σ, si ha

$$\lim g_1 = -\lim\frac{\sigma \operatorname{sen}\psi_1}{l_1^{\,2}} = \frac{4}{3\rho} \quad , \quad \lim g_2 = \lim\frac{\sigma \operatorname{sen}\psi_2}{l_2^{\,2}} = \frac{4}{3\rho} \; .$$

Dunque le linee d'inseguimento degli estremi degli archi, nei loro punti di contatto con la linea data, hanno la curvatura uguale ai $\frac{4}{3}$

della curvatura di questa linea, cioè doppia di quella della sezione fatta nella superficie baricentrica dal piano osculatore della curva, nel punto che si considera.

Lasciamo ai nostri giovani lettori la cura di proseguire lo studio delle superficie baricentriche, segnalando l'utilità che vi sarebbe a calcolare un altro termine negli sviluppi di H e di G, per poter decidere se, oltre l'elicoide, esistano altre baricentriche ad area minima, e se una baricentrica può avere la curvatura costante anche fuori della striscia determinata da una sua assintotica. Converrebbe poi trattare tutte le precedenti questioni da un punto di vista alquanto più generale, cioè ponendo fra i punti d'una superficie e gli archi d'una curva una corrispondenza tale, che i tre archi determinati da tre punti abbiano in linea retta i punti corrispondenti. Ciò avviene sempre quando agli archi si fanno corrispondere i baricentri, anche dopo aver distribuito masse, lungo la curva, con legge arbitraria.

Sui numeri transfiniti

Estratto d'una lettera di Georg Cantor a G. Vivanti - 13ten Dec. 1893

. . . . . Ich will mich nun heute mit jenen älteren Autoren beschäftigen, weil Sie mir schreiben, dass nach Ihrer Auffassung « die « Ordnungen des Unendlichwerdens der Functionen eine Klasse ein- « dimensionaler Grössen begründeten, welche unendlich kleine und « unendlich grosse Elemente einschliessen ».

Und Sie fügen hinzu:

« Es ist also ausser Zweifel, dass Ihre [d. h. meine] Behauptungeu « sich nicht auf den allgemeinsten Grössenbegriff beziehen können etc.»

Lassen Sie uns nun einmal zusehen, ob ich wirklich gegen den *allgemeinsten Grössenbegriff* gesündigt habe.

Schon vor nicht ganz fünfundzwanzig Jahren machte ich beim Erscheinen der ersten Auflage von Thomae's « Abriss einer Theorie der Complexen Functionen und der Thetafunctionen. Halle, bei Nebert » die Bemerkung (und ich wundere mich dass dieselbe nicht seitdem auch von Anderen gemacht worden ist), dass seine Einführung von Ordnungsgrössen des Null-, und Unendlichwerdens von Functionen, *die nicht wie eine Potenz* x^α *mit reellem, rationalen oder irrationalen Exponenten* α *Null oder Unendlich werden*, auf einer *flagranten petitio principii* beruht.

Ich habe die 2te Auflage dieses Werkes (vom Jahre 1873) vor mir, wo auf pag. 9 jene Ordnungsgrössen wie folgt eingeführt werden: (NB. statt x braucht er den Buchstaben δ)

« Lässt sich eine Zahl α von der Beschaffenheit finden, dass für abnehmende x: $\lim_{x=0} (\mathrm{f}(y+x) - \mathrm{f}(y) : x^\alpha)$ einer *endlichen von Null verschiedenen Zahl* A gleich wird, so kann α das Maass der Stetigkeit von $\mathrm{f}(y)$ an jener Stelle y genannt werden. Es bilden dann diese Maasse der Stetigkeit, oder, was dasselbe ist, die Ordnungen des Verschwindens einer Function ein *stetiges Grössengebiet einer Ausdehnung, welches unendlich viel dichter ist, als das Gebiet der in dieser Mannig-*

faltigkeit mitenthaltenen gemeinen reellen Zahlen, wenn man die Ordnung x^1 als Maasseinheit der Ordnungen nimmt, so dass x^α die α^{te} Ordnung ist und diese Ordnung ein bestimmtes Einzelnes (Element) in dieser Mannigfaltigkeit bedeutet. Lassen wir diese Ordnung der Zahl α entsprechen, so entspricht die Ordnung von $\frac{1}{\lg(x)}$ einer Zahl, die kleiner als jede angebbare Zahl und doch die Null nicht ist. »

Ich bleibe hierbei stehen, weil es die Grundlage für das Folgende im Thomaeschen Buche ist, und sage:
hier wird die *Voraussetzung* gemacht, dass es in einem hypothetisch gedachten erweiterten Zahlengebiete eine Grösse (Thomae bezeichnet sie mit lg; ich will sie j nennen) giebt, die sich als Ordnungsgrösse des Nullwerdens zu $\frac{1}{\lg(x)}$ genau ebenso verhält, wie sich die Grösse α zu x^α verhält.

Würde eine solche Grösse j existiren, so müsste sie kleiner sein, als jede noch so kleine Grösse des gemeinen reellen Grössengebiets.

Es hängt also die Berechtigung der Einführung dieser Grösse j *zunächst* von der Frage ab, ob es überhaupt lineare Grössen giebt, die nicht Null und doch kleiner als jede noch so kleine reelle Grösse sind, d. h. *ob es actual unendlich kleine Grössen resp. Segmente im Gebiete des Möglichen giebt.*

Ist diese Frage unbedingt zu verneinen (wie ich es bewiesen habe) so *darf unter keinen Umständen von Ordnungsgrössen des Unendlichkleinwerdens bei Functionen gesprochen werden, die nicht wie eine Potenz x^α Null werden, wo α eine positive reelle Grösse bedeutet.*

Während also *Thomae, Du Bois, Stolz* etc. etc. durch jene Betrachtung die Einführung der *infinitesimi* glauben rechtfertigen zu können, verhält es sich vielmehr in Wahrheit so, *dass ihre ganze Theorie von den neuen Ordnungsgrössen in der Luft schwebt oder vielmehr ein* Nonsens *ist, falls es im Gebiete des Möglichen (dies ist der Sinn, in welchem ich das Wort* « Natur » *im weitesten Sinne brauche) keine actual unendlich kleinen Grössen giebt.*

Sie sehen also, dass der *vitiöse Zirkel* im Gedankengange dieser Herren nichts zu wünschen übrig lässt.

Ich gehe aber *noch weiter* und *behaupte*:

Selbst wenn es in der weiten Natur, d. h. im Gebiete des Möglichen, actual unendlich kleine Grössen geben würde (was ja bekanntlich nicht der Fall ist), so würde es doch unter ihnen keine *solche Grösse j geben, wie sie Herr Thomae braucht.*

Denn diese Grösse j müsste ja die Eigenschaft haben, dass:

$$\lim_{x=0} \frac{1}{\lg(x)} : x^j = A$$

wäre, *wo A eine endliche von Null verschiedene reelle Grösse wäre.*

Da aber j kleiner wäre, als jede noch so kleine reelle Grösse, so lässt sich leicht zeigen, dass *fur jedes noch so kleine reelle x,* die Ungleichheit bestehten würde

$$x^j > \frac{1}{2}\,.$$

Denn denken wir uns die positive Grösse x als *gegeben*; so existirt unter *den reellen Grössen* immer eine *so kleine* Grösse δ, dass:

$$x^{\delta} > \frac{1}{2}\,;$$

da aber $j < \delta$, so müsste umsomehr auch $x^j > \frac{1}{2}$ sein.

Daher wäre

$$\lim_{x=0} \frac{1}{\lg(x)} : x^j = 0,$$

was der gemachten Annahme, dass A von Null verschieden ist, widerspricht.

Wollte man trotz alle dem die « Ordnungszahlen » von der Familie j noch *Grössen* heissen (was ich nicht mitmache, sondern Anderen überlasse) so müsste man sie nothwendig *papierene Grössen* nennen, weil sie, wie ich soeben gezeigt habe, gar keine andere Existenz haben als *auf dem Papiere ihrer Entdecker und Anhänger.*

Professor *Paul Du Bois Reymond* (und mit ihm Herr *Stolz*) macht sich aber noch eines andern Versehens schuldig, welches ihn zur Gründung seines « Infinitärcalcüls » verführt hat.

Denken wir uns unter x eine über alle Grenzen wachsende positive veränderliche Grösse und unter $f(x)$, $f_1(x)$, ... *monoton* (d. h. ohne Maxima und Minima) positiv in's Unendliche wachsende stetige Functionen von x.

Jeder solchen Function entspricht bekanntlich nach Du Bois Reymond eine bestimmte Ordnungsgrösse j, j_1, ... und diese Ordnungsgrössen bilden zusammen die « infinitäre Pantachie », von welcher unser Linearcontinuum nur ein schwacher Bestandtheil sein soll.

Es werden zwei Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ von ihm infinitär *gleich* genannt: $f(x) \asymp f_1(x)$ wenn $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ zwischen zwei endlichen von Null verschiedenen positiven Grenzen A u. B bleibt.

Es wird $f(x)$ infinitär kleiner als $f_1(x)$ genannt, in Zeichen $f(x) \prec f_1(x)$, wenn:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{f_1(x)} = 0$$

und es wird endlich $f(x)$ infinitär grösser als $f_1(x)$ gesetzt, in Zeichen $f(x) \succ f_1(x)$, wenn:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f_1(x)}{f(x)} = 0 .$$

Diesen drei Fallen entsprechend definirt er: $j = j_1$; $j < j_1$ und $j > j_1$.

Es lassen sich aber mit Leichtigkeit *monotone stetige* Functionen $f_1(x)$ bilden, die schon mit Bezug auf die einfachste Function $f(x) = x$ *keinem der drei von ihm statuirten Kriterien* des infinitären Gleich-, Kleiner- und Grössersein genügen, so dass von den zu ihnen gehörigen Ordnungsgrössen j_1 weder gesagt werden könnte, dass sie gleich 1, noch dass sie >1, noch dass sie <1 sind.

Kann man solche Dinge noch Grössen nennen?

Sie sehen also, dass auch die « infinitäre Pantachie » des Herrn *Du Bois Reymond* als papierene Grösse in den *Papierkorb* gehört!

Um Ihnen ein solches Beispiel monotoner stetiger Functionen $f_1(x)$ vorzuführen, betrachte ich den folgenden Hülfssatz (welchen Sie sich leicht beweisen werden) als zugestanden.

Sind

$$x_1 , x_2 , \ldots x_v , \ldots$$
$$y_1 , x_2 , \ldots y_v , \ldots$$

zwei unendliche Reihen reeller positiver Grössen, welche monoton mit v in's Unendliche wachsen, so dass:

$$x_{v+1} > x_v , \; y_{v+1} > y_v$$

und:

$$\lim_{v=\infty} \frac{1}{x_v} = \lim_{v=\infty} \frac{1}{y_v} = 0$$

so giebt es *monotone stetige mit Ableitungen beliebig hoher Ordnung* versehene Functionen $f_1(x)$, welche die Bedingung erfüllen, dass für jedes v:

$$f_1(x_v) = y_v .$$

Wenden Sie diesen Hülfssatz auf folgende zwei Reihen an:

$x_1=1$; $x_2=4$; $x_3=5$; $x_4=33$; $x_5=34$; $x_6=412$; $x_7=413$; $x_8=8265$;
$y_1=1$; $y_2=2$; $y_3=10$; $y_4=11$; $y_5=102$; $y_6=103$; $y_7=1652$; $y_8=1653$;

wobei das Gesetz dieser beiden Reihen in den folgenden Formeln liegt:

$$x_{2v+1}=x_{2v}+1\ ;\ y_{2v}=y_{2v-1}+1\ ;\ \frac{y_{2v}}{x_{2v}}=\frac{1}{v+1}\ ;\ \frac{y_{2v-1}}{x_{2v-1}}=v\ ,$$

so erhalten Sie eine monotone stetige Function $f_1(x)$, welche so beschaffen ist, dass:

$$\lim_{v=\infty}\frac{f_1(x_{2v})}{x_{2v}}=\lim_{v=\infty}\frac{x_{2v-1}}{f_1(x_{2v-1})}=0\,.$$

Der Quotient $\frac{f_1(x)}{x}$ nimmt also mit in's Unendliche wachsendem x sowohl Werthe an die kleiner sind, als jede noch so kleine, wie auch solche die grösser sind, als jede noch so grosse endliche Grösse.

Bin ich also im Unrecht, wenn ich die Thomae-Du Bois Reymond-Stolzschen infinitären Ordnungsgrössen auf eine Stufe mit den *kreisförmigen Quadraten* und *quadratförmigen Kreisen* stelle? Mit den actual unendlich kleinen Segmenten des Herrn Prof. *Veronese* sieht es aber leider nicht besser aus!

Ich kann Ihnen nur empfehlen sich das Buch *Fontenelle's* « Géomètrie de l'Infini » zu verschaffen, welches seiner geistvollen und inhaltreichen philosophischen Vorrede wegen volle Beachtung verdient; die mathematische Grundlage des Werkes ist aber durchaus *absurd*! Vergleichen Sie seine Theorie mit derjenigen des Herrn Veronese und Sie werden die Uebereinstimmung Beider bestätigt finden.

Lettera di Georg Cantor a G. Peano.

Herrn Professor Doct. G. Peano in Turin.

Halle a. d. S. 20 Juli 1895.

Sehr geehrter Herr College,

Die deutsche Bearbeitung der « Grundzüge der Geometrie » des Herrn Professors G. Veronese (Leipzig 1894, bei B. G. Teubner) setzt mich in die Lage, den Punct zu bezeichnen, aus welchem die *Unzulässigkeit* seiner transfiniten Zahlbildungen auf's Einleuchtendste hervorgeht.

Im 3ten Cap. der Einleitung § 45 (pag. 30) sagt er in der Def. II was er unter « Zahl oder Anzahl einer geordneten Gruppe » verstehen will. Es ist *genau Dasselbe,* was ich « Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge » nenne. (Zur Lehre vom Transfiniten, Halle 1890, pag. 71-74). Ich schliesse dort *mit absoluter Nothwendigkeit und ohne jede Hypothese* auf das folgende Kriterium der « Gleichheit: ».

« Zwei einfach geordnete Mengen haben dann und nur dann einen und denselben Ordnungstypus, wenn sie « ähnlich » sind ».

Herr Veronese glaubt seinerseits dieser Bedingung einen *Zuzatz* geben zu müssen, indem er sagt (pag. 31) « Zahlen, deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen (NB. « Aehnlichkeit ») *und von denen die eine nicht Theil der andern oder einem Theil der andern gleich ist,* sind gleich ».

Hierdurch wird aber seine Definition *völlig nichts sagend* und ein *monströser Cirkel.*

Was heisst denn in jenem Zusatz, dass die eine Zahl *keinem Theil der andern gleich* sein soll?

Um diese Frage zu beantworten, muss man doch *vorher* wissen, *wann* zwei Zahlen gleich oder ungleich sind!

Es setzt also seine Definition der Gleichheit eine Definition der Gleichheit voraus, die wiederum eine Definition der Gleichheit voraussetzt, bei welcher man von Neuem wissen muss, was gleich ist, u. s. w., u. s. w. in infinitum.

Da hiernach Herr Veronese *durch seinen willkürlichen Zusatz* das unentberliche Fundament für die Vergleichung von Zahlen *freiwillig preisgegeben hat,* so ist es nicht mehr verwunderlich, wenn er seinen pseudo-transfiniten Zahlen im Weiteren Eigenschaften zuschreibt, die sie aus dem einfachen Grunde nicht besitzen können, weil sie selbst keinerlei Existenz, es sei denn auf dem Papiere, haben. Es fehlt daher auch *allen Folgerungen,* welche er an *seine* pseudo-transfiniten Zahlbildungen knüpft, die wissenschaftliche Berechtigung.

Genehmigen Sie, Herr College den Ausdruck meiner Hochachtung.

Georg Cantor.

Sull'incommensurabilità, secondo il Prof. D. Gambioli, e su certi libri di testo

Appunti critici di E. De-Amicis, *ad Alessandria*

Poichè il *Periodico di Matematica* che si pubblica a Roma è destinato non solo agli insegnanti, ma anche agli allievi delle scuole sècondarie, così ritengo doveroso porre in guardia questi ultimi contro un errore, veramente non piccolo, che essi hanno potuto leggere nell'articolo del prof. D. Gambioli « *Sull'incommensurabilità di due grandezze* », inserito nel fascicolo Marzo-Aprile 1895 del suddetto *Periodico*, ove in sostanza vien detto che *i quadrati dei numeri irrazionali sono* SEMPRE *numeri irrazionali.*

E poichè inoltre è risaputo che gli scritti di matematica che vengono alla luce in giornali di carattere scientifico-didattico, debbono non solamente contenere qualche nuovo risultato, se non sostanziale almeno formale, ma essere eziandio modelli di precisione, proprietà e rigore, così credo non inutile a tale riguardo un po' di recensione dell'articolo medesimo, tanto più che questo mi porgerà occasione a parlare come devesi di certi libri di testo.

Incomincio pertanto col seguente confronto:

Teorema. — *Se a e b sono due grandezze omogenee, delle quali $b > a$ e sia*

$$[1] \quad \frac{b}{a} = q_0 + \frac{r_0}{a}, \quad \frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0}, \quad \frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}, \ldots \frac{b}{r_{n-1}} = q_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}, \ldots$$

senza che si giunga ad ottenere $r_n = 0$, si avrà $\frac{a}{b} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{|q_n}$;

Se A *e* B *sono due numeri interi qualunque che si dividono l'uno per l'altro,* P *essendo il quoziente e* R *il resto, si avrà*

$$\frac{B}{A} = P + \frac{R}{A}.$$

Facciamo ancora

$$\frac{B}{R} = P_1 + \frac{R_1}{R}, \qquad \frac{B}{R_1} = P_2 + \frac{R_2}{R_1},$$

e così di seguito fino a che si trovi

significando col simbolo $|q_n$ *il prodotto* $q_0\, q_1 \cdots q_n$.

DIMOSTRAZIONE. — Dalle [1] si ricava

[2] $b=aq_0+r_0\,,\quad b=r_0q_1+r_1\,,$
$b=r_1q_2+r_n\,,\ \ldots\ b=r_{n-2}q_{n-1}+r_{n-1}\,,$
$b=r_{n-1}q_n+r_n\,,\ \ldots,$

quindi

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{r_0}{b},\quad \frac{r_0}{b}=\frac{1}{q_1}-\frac{r_1}{bq_1},$$
$$\frac{r_1}{b}=\frac{1}{q_2}-\frac{r_2}{bq_2},\ldots\ \frac{r_{n-2}}{b}=\frac{1}{q_{n-1}}-\frac{r_{n-1}}{bq_{n-1}},$$
$$\frac{r_{n-1}}{b}=\frac{1}{q_n}-\frac{r_n}{bq_n},\ \ldots$$

Si dividano queste eguaglianze, incominciando dalla seconda, ordinatamente per q_0, q_0q_1, ... $q_0q_1q_2\cdots q_{n-2}$, $q_0q_1q_2\cdots q_{n-1}$, ... poi si addizionino le nuove eguaglianze ottenute coll'avvertenza di cambiare i segni a quelle di posto pari.

Avremo

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}\cdots$$
$$\pm\frac{1}{q_1q_2\cdots q_{n-1}}\mp\frac{1}{q_0q_1\cdots q_n}\ \ldots\ \text{c.d.d.}$$

una divisione che riesca; provare che si ha:

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{P}-\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{PP_1P_2}-\frac{1}{PP_1P_2P_3}+$$

... Avremo per ipotesi il seguente sistema di equazioni

$$B=A\times P+R\,,\ B=R\times P_1+R_1\,,$$
$$B=R_1\times P_2+R_2\,,\ \ldots,$$
$$B=R_{n-1}\times P_n+R_n\,,\ B=R_n\times P_{n+1}\,.$$

Da queste equazioni ottengo le altre

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{P}-\frac{R}{BP},\quad \frac{R}{B}=\frac{1}{P_1}-\frac{R_1}{BP_1},$$
$$\frac{R_1}{B}=\frac{1}{P_2}-\frac{R_2}{BP_2},\ \ldots,$$
$$\frac{R_{n-1}}{B}=\frac{1}{P_n}-\frac{R_n}{BP_n},\quad \frac{R_n}{B}=\frac{1}{P_{n+1}}\,.$$

Dividiamo, cominciando dalla seconda, queste equazioni per P, PP_1, PP_1P_2, ..., $PP_1P_2\ldots P_n$; quindi sommiamo le nuove equazioni, avendo l'avvertenza di cangiare i segni a quelle che occupano un posto pari ed otterremo:

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{P}-\frac{1}{PP_1}+\frac{1}{PP_1P_2}-\ldots$$
$$\pm\frac{1}{PP_1P_2\ldots P_n}\,.$$

Le parole a destra si leggono a pag. 136 e 137 del *Soluzionario* degli esercizi dell'*Aritmetica* di BERTRAND (D. FONTEBASSO, Genova 1871), e con quelle a sinistra il prof. GAMBIOLI dà principio al suo articolo sull'incommensurabilità.

Nell'ultima eguaglianza a destra in luogo di P_n si deve leggere P_{n+1}; e la corrispondente di sinistra deve essere rettificata così:

$$[2'] \quad \frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\ldots\pm\frac{1}{q_0q_1\cdots q_{n-1}}\mp\frac{1}{q_0q_1\cdots q_n}\pm\frac{r_n}{bq_0q_1\cdots q_n}\,.$$

E poichè quest'ultimo termine non ha sempre di necessità per limite 0,

a questa identità finita non è lecito sostituire senz'altro la relazione

$$[2''] \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} - \ldots \pm \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_{n-1}} \mp \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n} \pm \ldots,$$

cioè la tesi del *teorema* enunciato dall'autore. Così, per esempio, sempre nell'ipotesi $b > a$, potremo anche soddisfare le [1] prendendo i numeri $q_0, q_1, q_2, \ldots$ tutti eguali ad 1, *senza che si giunga ad ottenere* $r_n = 0$, poichè risulterà

$$r_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}(b - a) + \frac{1 - (-1)^n}{2} a,$$

cioè $r_0 = b - a$, $r_1 = a$, $r_2 = b - a$, $r_3 = a$, ecc.; ed in questo caso l'espressione $\frac{r_n}{bq_0 q_1 \cdots q_n}$ anzichè tendere a 0, assumerà alternativamente i valori $\frac{a}{b}$ e $\frac{b-a}{b}$, secondochè n è dispari o pari; e qui la [2'] ci darà $\frac{a}{b} = 1 - 1 + 1 - \ldots \pm 1 \mp 1 \pm \frac{r_n}{b}$, vale a dire $\frac{a}{b} = 1 - \frac{b-a}{b}$ se n è pari e $\frac{a}{b} = 0 + \frac{a}{b}$ se n è dispari; invece la [2''] ci condurrebbe al risultato assurdo $\frac{a}{b} = 1 - 1 + 1 - \ldots \pm 1 \mp 1 \pm \ldots$ E pertanto, fino a che non si aggiungano condizioni per le quali l'espressione $\frac{r_n}{bq_0 q_1 \cdots q_n}$ (termine complementare o resto) debba avere per limite 0, quel *teorema* non regge.

L'autore dà poi la proposizione « *Supponendo nelle* [1] $r_0 < a$, $r_1 < r_0$, $r_2 < r_1 \ldots$, *i quozienti* $q_0, q_1, q_2, \ldots$ *vanno di continuo aumentando* » e la chiama COROLLARIO del *teorema* predetto, mentre invece quella non può in alcun modo considerarsi come conseguenza della tesi di questo. E di questo *teorema* chiama pure COROLLARIO la proposizione « *Le due grandezze a e b sono incommensurabili* »; ed ancora impropriamente, poichè questa *tesi senza ipotesi* viene provata dal prof. GAMBIOLI, non già servendosi della tesi del teorema suddetto, come per via peraltro non breve sarebbe possibile, ma con metodo certamente più sbrigativo, mediante le seguenti parole a sinistra, le quali colla tesi di quel *teorema* non hanno niente a vedere [1].

Supponiamo infatti che a e b abbiano una comune misura c. Dalle [2] si vede che i resti r_0, r_1, r_2, ... sarebbero tutti multipli di c; di guisa che si avrebbe

$$r_0 = \alpha_0 \cdot c\,,\ r_1 = \alpha_1 \cdot c\,,\ r_2 = \alpha_2 \cdot c\,, \ldots$$

con α_1, α_2, α_3,... numeri interi, e poichè $\alpha_0 c > \alpha_1 c > \alpha_2 c > \ldots$ risulterebbe $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$

Ma una serie di numeri interi decrescenti deve contenere il termine zero, dunque uno dei resti dovrebbe essere zero; ciò che contraddice all'ipotesi.

..... supponiamo che m sia una comune misura di A e B ... si prova facilmente che i resti R, R_1, R_2, ... debbono essere tutti multipli di m; in guisa che, indicando con μ, μ_1, μ_2, ... numeri interi deve aversi $R = \mu m$, $R_1 = \mu_1 m$, $R_2 \mu_2 m$,... e poichè i resti ... formano una serie decrescente, dovrà aversi $\mu m > \mu_1 m > \mu_2 m > \ldots$ ovvero $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \ldots$ Ma se una serie di numeri interi decresce continuamente, uno di essi deve ... essere zero; dunque uno dei resti dovrebbe essere zero, lo che contraddice all'ipotesi...

Le parole a destra si leggono a pag. 383 e 384 della versione italiana della *Geometria* di AMIOT (G. NOVI, Firenze 1880).

In seguito l'autore vuol dimostrare la convergenza della serie

$$[2'''] \qquad \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} - \frac{1}{q_0 q_1 q_2 q_3} + \ldots$$

E, per vero dire, se q_0, q_1, q_2, ... è una successione di infiniti numeri, ottenuti con legge determinata, differenti da 0, e tali che, ad un certo punto, uno di essi sia maggiore di 1 e non maggiore di nessuno dei successivi, la serie [2'''] è convergente, e, se inoltre si verificano le [2], ha per somma il rapporto $\frac{a}{b}$ (2).

Ma l'autore, al quale vorremmo raccomandare il motto « *Amica brevitas, sed magis amica veritas* », enuncia qui pure una tesi senza ipotesi e si esprime così: « *La serie*

$$[3] \qquad S_n = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} - \ldots (-1)^n \frac{1}{q_0 q_1 q_2 \cdots q_n}$$

è convergente ». Ora la formola [3] non è una serie, ma un'eguaglianza (che serve a definire il simbolo S_n); inoltre il secondo membro di quest'eguaglianza non è una serie, ma un polinomio (di $n+1$ termini); e quand'anche, del resto, si volesse chiamar serie un polinomio, che cosa significherebbe il dire che *un polinomio è convergente*? Nè il lettore può credere che l'autore tacitamente supponga, nella [3], $n = \infty$,

poichè questi al contrario, subito dopo di aver conchiuso « *La serie* [3] *è dunque convergente* », passa ad un altro capoverso e lo incomincia così : « *Nella* [3] SUPPONGASI *che* n VADA ALL'INFINITO *e* PONIAMO S_∞ *sotto la forma di frazione continua illimitata.* DICO *che si ha identicamente*

$$[4] \qquad S_\infty = \frac{1}{q_0} \dot{+} \frac{q_0}{q_1 - 1} \dot{+} \frac{q_1}{q_2 - 1} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{q_s}{q_{s+1} - 1} \dot{+} \ldots \text{»}$$

E pur troppo a questi appunti sulla frase colla quale l'autore enuncia che la serie [2‴] è convergente, converrebbe aggiungerne di più gravi riguardo al ragionamento col quale egli intende provare tale convergenza; ragionamento che non regge perchè è sostanzialmente basato sulla proposizione « *Una serie a termini di segno qualunque è convergente se la somma dei primi* n *termini si mantiene, al variare di* n, *minore di una quantità finita* », della cui insussistenza è facile convincersi, considerando, per esempio, nuovamente la serie non convergente $1-1+1-1+\ldots$, nella quale la somma dei primi n termini è 0 od 1 e perciò non supera mai il numero 1. La dimostrazione tentata dall'autore, supponendo, come questi sottintende, che q_0 sia positivo e q_1 sia maggiore di 1 e minore di tutti gli infiniti numeri $q_2, q_3, q_4, \ldots$ può rettificarsi così : essendo $q_1 > 1$ la serie geometrica $1+\frac{1}{q_1}+\left(\frac{1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{q_1}\right)^3+\ldots$ è convergente; di qui, pel teorema « *Se una serie a termini positivi ha i suoi termini, da un certo termine in poi, minori dei corrispondenti d'un'altra serie a termini positivi che si sa essere convergente, sarà pure convergente la serie proposta* » e perchè q_2, q_3, q_4, ... sono tutti maggiori di q_1, segue la convergenza della serie $1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} + \ldots$; di qui poi, pel teorema « *Se una serie è convergente, e si moltiplicano i suoi termini per una quantità* a, *la nuova serie sarà pure convergente* » e perchè q_0 è differente da 0, segue la convergenza della serie $\frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2 q_3} + \ldots$; e finalmente di qui, pel teorema « *Una serie a termini di segno qualunque è convergente se è convergente la serie formata coi valori assoluti dei termini* » e perchè gli infiniti numeri $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$ sono tutti positivi, si conclude che la serie [2‴] è convergente (anzi è *assolutamente convergente*: vedi E. CESÀRO, *Corso di Analisi Algebrica*, cap. XXV - Torino, 1894).

I tre teoremi ora richiamati si leggono rispettivamente a pag. 270, 268, 278 del vol. I delle *Lezioni di Analisi infinitesimale* del prof.

G. Peano (Torino, 1893); ed alla stessa pag. 278 si trova il teorema « *Una serie a termini di segno alternato, decrescenti continuamente e indefinitamente, è convergente* », dal quale, tenendo conto delle suddette ipotesi relative agli infiniti numeri q_0, q_1, q_2, ..., l'autore avrebbe potuto immediatamente concludere la convergenza della serie [2‴]; ammenochè non avesse preferito dedurla dalla identità finita [2′], ammettendo pertanto le [2], ed osservando che la [2′] può scriversi:

$$[2^{IV}]\quad \frac{a}{b} \mp \frac{r_n}{bq_0q_1\cdots q_n} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0q_1} + \frac{1}{q_0q_1q_2} - \ldots \pm \frac{1}{q_0q_1\cdots q_{n-1}} \mp \frac{1}{q_0q_1\cdots q_n},$$

e che per $n=\infty$, sempre in virtù delle ipotesi relative agli infiniti numeri q_0, q_1, q_2, ... enunciati più sopra, l'espressione $\frac{r_n}{bq_0q_1\cdots q_n}$ (ove $r_n<b$) tende a 0, e perciò il polinomio del secondo membro della [2^{IV}] tende, come il suo primo membro, ad $\frac{a}{b}$; ossia la serie in questione, $\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0q_1} + \frac{1}{q_0q_1q_2} - \frac{1}{q_0q_1q_2q_3} + \ldots$, è convergente (ed ha per somma $\frac{a}{b}$).

La trasformazione d'una serie in frazione continua pare dovuta ad Eulero (*Opuscula analytica*, a. 1785) e si deduce dall'identità finita:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n = \cfrac{u_1}{1-\cfrac{u_2:u_1}{(u_1+u_2):u_1-\cfrac{u_3:u_2}{(u_2+u_3):u_2-\ddots-\cfrac{u_n:u_{n-1}}{(u_{n-1}+u_n):u_{n-1}}}}}$$

alla quale si può dare la forma:

$$v_1-v_2+v_3-\ldots\pm v_n = \cfrac{v_1}{1+\cfrac{v_2}{v_1-v_2+\cfrac{v_1v_3}{v_2-v_3+\ddots+\cfrac{v_{n-2}\,v_n}{v_{n-1}-v_n}}}}$$

Di qui segue tosto:

$$\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\ldots\pm\frac{1}{q_0q_1q_2\cdots q_{n-1}}=\cfrac{1}{q_0+\cfrac{q_0}{q_1-1+\cfrac{q_1}{q_2-1+\ddots+\cfrac{q_{n-2}}{q_{n-1}-1}}}}.$$

E di qui facendo crescere n indefinitamente, tenendo conto delle solite ipotesi dalle quali segue la convergenza della serie [2‴], ed avendo pure presente il concetto di convergenza e valore di una frazione continua (vedi S. PINCHERLE, *Analisi Algebrica*, cap. X - Milano, 1893), si ottiene la [4] cioè l'identità:

$$\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\ldots=\cfrac{1}{q_0+\cfrac{q_0}{q_1-1+\cfrac{q_1}{q_2-1+\ddots}}}$$

che il lettore può vedere a pag. 46 degli *Elementi di Matematiche* di G. INGHIRAMI (Firenze, 1841), applicata ad eleganti espressioni di $\frac{1}{e}$ e di e, e che viene dimostrata induttivamente dal GAMBIOLI; il quale poi non trova ozioso dimostrare eziandio, ispirandosi a LEGENDRE (*Èléments de Géométrie*, Note IV, Lemme I), che la frazione continua che costituisce il secondo membro di tale identità esprime un numero *irrazionale*, proprio come la serie che ne costituisce il primo membro e che esprime, conforme si è detto, il rapporto di due grandezze *incommensurabili* fra loro.

Finalmente, dimenticando di avere a fronte una frazione continua *non ordinaria* e di non potere pertanto applicare il noto teorema sulla periodicità dei quozienti, della frazione continua *ordinaria* che esprime la radice quadrata di un numero *intero* e positivo, il quale non sia il quadrato di un numero intero, l'autore conclude « *Inoltre la frazione continua medesima non potendo essere periodica poichè le q vanno sempre aumentando,* IL SUO VALORE NON È LA RADICE QUADRATA DI UN NUMERO RAZIONALE ».

Adunque, per esempio, se a è il lato di un quadrato e b ne è la diagonale, *incommensurabile con a*, potremo stabilire le [1], esprimere il rapporto $\frac{a}{b}$ mediante la serie [2‴], trasformare questa serie nella sovrascritta frazione continua, e poi concludere col prof. GAMBIOLI che

il suo valore, CIOÈ $\sqrt{\frac{1}{2}}$, *non è la radice quadrata di un numero razionale*; e pertanto $\frac{1}{2}$ non sarebbe più un numero razionale. E si comprende agevolmente come, applicando ad un altro numero irrazionale qualunque un procedimento analogo a quello ora tenuto per $\sqrt{\frac{1}{2}}$, si potrebbe parimenti concludere che quel numero irrazionale non può essere la radice quadrata di un numero razionale; in altri termini: *i quadrati dei numeri irrazionali sono* SEMPRE *numeri irrazionali !*

Eppure l'egregio prof. GAMBIOLI non ignora che nel primo quarto del secolo corrente c'è stato chi, aprendo fin d'allora la via a LINDEMANN ed HERMITE, ha voluto dimostrare che « *Le quarré du rapport de la circonference au diametre est un nombre irrationel* », dopo che Lambert, già nel 1761, aveva dimostrata l'irrazionalità di π (3).

L'errore, veramente non piccolo, del professore di matematica di una delle RR. Scuole tecniche di Milano, richiama quello, certamente più grave sotto qualsiasi aspetto, del professore di matematica di uno dei RR. Licei di Roma, il sig. O. TOGNOLI; il quale, nella sua nota « *Sull'incommensurabilità del numero* π », a pag. 114 e 115 del suo *libro di testo* « EUCLIDE. *Libro sesto.* Seconda edizione *riveduta e migliorata* (Editore LOESCHER) », intende dimostrare il teorema di Lambert colle parole seguenti :

« Così si dedurranno le due serie di numeri tutti *commensurabili*:

« a')..... $\begin{matrix} \lambda^{(p)}, & \lambda^{(p')}, & \lambda^{(p'')}, & \ldots\ldots, \\ \mu^{(p)}, & \mu^{(p')}, & \mu^{(p'')}, & \ldots\ldots, \end{matrix}$ e tali, che tutti quelli della prima serie « andranno continuamente crescendo a partire dal primo, e saranno « tutti minori del numero $\frac{\text{Circonf.R}}{2\text{R}}$; quelli della seconda serie andranno « tutti decrescendo a partire dal primo, e saranno tutti maggiori del « numero $\frac{\text{Circon.R}}{2\text{R}}$. Le differenze fra due numeri che occupano il « medesimo posto nelle serie a'), senza mai potersi annullare, andranno « però continuamente decrescendo; e si finirà sempre per ottenerne *una,* « che sia minore di *un* numero assegnabile arbitrariamente piccolo. « DUNQUE *le due serie* a') *definiscono un numero incommensurabile,* « che è necessariamente uguale a $\frac{\text{Circonf.R}}{2\text{R}}$, *ovvero* al numero π. *Di* « *qui* risulta la *verità* del *teorema*: Il valore comune dei rapporti « $\frac{\text{Circonf.R}}{2\text{R}}$, $\frac{\text{Cer.R}}{\text{R}^2}$, *è espresso da un numero incommensurabile.* »

Tal metodo sarebbe davvero sbrigativo: senonchè, applicandolo per esempio alle due successioni $\begin{cases} 0{,}6\,;\ 0{,}66\,;\ 0{,}666\,;\ \ldots.. \\ 0{,}7\,;\ 0{,}67\,;\ 0{,}667\,;\ \ldots.. \end{cases}$, si dovrebbe, alla stessa stregua, concludere che esse pure individuano un numero irrazionale, *che sarebbe poi precisamente* $\frac{2}{3}$!

E dopo questi errori intorno al delicato argomento dei numeri irrazionali, da parte di professori di importanti scuole governative delle nostre città capitali, autori e traduttori di memorie scientifiche e di libri di testo ([4]), che dovremmo dire dei vigenti *Programmi* che degli irrazionali, e delle operazioni ad essi relative, prescrivono lo studio nella seconda classe degli istituti tecnici, la quale, per l'età degli alunni, corrisponde — lo si noti — alla quinta classe ginnasiale?

NOTE.

([1]) Il prof. GAMBIOLI non è solo, fra' suoi colleghi, ad adoperare impropriamente la parola *corollario*. Il sig. ing. A. MUCCHI, professore di matematica in una delle RR. Scuole tecniche di Roma, nei suoi *Elementi di Geometria* (Editore Paravia, 1895), a pag. 48 dà come *corollario* del teorema « *Ogni diametro divide la circonferenza ed il circolo in due parti eguali* » la doppia proposizione « *Due circonferenze descritte con raggi eguali sono eguali, ed inversamente* ». Poco dopo (pag. 49 e 50) scrive: « TEOREMA. — *In un medesimo circolo od in circoli eguali:* 1° *se due corde sono eguali, sono sottese* da *angoli al centro eguali;* 2° *se due corde sono diseguali, la maggiore è sottesa* dall'*angolo maggiore* »; dà la dimostrazione, e prosegue: « COROLLARIO. — Con analogo ragionamento si prova il teorema inverso, cioè: ... ». E, procedendo *per esclusione*, potrebbe questo *teorema inverso* ottenersi appunto come *corollario* del *teorema diretto*; ma tale, qui, non può più dirlo l'autore, dal momento che lo considera invece come *conseguenza di un ragionamento analogo.* A pag. 120 dà come corollari del teorema « *Se una retta* AB *è perpendicolare a due rette* BC, BD *condotte pel suo piede* B *in un piano* PQ, *è pure perpendicolare a qualunque altra retta* BE *tirata pel suo piede nel piano, e quindi perpendicolare al piano stesso* », le due proposizioni: « *Da un punto dato in un piano, e da una stessa parte di esso, si può innalzare una sola perpendicolare a questo piano* » e « *Da un punto dato fuori di un piano si può abbassare una sola perpendicolare* SOPRA *questo piano* ». Raccomando al benigno lettore *il piano* PQ, *la retta* BE *tirata*

pel suo *piede nel piano, l'innalzare* e *l'abbassare*, e domando al medesimo, anche coll'appoggio delle dimostrazioni dell'autore, se queste due proposizioni sono corollari del teorema suddetto o non piuttosto della definizione di perpendicolarità fra retta e piano e delle due proposizioni planimetriche corrispondenti. É poi degna di speciale considerazione la proposizione « *I circoli*, POTENDOSI RIGUARDARE COME POLIGONI REGOLARI DI UN NUMERO INFINITO DI LATI, *sono figure simili* », che, *naturalmente*, l'autore pone (pag. 103) fra i *corollari* della definizione « Due *poligoni* diconsi *simili* ecc. ». Ma, di grazia, prof. A. Mucchi, come fate voi a dimostrare che *l'infinito intero è un numero pari*? Perchè? Perchè senza di ciò i *vostri circoli perdono il centro*; diffatti è noto che, mentre i poligoni regolari parilateri hanno il *centro* (punto di mezzo di tutte le loro corde passanti per esso), quelli disparilateri sono privi di tal centro. E del resto come conciliate la vostra asserzione col fatto che le circonferenze sono linee curve e i poligoni non lo sono? Essa, al certo, non concorda col *principio di contraddizione*, ma armonizza perfettamente con quella che segue (pag. 145): « LA SFERA PUÒ CONSIDERARSI COME COMPOSTA DI INFINITE PIRAMIDI AVENTI LE BASI SULLA SUPERFICIE DELLA SFERA E I VERTICI NEL CENTRO DI QUESTA ». Si noti che l'autore non parla, nè qui, nè altrove, di piramidi sferiche; si tratta dunque precisamente di *piramidi ordinarie, poliedriche, aventi le basi* (PIANE) *sulla superficie* SFERICA! Di qui poi l'autore deduce « *il volume di una sfera si ottiene moltiplicando il cubo del suo raggio per i* $^4/_3$ *del* RAPPORTO. » Evvia! Per un libro di testo, che in pochi anni è già arrivato alla sua *decima edizione*, mi pare davvero che basti.

(2) Al rapporto $\frac{a}{b}$, sempre nell'ipotesi $a < b$, si possono anche dare le espressioni seguenti molto analoghe alla [2‴]: $\frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{1}{Q_2 Q_3} + \frac{1}{Q_3 Q_4} - \frac{1}{Q_4 Q_5} + \cdots$; $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1 m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_2 m_3 m_4} + \cdots$; $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \cdots$; nelle quali, rispettivamente, Q_1, Q_2,... sono i denominatori, formati colla nota legge ricorrente, delle ridotte della frazione continua *ordinaria* equivalente ad $\frac{a}{b}$ (S. PINCHERLE, *Analisi Algebrica*, Milano 1893); m_1, m_2,... sono numeri interi, convenientemente determinati tutti positivi (V. MOLLAME, *Espressione del rapporto fra due stati di una grandezza*, Periodico di Scienze matematiche, Roma 1873) od anche alcuni positivi ed altri negativi (E. HEIS, *Raccolta di esercizi*, Torino 1876), e u_1, u_2,... sono numeri interi positivi, soddisfacenti alle condizioni $u_1 > 1$, $u_n > u_{n-1} (u_{n-1} - 1)$, e, quando l'espressione debba continuare indefinitamente, anche alla condizione $u_n > u_{n-1} (u_{n-1} - 1) + 1$ per infiniti valori di n (vedi la bella e notevolissima memoria « *Sulla determinazione dei numeri reali mediante somme e prodotti* » del prof. F. GIUDICE, inserita negli *Atti della R. Accademia delle Scienze* — Torino 1894 —, e spe-

cialmente interessante per chi voglia trattare la teoria dei numeri irrazionali col metodo di WEIERSTRASS, cioè delle *parti integranti;* metodo meno comune, ma, a mio credere, se convenientemente esposto, didatticamente preferibile a quelli di CANTOR e di DEDEKIND, cioè dei *limiti* e delle *classi*, come più naturale, altrettanto rigoroso e più pratico).

(3) È noto che i signori LINDEMANN ed HERMITE hanno recentemente, rispettivamente dimostrato che gli irrazionali π ed e sono *numeri trascendenti*, cioè, come solitamente si dice, non sono *numeri algebrici*. Per π siffatta irrazionalità trascendentale era già stata intuita da Legendre, il quale lasciò scritto: « *Il est probable que le nombre π n'est pas même compris dans les irrationnelles algébriques, c'est-à-dire, qu'il ne peut être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coëfficients sont rationnels: mais il paraît tres-difficile de démontrer rigoureusement cette proposition; nous pouvons seulement faire voire que le quarré de π est encore un nombre irrationel.* »

(4) Il prof. GAMBIOLI è uno dei traduttori di quegli *Elementi di Geometria metrica* del dott. O. SCHLOMILCH, nei quali (Paravia e comp., 1891, pag. 14 e 15), a proposito della teoria delle parallele, si legge una *dimostrazione* che può essere riassunta così: « Si ha: $\begin{cases} \textit{direzione di } OA = \textit{direzione di } O'A' \\ \textit{direzione di } OC = \textit{direzione di } O'C' \end{cases}$; di qui, sottraendo membro a membro: *angolo* AOC = *angolo* A'O'C'; cioè: *Gli angoli corrispondenti sono eguali fra loro* »; e giova notare che l'angolo vi è definito così (pag. 8): « *Siano ora le rette effettivamente prolungate in modo da incontrarsi in un punto; si forma* IN QUESTO PUNTO *una nuova figura geometrica:* l'ANGOLO. ». Serva questo piccolo saggio a dare idea del metodo, *facile, chiaro, piano, alquanto originale: e pratico* (vedi prefazione), adottato in questo trattato tedesco, che i traduttori vorrebbero sostituire, almeno negli Istituti tecnici, a quelli di SANNIA e D'OVIDIO, di DE PAOLIS, di LAZZERI e BASSANI e di F. GIUDICE (italianamente e originalmente concepiti, scientificamente e didatticamente scritti), dicendo che un tal metodo *è quello che si segue* (?!?) *nei nostri Istituti tecnici*. Così, almeno , i traduttori hanno scritto nella prefazione; ove si legge pure quanto segue: « *È un fatto che la geometria euclidea per l'eccellenza del metodo è da preferirsi alla Geometria del Legendre. Ma è pur vero che gli studi in Italia... seguono due indirizzi differenti; quindi... l'insegnamento matematico puramente classico deve essere ben diverso dall'insegnamento matematico... professionale. Ecco perchè per i Licei si troveranno ottimi gli Elementi di Euclide e negli Istituti tecnici invece dovrà addottarsi una Geometria svolta con un metodo puramente pratico* ». Ora, prescindendo che la *geometria euclidea* è quella in cui, direttamente o indirettamente, si fa uso del *postulato di Euclide*, e che perciò è euclidea, non solo quella di Legendre, ma finanche (pare impossibile) quella del dott. O. SCHLÖMILCH, e l'eguaglianza *angolo* AOC = *angolo* A'O'C' è là a testimoniarlo, io non arriverò mai a comprendere come si possa far distinzione, come i traduttori vorrebbero, fra *matematica clas-*

sica e *matematica tecnica*, almeno per iscuole, quali i nostri Licei e le nostre Sezioni fisico-matematiche degli Istituti tecnici, le quali, per quanto distinte, pure conducono ad unica meta: l'Università; scuole insomma entrambe d'istruzione secondaria *di pari grado*, e di coltura, classica o tecnica, ma sempre ecletica, e per le quali la matematica deve precipuamente considerarsi come suprema ginnastica logica, — poesia della ragione —. I sig. Gambioli & comp., istituendo l'assurda distinzione suddetta, vorrebbero invece nei Licei un ammaestramento scientifico, e negli Istituti tecnici un insegnamento puramente pratico; nei primi dimostrazioni, nei secondi informazioni; là ragionamento, qui empirismo.

Voglio però terminare questa nota, e così chiudere questo scritto, chiedendo venia a chi di ragione per la forma alquanto vivace di questi miei appunti, i quali peraltro non sono intesi in verun modo ad offendere alcuno. Gli errori da me rilevati non sono forse che semplici sviste, e, del resto, non tolgono merito a chicchessia. Ed infatti qual'è il docente e lo scrittore di matematica, alquanto provetto e studioso, che, perfezionati di anno in anno i metodi d'insegnamento, di esposizione e di investigazione scientifica, non abbia poi dovuto confessare, se non ad altri, a se stesso d'aver taluna volta dato dimostrazioni che non reggevano e financo proposizioni insussistenti? E, dopo tutto, come è preferibile il soffrire al non esistere (tale almeno, dice la leggenda, è il parere dell'angelo ribelle), così ai molti insegnanti che prudentemente si celano nel comodo far nulla, sono da anteporsi quei pochi che, anche affrontando critiche talvolta involontariamente pungenti, a seconda delle loro forze pubblicano e lavorano.

Spinetta-Marengo, Giugno 1895.

Dr G. Frege. — *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.* Erster Band, Jena, 1893, pag. XXXII+254.

In questo libro si dimostrano le proposizioni fondamentali dell'Aritmetica, cioè quelle riferentisi al concetto di numero intero, alla numerazione, all'infinito, ecc. Non sono considerati nel volume i numeri negativi, nè i fratti; nè ancora è trattata l'addizione degli interi.

Ma ciò che rende importante questo libro è la forma data a queste dimostrazioni, forma che l'A. chiama *ideografia* (Begriffschrift), e che consiste nell'indicare con segni aventi valore fisso le varie idee che si presentano nella sua trattazione; nello spiegarne alcune con parole del linguaggio ordinario, e nel definire le altre combinando puramente le idee precedenti. Le dimostrazioni delle proposizioni d'Aritmetica sono tutte scritte nella sua ideografia, senza termini del linguaggio ordinario; esse si riducono ad una successione di proposizioni, tali che dall'una si passa all'altra applicando una sola regola di ragionamento; e queste regole sono dall'Autore raccolte ed esaminate in apposito §.

L'A. nel costrurre questo lavoro adopera un metodo affatto suo proprio. Egli già aveva trattate le questioni di Aritmetica col linguaggio comune nei « Grundlage der Arithmetik (1884) »; ed aveva già esposto il suo « Begriffschrift » nel 1879; il quale però non corrisponde più appieno all'attuale suo punto di vista (pag. 5, nota).

È evidente l'identità della questione trattata dal nostro autore con quella che è scopo della Logica matematica. Non è mia intenzione di fare qui la storia di questa scienza, che si va ora rapidamente sviluppando. Questa storia è scritta nel Formulario di Matematica, parte I, in quanto si riferisce alle varie identità logiche, poichè ivi è indicato l'Autore che primo le enunciò.

Or sono alcuni anni, colla considerazione della classe determinata da una condizione, vale a dire mettendo degli indici al segno di deduzione, feci vedere che tutto il calcolo logico sulle classi si trasformava in un calcolo sulle proposizioni (*Calcolo geometrico*, 1888); idea

questa già intravvista dal Boole, il quale parlò di *tempo*, durante cui una condizione è verificata.

E allora bastò una convenzione onde indicare le proposizioni individuali (segno ε), perchè potessi sviluppare un'intera teoria completamente in simboli, negli « *Arithmetices principia* (1889) ».

Questa scrittura simbolica si è poi successivamente perfezionata; finchè nel Formulario di Matematica già si riuscì ad analizzare in simboli numerose teorie. Man mano si traducono in simboli nuove teorie, conviene introdurre nuovi segni per indicare le nuove idee o le nuove combinazioni di idee che si presentano in queste teorie. Però si noti che non occorrono nuovi segni per indicare le idee di logica. Esse sono tutte completamente rappresentate coi segni dapprima introdotti. La Matematica è ora in possesso d'uno strumento atto a rappresentare tutte le sue proposizioni, e ad analizzare le varie forme di ragionamento.

Ora se, indipendentemente l'uno dall'altro, sorgono due sistemi atti a rappresentare e ad analizzare le proposizioni d'una teoria, fra essi si potrà presentare una assoluta differenza formale; ma vi dovrà sussistere un'analogia sostanziale; e se i sistemi sono egualmente perfezionati, fra essi ci dovrà essere l'identità. Poichè la Logica Matematica non consta di una serie di convenzioni arbitrarie, e variabili a capriccio dell'autore; ma bensì nell'analisi delle idee e delle proposizioni in primitive e derivate. E questa analisi è unica.

Molte idee del nostro Autore sono analoghe a quelle esposte nella Logica matematica. Le definizioni e le dimostrazioni sono quasi identicamente considerate, e in modo affatto diverso da quello dei logici che non fanno uso dei simboli.

Io mi propongo qui di dare un cenno del modo usato dall'A. per indicare le operazioni e relazioni logiche.

È noto che, nel Formulario di Matematica, tutte le relazioni ed operazioni fra proposizioni e fra classi si riducono a tre fondamentali, indicate coi segni

$$\frown \ , \ \supset \ , \ - \ .$$

Oltre a questi si usano, per comodità, i segni $=$, $\smile$, Λ, che sono definiti mediante i precedenti.

Il Frege, per esprimere queste relazioni e operazioni fra proposizioni, scrive in colonna queste proposizioni, e a sinistra, lungo questa colonna, mette un segno vario composto di tratti orizzontali, verticali, curvi, tutti aderenti fra loro; sicchè si ha qualche difficoltà a decomporre questo segno nei segni che lo costituiscono, onde poterli numerare. Ad ogni modo ecco come si possa spiegare la notazione del Frege.

Essendo a una proposizione, il nostro Autore (pag. 9) introduce una notazione $\vdash a$ per dire « la a è vera »; ed un'altra notazione $— a$ per indicare « la verità di a ». Non veggo l'utilità di queste convenzioni, che non hanno le corrispondenti nel Formulario. Invero la varia posizione che può avere in una formola una proposizione indica completamente ciò che di essa si afferma. Così delle nostre scritture

$$a \quad , \quad a \supset b \quad , \quad a \supset b . \supset c$$

la prima dice « è vera la a », la seconda invece « da a si deduce b », la terza « se da a si deduce la b, allora è vera la c ». Quest'ultima non indica la verità di a, b, c nè di $a \supset b$, ma solo la verità della relazione indicata fra queste proposizioni.

In seguito l'A. introduce un segno $\urcorner$ per la negazione, che corrisponde al nostro $-$. Il segno d'eguaglianza ha la stessa forma e significato nelle due notazioni. Però il Frege ne fa raro uso fra proposizioni. Egli scrive costantemente le due proposizioni $a \supset b$ e $b \supset a$ invece di $a = b$ (Form. I, § 1 P3).

Il Frege introduce poi la notazione

```
──┬── b
  └── a
```

che corrisponde esattamente alla nostra $- a \cup b$. In conseguenza cambiando a nella sua negativa, la formola

```
──┬── b
  └┬─ a
```

del Frege equivale alla nostra $a \cup b$; e scambiando b nella sua negativa e negando il risultato, la formola

```
─┬┬┬─ b
   └── a
```

del Frege equivale alla nostra $a \cap b$.

Essendo poi a_x una proposizione contenente una lettera variabile x, la scrittura del Frege

$$\overset{x}{\smile}\, a_x$$

equivale alla nostra $\mathrm{V} =_x a_x$, ossia $(- a_x) =_x \Lambda$; e sostituendo ad a_x una

delle funzioni ora considerate di due proposizioni a_x e b_x, si hanno le notazioni del Frege

$$\overset{x}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top b_x\\ \llcorner a_x\end{array} \qquad \overset{x}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\!\!\top b_x\\ \llcorner a_x\end{array} \qquad \top\overset{x}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\!\!\top b_x\\ \llcorner a_x\end{array}$$

equivalenti alle nostre

$\mathrm{V} =_x - a_x \cup b_x$, cioè $a_x - b_x =_x \Lambda$, o ancora $a_x \supset_x b_x$
$\mathrm{V} =_x - a_x \cup - b_x$, cioè $a_x \cap b_x =_x \Lambda$
$-(\mathrm{V} =_x - a_x \cup - b_x)$, cioè $a_x \cap b_x - =_x \Lambda$.

I due sistemi di notazioni si possono confrontare sotto l'aspetto scientifico e sotto quello pratico. Sotto l'aspetto scientifico, il sistema del Frege è basato sui cinque segni fondamentali

$$| \;,\; - \;,\; \top \;,\; \overline{\llcorner} \;,\; \smile$$

mentre il nostro sui tre segni

$$- \;,\; \cap \;,\; \supset \;.$$

Quindi il sistema del Formulario corrisponde ad un'analisi più profonda.

Sotto l'aspetto pratico poi, il rappresentare col Frege la moltiplicazione logica mediante un segno composto, ci fa perdere di vista le sue proprietà commutativa ed associativa.

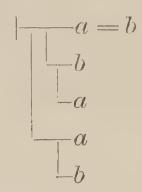
Le notazioni adottate nel Formulario, nel concetto sono identiche a quelle di Schröder e Peirce; differiscono da quelle di Boole solo in ciò che il Boole considerò come idea primitiva l'eguaglianza fra due proposizioni, e come derivata la deduzione, che espresse mediante l'eguaglianza. Invece il Peirce considerò come idea fondamentale la deduzione, e ne derivò l'eguaglianza. (Schröder, *Algebra der Logik*, I, p. 133).

Per ben intendere la scrittura del Frege, si badi che nella deduzione

$$\overset{x}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top b_x\\ \llcorner a_x\end{array}$$

(cioè $a_x \supset_x b_x$), l'autore alcuna volta sopprime l'indice x e il segno $\smile$, scrivendola così $\begin{array}{l}\top b\\ \llcorner a\end{array}$, che allora equivale al nostro $a \supset b$. Ad esempio

la formola del FREGE (pag. 240)



equivale alla nostra $b \supset a . a \supset b . \supset . a = b$ (Form., I, § 1 P18).

L'A. introduce in seguito una lunga serie di segni, di forma tale che occorre una speciale tipografia onde poterli riprodurre. A pag. 14 introduce un segno d'inversione; a pag. 18 un segno che corrisponde all'incirca all' ι del Formulario. Questi segni sono spiegati col linguaggio ordinario. I segni successivi sono definiti colla scrittura simbolica.

L'A. non ha alcun segno esattamente corrispondente all' ε del Formulario. Ne fa le veci un segno speciale che lega la variabile colla funzione (pag. 53).

Fra i due sistemi havvi pure qualche differenza nell'uso delle lettere variabili.

Nel Formulario, le lettere variabili a, b, ... x, y, z rappresentano enti qualunque, ad es. proposizioni, classi, segni di funzione, numeri delle varie specie, punti, rette, ecc., senza limitazione alcuna; e volta per volta si deve dire che cosa si vuole indicare con una lettera variabile (vedi *Introduction au Form.*, § 13).

Il FREGE invece usa lettere greche, latine e tedesche, maiuscole e minuscole; e le sceglie in modo che la forma della lettera indichi già la natura dell'ente che esso rappresenta. Così le lettere f, g, h, sotto le loro varie forme, non stanno per indicare enti qualunque, ma bensì delle caratteristiche di funzioni (§ 19). E se questa convenzione pare porti del vantaggio, essa presenta l'inconveniente che dovendola applicare a più teorie distinte, si dovranno introdurre tante forme di lettere quanti sono gli enti che si considerano. Inoltre il non dire in ogni caso che cosa rappresenti ogni singola lettera produce oscurità, e anche equivoci. Ad es. la prop. 126 dell'A. scritta coi simboli dell'algebra è

$$0 \leqq a,$$

la quale così isolata non ha senso preciso. Occorre dire esplicitamente che a è un numero intero e positivo o nullo, e scrivere

$$a \varepsilon N_0 . \supset . 0 \leqq a,$$

poichè non di necessità la lettera a è riservata ad indicare degli N_0. Anche l'Autore ne fa i più svariati usi.

Adunque, per avere una notazione completa, bisogna dire, o coi termini del linguaggio comune, o in simboli, il significato delle lettere; e se non si vuole usare il linguaggio comune, bisogna dirlo esplicitamente in simboli. Quindi la necessità dei nomi di classi (N, Q, q, q', ecc.) e del segno ε, o notazione equivalente, per unire l'individuo alla classe. Il che non impedisce che convenga, per facilitare la memoria, usare a preferenza certe lettere per indicare elementi variabili di certe classi.

Il nostro A. si occupa diffusamente delle regole di ragionamento, che spiega col linguaggio ordinario. Traducendole in simboli si hanno identità logiche tutte contenute nella parte I del Formulario. L'A. dimostra queste regole col linguaggio comune. Ma queste dimostrazioni sono illusorie. Invero, siccome queste regole sono già le più semplici regole di ragionamento, per dimostrarle o si dovranno applicare queste regole stesse, o altre più complicate. In ogni caso si fa un giro vizioso. L'unico lavoro che si possa fare su queste regole di ragionamento si è di esaminare se una regola equivalga all'insieme di più altre; e così continuando questa decomposizione si arriverà al sistema di regole più semplici, che nel Formulario, parte I, si sono chiamate proposizioni primitive.

Daremo infine un rapido cenno del metodo seguito dall'A. per trattare il numero intero. Egli lo introduce come numero degli individui d'una classe; così ottiene ciò che il G. CANTOR chiamò *numero cardinale*, e che venne indicato dal Dr VIVANTI nel Formulario, parte VI, § 1 P1 e § 2 P1, col segno Nc. Così la prima proposizione dell'A. (pag. 70) equivale a

$$u\,, v\,\varepsilon\,\mathrm{K}\,.\, f\,\varepsilon\, v\,\mathrm{f}\,u\,.\,\bar{f}\,\varepsilon\, u\,\mathrm{f}\,v\,.\,\mathrm{\supset}\,.\,\mathrm{num}\, u = \mathrm{num}\, v\,.$$

Si confronti pure la *Rivista di Matematica*, anno 1891, pag. 258. Veramente nella scrittura dell'A. non veggo espressa l'ipotesi $u\,, v\,\varepsilon\,\mathrm{K}$.

L'A. definisce lo 0, l'unità, e il successivo d'un numero con proposizioni identiche in sostanza a quelle del Formulario, parte V, § 1 P1-3.

L'infinito che egli considera (Endlos) è l'infinito numerabile, indicato nel Formulario colla scrittura Nc'N .

Questo libro deve aver costato al suo Autore grande lavoro. La sua lettura è pure assai faticosa. Certe distinzioni sono difficili ad afferrarsi, poichè spesso due termini tedeschi, fra cui l'A. fa differenza, hanno nei dizionari per corrispondente lo stesso termine italiano.

Sarebbe ora desiderabile che l'A. applicasse la sua ideografia a trattare molte parti della Matematica. Allora le formole che presentano ancora qualche oscurità, si dovranno meglio previsare con opportune notazioni. Queste notazioni stesse, che ora sono assai complicate, verrebbero semplificandosi. Ne verrà così necessariamente che le varie ideografie che si possono progettare, ove siano egualmente atte a rappresentare tutte le proposizioni, devono finire a coincidere fra loro, salvo al più la forma dei segni adottati.

G. Peano.

Opere ricevute.

A. Favaro. — *Lezioni di Geometria projettiva.* Terza edizione, Padova 1895, pag. X+260; L. 5.

Friedrich Engel - Paul Stäckel. — *Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss.* Leipzig 1895, pag. X+325.

G. Pesci. — *Trattato elementare di Trigonometria piana e sferica.* Livorno 1895, pag. XI+313; prezzo L. 4.

— *Appendice al trattato elementare, ecc.*, id. id., pag. 80; prezzo L. 1.

A. Demoulin. — *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systémes de droites.* Bruxelles-Paris, 1894, pag. VII+118.

P. L. Tchebichef. — *Teoria delle congruenze,* traduzione di Iginia Massarini. Roma, Lœscher, 1895, pag. XVI+295; prezzo L. 6.

G. Papelier. — *Leçons sur les coordonnées tangentielles.* Seconde partie, *Géométrie dans l'espace.* Paris, Nony, 1895, pag. 358.

N. Jadanza. — *Elementi di Geodesia,* 4ª edizione. Torino 1895, pag. 615 (litografato).

Contribuzione
al fondamento della Teoria degli insiemi transfiniti

di GEORG CANTOR *in Halle a|S.*

ARTICOLO PRIMO (*)

« Hypotheses non fingo ».

« Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tamquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus ».

« Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia ».

§ 1.
La nozione di potenza o il numero cardinale.

Per « *insieme* » (Menge) noi intendiamo ogni riunione M in un tutto di determinati e ben distinti oggetti m dati dai nostri sensi o dal nostro pensiero (che son detti gli elementi di M). Ciò noi esprimiamo in segni con:

(1) $$M = \{m\}.$$

La riunione in un solo di più insiemi $M, N, P, \ldots$, che non hanno elementi comuni, è da noi rappresentata con

(2) $$(M, N, P, \ldots).$$

Gli elementi di questo insieme sono adunque gli elementi di M, di N, di P, ecc. presi insieme.

« *Parte* » o « *insieme parziale* » d'un insieme M chiamiamo ogni *altro* insieme M_1, i cui elementi sono ad un tempo elementi di M.

(*) Dai *Mathematische Annalen*, Bd. XLVI, pp. 481-512; traduzione di F. GERBALDI.

Se M_2 è una parte di M_1 ed M_1 una parte di M, è anche M_2 una parte di M.

Ad ogni insieme spetta una determinata « *potenza* » (Mächtigkeit), che noi chiamiamo anche il suo « *numero cardinale* ».

Potenza o numero cardinale di M chiamiamo quell'idea generale, che per mezzo della nostra attiva facoltà di pensare si deduce dallo insieme M, facendo astrazione dalla natura dei suoi diversi elementi e dall'ordine con cui vien dato. Il risultato di questo doppio atto di astrazione, il numero cardinale o la potenza di M, viene da noi indicato con

$$\overline{\overline{M}}\,. \tag{3}$$

Siccome da ogni singolo elemento m, quando si fa astrazione dalla sua natura, nasce un'*unità*, così il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ è esso stesso un determinato insieme costituito di pure unità, che ha esistenza come imagine intellettuale o proiezione nel nostro animo dell'insieme dato M.

Diciamo equivalenti due insiemi M ed N e denotiamo ciò con

$$M \sim N \text{ ovvero } N \sim M, \tag{4}$$

quando è possibile con una legge metterli in una siffatta reciproca relazione, che ad ogni elemento di uno di essi corrisponda uno ed un solo elemento dell'altro. Ad ogni parte M_1 di M corrisponde allora una determinata equivalente parte N_1 di N ed inversamente.

Avendosi una tal legge per riferire tra loro due insiemi equivalenti, essa si può in varie maniere modificare (escluso il caso che ciascuno degli insiemi consti di un solo elemento). In particolare si può sempre fare in modo che ad un determinato elemento m_0 di M corrisponda un elemento dato qualsiasi n_0 di N. Infatti, se gli elementi m_0 ed n_0 già non si corrispondono nella legge iniziale, ma all'elemento m_0 di M corrisponde l'elemento n_1 di N, ed all'elemento n_0 di N l'elemento m_1 di M, basta assumere come legge modificata quella per cui diventano elementi corrispondenti dei due insiemi m_0 ed n_0, e così pure m_1 ed n_1, e per tutti gli altri elementi si conserva la primitiva legge; a questo modo si ottiene lo scopo voluto.

Ogni insieme è equivalente a sè stesso:

$$M \sim M. \tag{5}$$

Se due insiemi sono equivalenti ad un terzo, essi sono anche equivalenti tra loro:

$$\text{da } M \sim P \text{ e } N \sim P \text{ segue } M \sim N. \tag{6}$$

È di fondamentale importanza questo che *due insiemi M ed N hanno lo stesso numero cardinale allora e solo allora quando essi sono equivalenti:*

(7) $$\text{da } M \sim N \text{ segue } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}},$$

e

(8) $$\text{da } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \text{ segue } M \sim N.$$

La equivalenza degli insiemi è dunque il criterio necessario e sufficiente per l'eguaglianza dei loro numeri cardinali.

Infatti per la definizione data della potenza il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ rimane invariato, quando in luogo di un elemento, o anche in luogo di più ed eziandio di tutti gli elementi m di M si sostituisce un altro oggetto, uno per elemento. Ora, se $M \sim N$, si può stabilire una legge tale che M ed N siano reciprocamente ed univocamente riferiti tra loro; corrisponda per essa all'elemento m di M l'elemento n di N. Noi possiamo allora in luogo di ogni elemento m di M pensare sostituito il corrispondente elemento n di N, e così M si trasforma in N senza alterazione del numero cardinale; si ha adunque

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Il teorema inverso si deduce dall'osservazione che tra gli elementi di M e le varie unità del suo numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ sussiste una relazione reciprocamente univoca; perchè, come vedemmo, $\overline{\overline{M}}$ vien fuori in certa maniera da M, col dedurre da ogni elemento m di M una determinata unità di $\overline{\overline{M}}$; quindi possiamo dire che

(9) $$M \sim \overline{\overline{M}}.$$

Similmente è $N \sim \overline{\overline{N}}$. Dunque, se $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, segue dalla (6) $M \sim N$.

Rileviamo ancora il teorema seguente, che è conseguenza immediata della nozione dell'equivalenza:

Se M, N, P, ... sono insiemi, che non hanno elementi comuni, ed *M′, N′, P′, ... sono insiemi a quelli corrispondenti, ancora senza elementi comuni, e se si ha*

$$M \sim M', \quad N \sim N', \quad P \sim P', \ldots,$$

si ha pur sempre

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§ 2.

Il "maggiore„ ed il "minore„ per le potenze.

Se per due insiemi M ed N coi numeri cardinali $a = \overline{\overline{M}}$ e $b = \overline{\overline{N}}$ sono soddisfatte le due condizioni:

1) *non esiste alcuna parte di M, che sia equivalente ad N,*

2) *esiste una parte N_1 di N tale che $N_1 \sim M$,*

è anzitutto evidente che esse restano soddisfatte, quando M ed N si sostituiscano con due insiemi a quelli equivalenti M' ed N'; *quelle condizioni esprimono adunque una determinata relazione che passa fra i numeri cardinali a e b.*

Inoltre *è esclusa l'equivalenza di M ed N, e però l'eguaglianza di a e b*; perchè, se fosse $M \sim N$, essendo $N_1 \sim M$, sarebbe anche $N_1 \sim N$, ed in virtù di $M \sim N$ dovrebbe anche esistere una parte M_1 di M tale che $M_1 \sim M$, e quindi sarebbe anche $M_1 \sim N$, ciò che contradice alla condizione 1).

In terzo luogo *la relazione di a a b è tale, che è resa impossibile la stessa relazione di b ad a*; perchè, se in 1) e 2) si scambiano fra loro M ed N, ne nascono altre due condizioni che sono con quelle in contradizione.

Noi esprimiamo la relazione di a a b caratterizzata dalle 1) *e* 2) *col dire che: a è minore di b, ovvero anche b è maggiore di a;* in segni:

(1) $$a < b \quad \text{ovvero} \quad b > a .$$

Si dimostra facilmente, che

(2) $$\text{se } a < b\,,\ b < c\,, \text{ si ha } a < c\,.$$

Similmente segue senz'altro da quella definizione che *se P_1 è parte d'un insieme P, da $a < \overline{\overline{P_1}}$ segue sempre anche $a < \overline{\overline{P}}$, e da $\overline{\overline{P}} < b$ segue sempre anche $\overline{\overline{P_1}} < b$.*

Noi abbiamo visto che delle tre relazioni

$$a = b\,, \qquad a < b\,, \qquad a > b$$

ognuna esclude le altre due. Ma non è affatto evidente, ed a questo punto del nostro sviluppo a mala pena si potrebbe dimostrare, che *per*

due numeri cardinali qualunque a e b deve necessariamente aver luogo una di quelle tre relazioni (*).

§ 3.

L'addizione e moltiplicazione dei numeri cardinali.

La riunione di due insiemi M ed N, che non hanno elementi comuni fu denotata al § 1, (2) con (M, N). Noi lo diciamo « *insieme somma* (Vereinigungsmenge) *di M ed N* ».

Se M' ed N' sono altri due insiemi senza elementi comuni, ed è $M \sim M'$, ed $N \sim N'$, vedemmo che anche

$$(M, N) \sim (M', N').$$

Quindi segue che il numero cardinale di (M, N) dipende soltanto dai numeri cardinali $\overline{\overline{M}} = a$ e $\overline{\overline{N}} = b$.

Ciò conduce alla definizione della somma di a e b, che si ha ponendo

$$(1) \qquad a + b = \overline{\overline{(M, N)}}.$$

Siccome nella nozione di potenza si fa astrazione dall'ordine degli elementi, così segue senz'altro:

$$(2) \qquad a + b = b + a,$$

(*) Più tardi, appena avremo dato uno sguardo alla successione crescente dei numeri cardinali transfiniti, ed avremo acquistato cognizione della loro connessione, risulterà la verità del teorema:

A. « *Se a e b sono due numeri cardinali qualunque, si ha*: o $a = b$, o $a < b$, o $a > b$ ».

Da questo teorema si possono molto semplicemente dedurre i seguenti, dei quali tuttavia non dovremo presentemente fare alcun uso:

B. « Se due insiemi M ed N sono cosifatti che M è equivalente ad una parte N_1 di N, ed N è equivalente ad una parte M_1 di M, sono anche M ed N equivalenti ».

C. « Se M_1 è una parte d'un insieme M, M_2 una parte dell'insieme M_1, e se M ed M_2 sono equivalenti, anche M_1 è equivalente agli insiemi M ed M_2 ».

D. « Se per due insiemi M ed N è soddisfatta la condizione che N non è equivalente nè ad M stesso nè ad una parte di M, vi è una parte N_1 di N che è equivalente ad M ».

E. « Se due insiemi M ed N non sono equivalenti, e vi è una parte N_1 di N che è equivalente ad M, non vi è alcuna parte di M equivalente ad N ».

e per tre numeri cardinali a, b, c:

(3) $$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Passiamo alla moltiplicazione. Ogni elemento m di un insieme M si può combinare con ogni elemento n di un altro insieme N in un nuovo elemento (m, n); per l'insieme di tutte queste combinazioni (m, n) adottiamo la notazione $(M . N)$, e lo chiamiamo « *insieme prodotto* (Verbindungsmenge) *di M ed N* ». Si ha adunque

(4) $$(M . N) = \{(m, n)\}.$$

È facile persuadersi che anche la potenza di $(M . N)$ dipende solo dalle potenze $\overline{\overline{M}} = a$, $\overline{\overline{N}} = b$; perchè se si sostituiscono agli insiemi M ed N insiemi ad essi equivalenti

$$M' = \{m'\} \text{ ed } N' = \{n'\},$$

e si considerano m, m' come elementi corrispondenti e così pure n, n', l'insieme

$$(M' . N') = \{(m', n')\}$$

viene messo in relazione reciprocameute univoca a $(M . N)$, quando si riguardino come elementi corrispondenti (m, n) e (m', n'); si ha adunque

(5) $$(M' . N') \sim (M . N).$$

Ora noi definiamo il prodotto $a . b$ per mezzo dell'equazione

(6) $$a . b = \overline{\overline{(M . N)}}.$$

Un insieme col numero cardinale $a . b$ si può ancora costruire con due insiemi di numeri cardinali a e b colla regola seguente: si parta dall'insieme N ed in esso si sostituisca ad ogni elemento n un insieme $M_n \sim M$, indi si riuniscano in un tutto S gli elementi di tutti questi insiemi M_n; si vede facilmente che

(7) $$S \sim (M . N),$$

quindi

$$\overline{\overline{S}} = a . b .$$

Infatti, stabilita una legge qualunque per riferire tra loro i due insiemi equivalenti M ed M_n, si denoti con m_n l'elemento di M_n corrispondente all'elemento m di M, e si ha

(8) $$S = \{m_n\},$$

e perciò gli insiemi S ed $(M\,.\,N)$ si possono mettere in relazione reciproca e univoca, riguardando m_n e (m, n) come elementi corrispondenti.

Dalle nostre definizioni seguono facilmente i teoremi:

9) $$a\,.\,b = b\,.\,a\,,$$

(10) $$a\,.\,(b\,.\,c) = (a\,.\,b)\,.\,c\,,$$

(11) $$a\,(b + c) = ab + ac\,,$$

perchè

$$(M\,.\,N) \sim (N\,.\,M)\,,$$
$$(M\,.\,(N\,.\,P)) \sim ((M\,.\,N)\,.\,P)\,,$$
$$(M\,.\,(N\,,P)) \sim ((M\,.\,N)\,,(M\,.\,P))\,.$$

L'addizione e la moltiplicazione dei numeri cardinali soddisfano adunque alle leggi commutativa, associativa e distributiva.

§ 4.

Elevazione a potenza dei numeri cardinali.

Per un *coprimento* (Belegung) *dell'insieme N cogli elementi dell'insieme M,* o più semplicemente *coprimento di N con M* intendiamo una legge, colla quale ad ogni elemento n di N si congiunge un determinato elemento di M, potendo uno stesso elemento di M venire più volte impiegato. L'elemento di M congiunto con n è in certa maniera una funzione ad un sol valore di n e però si può rappresentare ad es. con $\mathrm{f}(n)$, che diremo *funzione di ricoprimento*; il corrispondente coprimento di N si chiama $\mathrm{f}(N)$.

Due coprimenti $\mathrm{f}_1(N)$ e $\mathrm{f}_2(N)$ si dicono allora e solo allora eguali, quando *per tutti gli elementi n di N* è soddisfatta la equazione

(1) $$\mathrm{f}_1(n) = \mathrm{f}_2(n)\,,$$

di guisa che se anche per un solo particolare elemento $n = n_0$ questa equazione non sussiste, $\mathrm{f}_1(N)$ e $\mathrm{f}_2(N)$ sono da considerarsi come coprimenti diversi di N.

A mo' d'esempio, essendo m_0 un particolare elemento di M, può stabilirsi che per tutti gli n sia

$$\mathrm{f}(n) = m_0\,;$$

questa legge costituisce un particolare coprimento di N con M.

Un'altra sorta di coprimento si ottiene, se m_0, m_1 sono due parti-

colari e diversi elementi di M, ed n_0 un particolare elemento di N, quando si pone:

$$f(n_0) = m_0 ,$$
$$f(n) = m_1$$

per tutti gli n diversi da n_0.

La totalità dei diversi coprimenti di N con M forma un determinato insieme cogli elementi $f(N)$, che noi chiamiamo l'*insieme dei coprimenti di N con M* e denotiamo con $(N \mid M)$. Si ha dunque:

(2) $$(N \mid M) = \{f(N)\}.$$

Se $M \sim M'$ e $N \sim N'$, si vede facilmente che anche

(3) $$(N \mid M) \sim (N' \mid M').$$

Il numero cardinale di $(N \mid M)$ dipende dunque soltanto dai numeri cardinali $\overline{\overline{M}} = a$ e $\overline{\overline{N}} = b$; esso ci serve per definire la potenza a^b:

(4) $$a^b = \overline{\overline{(N \mid M)}}.$$

Per tre insiemi qualunque M, N, P si dimostrano facilmente i teoremi

(5) $$((N \mid M) . (P \mid M)) \sim ((N . P) \mid M) ,$$
(6) $$((P \mid M) . (P \mid N) \sim (P \mid (M . N)) ,$$
(7) $$(P \mid (N \mid M)) \sim ((P . N) \mid M) ,$$

dai quali, se si pone $\overline{\overline{P}} = c$, in virtù della (4) e del § 3, si deducono i teoremi seguenti per tre numeri cardinali qualunque a, b, c:

(8) $$a^b . a^c = a^{b+c} ,$$
(9) $$a^c . b^c = (a . b)^c ,$$
(10) $$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$ (*).

(*) Quanto importanti e feconde siano queste semplici formole, estese alle potenze, si riconosce dal seguente esempio:

Denotiamo con o la potenza del continuo lineare X (cioè dell'insieme X di tutti i numeri reali x che sono $\geqq 0$ e < 1. Si stabilisce facilmente che essa si può rappresentare colla formola

(11) $$o = 2^{\aleph_0}$$

dove $\aleph_0$ ha il significato che viene spiegato al § 6.

§ 5.
I numeri cardinali finiti.

Vogliamo anzitutto mostrare, come i principî esposti, su cui baseremo più tardi la teoria dei numeri cardinali infiniti attuali o transfiniti, offrano anche il fondamento più naturale, più breve e più rigoroso della teoria dei numeri finiti.

Ad un unico oggetto e_0, volendolo considerare come un insieme $E_0 = (e_0)$, corrisponde come numero cardinale ciò che noi diciamo « uno » e denotiamo con 1; abbiamo:

(1) $$1 = \overline{\overline{E_0}}.$$

Infatti per la (4) $2^{\aleph_0}$ è niente altro che la potenza di tutte le rappresentazioni dei numeri x nel sistema duale

(12) $$x = \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2^2} + \ldots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \ldots$$

(dove $f(\nu) = 0$ oppure 1).

Se qui osserviamo che ogni numero x vien rappresentato in un sol modo, fatta eccezione dei numeri $x = \frac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$, i quali vengono rappresentati in due modi, denotando con $\{ s_\nu \}$ la totalità « numerabile » di questi ultimi, abbiamo anzitutto

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{(\{ s_\nu \}, X)}}.$$

Ora si sopprima da X un insieme qualunque « numerabile » $\{ t_\nu \}$ e si denoti il resto con X_1, si avrà:

$$X = (\{ t_\nu \}, X_1) = (\{ t_{2\nu-1} \}, \{ t_{2\nu} \}, X_1),$$
$$(\{ s_\nu \}, X) = (\{ s_\nu \}, \{ t_\nu \}, X_1),$$
$$\{ t_{2\nu-1} \} \sim \{ s_\nu \}, \quad \{ t_{2\nu} \} \sim \{ t_\nu \}, \quad X_1 \sim X_1,$$

quindi

$$X \sim (\{ s_\nu \}, X),$$

dunque (§ 1)

$$2^{\aleph_0} = \overline{\overline{X}} = o.$$

Aggiungiamo ora ad E_0 un altro oggetto e_1, l'insieme somma chiamisi E_1, per guisa che

(2) $$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1).$$

Il numero cardinale di E_1 dicesi « due » e si rappresenta con 2 :

(3) $$2 = \overline{\overline{E_1}}.$$

Aggiungendo nuovi elementi noi otteniamo la serie degli insiemi

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \ldots,$$

che ci forniscono in successione illimitata e l'un dopo l'altro i rimanenti *numeri cardinali finiti* rappresentati con 3, 4, 5, ... L'impiego che qui facciamo degli stessi numeri come indici, è giustificato da ciò che un numero viene a questo modo adoperato soltanto dopo che esso è stato definito come numero cardinale. Se si intende che $\nu - 1$ denoti il numero che in quella serie precede immediatamente il numero ν, abbiamo

(4) $$\nu = \overline{\overline{E_{\nu-1}}},$$

(5) $$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \ldots, e_\nu).$$

Dalla (11), quadrando, per la (6) del § 6, segue

$$o \,.\, o = 2^{\aleph_0} \,.\, 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = o,$$

e quindi continuando a moltiplicare per o

(13) $$o^\nu = o,$$

dove ν è un numero cardinale finito qualunque.

Innalzando ambi i membri della (11) alla potenza $\aleph_0$ si ottiene

$$o^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0},$$

e, siccome per la (8) del § 6 $\aleph_0 \,.\, \aleph_0 = \aleph_0$, così si ha

(14) $$o^{\aleph_0} = o.$$

Le formole (13) e (14) non hanno altro significato che questo: « Il continuo ν-dimensionale e così pure il continuo $\aleph_0$-dimensionale hanno la potenza del continuo unidimensionale ». E così *in queste poche righe, colle formole fondamentali del calcolo dei numeri cardinali* abbiamo in modo puramente algebrico ricavato *tutto il contenuto* del lavoro consegnato nel T. 84 del *Crelle's Journal*, pag. 242.

Dalla definizione di somma del § 3 segue:

(6) $$\overline{\overline{E}}_\nu = \overline{\overline{E}}_{\nu-1} + 1,$$

cioè ogni numero cardinale finito (escluso 1) è la somma di quello che immediatamente lo precede e di 1.

Per i nostri sviluppi sono fondamentali i seguenti tre teoremi:

A. « *I termini della serie illimitata dei numeri cardinali finiti*

$$1, 2, 3, \dots \nu, \dots$$

sono tutti fra loro diversi (cioè non è soddisfatta la condizione di equivalenza per i corrispondenti insiemi stabilita al § 1) ».

B. « *Ognuno di questi numeri* ν *è maggiore di quelli che lo precedono e minore di quelli che lo seguono* (§ 2) ».

C. « *Non esiste alcun numero cardinale che rispetto alla sua grandezza stia tra due termini successivi* ν *e* $\nu + 1$ (§ 2) ».

Le dimostrazioni di questi teoremi si fondano sui seguenti D ed E, di cui perciò ci occuperemo primieramente.

D. « *Se M è un insieme cosifatto che non ha potenza eguale a quella di alcuno dei suoi insiemi parziali, anche l'insieme (M, e), che nasce da M aggiungendovi un unico elemento e, ha la stessa proprietà di non avere potenza uguale a quella di alcuno dei suoi insiemi parziali* ».

E. « *Se N è un insieme col numero cardinale finito ν, ed N_1 uno qualunque degli insiemi parziali di N, il numero cardinale di N_1 è uguale ad uno dei numeri precedenti* $1, 2, 3, \dots \nu - 1$ ».

Dimostrazione di D. — Supponiamo che l'insieme (M, e) abbia potenza uguale a quella di uno dei suoi insiemi parziali, che chiameremo N; due casi sono a distinguersi, che conducono entrambi all'assurdo:

1) L'insieme N contiene e come elemento. Sia $N = (M_1, e)$; allora M_1 è una parte di M, perchè N è una parte di (M, e). Come vedemmo al § 1, la legge di corrispondenza dei due insiemi equivalenti (M, e) e (M_1, e) si può modificare in guisa che all'elemento e dell'uno corrisponda lo stesso elemento e dell'altro; ma allora anche M ed M_1 risultano riferiti tra loro in modo reciprocamente univoco. Ora ciò contradice all'ipotesi che M non ha la stessa potenza della sua parte M_1.

2) L'insieme N non contiene e come elemento. Allora N o è M o è una parte di M. Supponiamo che per la legge di corrispondenza posta a fondamento tra (M, e) ed N all'elemento e del primo corrisponda l'elemento f del secondo. Sia $N = (M_1, f)$; allora sarà contemporaneamente l'insieme M posto in relazione reciprocamente univoca con M_1;

ma M_1 essendo parte di N è in ogni caso parte di M. Quindi anche qui M sarebbe equivalente ad una sua parte, ciò che è contrario all'ipotesi.

Dimostrazione di E. — Supporremo il teorema vero fino a un certo ν, indi concluderemo che esso sussiste per il successivo $\nu+1$.

Per insieme col numero cardinale $\nu+1$ assumiamo $E_\nu=(e_0, e_1, \dots e_\nu)$; se il teorema per questo è vero, segue senz'altro (§ 1) la sua verità anche per ogni altro insieme collo stesso numero cardinale $\nu+1$. Sia E' una parte qualunque di E_ν; noi distinguiamo i seguenti casi:

1) E' non contiene e_ν come elemento; allora E' è o $E_{\nu-1}$ o una parte di $E_{\nu-1}$, e perciò ha per numero cardinale o ν o uno dei numeri 1, 2, 3, ... $\nu-1$, perchè noi supponiamo già vero il nostro teorema per l'insieme $E_{\nu-1}$ col numero cardinale ν.

2) E' consta dell'unico elemento e_ν; allora è $\overline{\overline{E'}}=1$.

3) E' consta di e_ν e di un insieme E'', cioè $E'=(E'', e_\nu)$; E'' è una parte di $E_{\nu-1}$ e quindi per quanto si è supposto ha per numero cardinale uno dei numeri 1, 2, 3, ... $\nu-1$; ma si ha $\overline{\overline{E'}}=\overline{\overline{E''}}+1$, dunque E' ha per numero cardinale uno dei numeri 2, 3, ... ν.

Dimostrazione di A. — Ognuno degli insiemi da noi denotati con E_ν ha la proprietà di non essere equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali. Perchè se si suppone che ciò sia vero per un certo ν, segue dal teorema D che lo stesso vale per il successivo $\nu+1$. Ora per $\nu=1$ si riconosce immediatamente che l'insieme $E_1=(e_0, e_1)$ non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali che in questo caso sono (e_0) ed (e_1).

Consideriamo ora due numeri qualunque μ e ν della serie 1, 2, 3,... e sia μ il precedente e ν il seguente; sarà $E_{\mu-1}$ una parte di $E_{\nu-1}$; perciò $E_{\mu-1}$ e $E_{\nu-1}$ non sono equivalenti; quindi non sono uguali i corrispondenti numeri cardinali $\mu=\overline{\overline{E}}_{\mu-1}$ e $\nu=\overline{\overline{E}}_{\nu-1}$.

Dimostrazione di B. — Se dei due numeri cardinali finiti μ e ν è μ il precedente e ν il seguente, si ha $\mu<\nu$. Infatti consideriamo i due insiemi $M=E_{\mu-1}$ e $N=E_{\nu-1}$, per essi sono soddisfatte entrambe le condizioni indicate al § 2 per essere $\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{N}}$. La condizione 1) è soddisfatta, perchè per il teorema E un insieme parziale di $M=E_{\mu-1}$ può avere soltanto uno dei numeri cardinali 1, 2, 3, ... $\mu-1$, e quindi per il teorema A non può essere equivalente allo insieme $N=E_{\nu-1}$. La condizione 2) è soddisfatta, perchè qui M stesso è una parte di N.

Dimostrazione di C. — Sia a un numero cardinale minore di $\nu+1$. Per la condizione 2) del § 2 esiste un insieme parziale di E_ν col numero cardinale a. Per il teorema E un insieme parziale di E_ν può avere soltanto uno dei numeri cardinali 1, 2, 3, ... ν. Quindi a è uguale

ad uno dei numeri 1, 2, 3, ... ν. Per il teorema B nessuno di questi è maggiore di ν. Per conseguenza non vi è alcun numero cardinale a che sia minore di $\nu + 1$ e maggiore di ν.

Per il seguito ha importanza il seguente teorema:

F. « *Sia K un insieme qualunque costituito di numeri cardinali finiti e diversi; tra questi ve ne è uno $\varkappa_1$, che è minore degli altri, e perciò è il minore di tutti* ».

Dimostrazione. — L'insieme K o contiene il numero 1, e allora questo è il minimo, $\varkappa_1 = 1$; ovvero non lo contiene. In questo secondo caso sia J l'insieme di *tutti* quei numeri cardinali della nostra serie 1, 2, 3, ... che sono minori di quelli che si trovano in K. Se un numero ν appartiene a J, vi appartengono anche tutti i numeri $< \nu$. Ma J deve avere un elemento ν_1 tale che $\nu_1 + 1$ e quindi anche tutti i numeri maggiori di ν_1 non appartengono a J, perchè altrimenti J abbraccierebbe la totalità dei numeri cardinali finiti, ciò che non è perchè in J non sono contenuti i numeri appartenenti a K. Dunque J è niente altro che $(1, 2, 3, \dots \nu_1)$. Il numero $\nu_1 + 1 = \varkappa_1$ è necessariamente un elemento di K e minore degli altri.

Al teorema F si connette il seguente:

G. « *Ogni insieme $K = \{\varkappa\}$ costituito di numeri cardinali finiti e diversi, si può mettere sotto la forma di serie*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \dots)$$

essendo

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 \dots \text{ »}.$$

§ 6.

Il più piccolo numero cardinale transfinito alef-zero.

Gli insiemi con numero cardinale finito diconsi « *insiemi finiti* »; tutti gli altri li vogliamo chiamare « *insiemi transfiniti* » ed i numeri cardinali che ad essi corrispondono « *numeri cardinali transfiniti* ».

La *totalità dei numeri cardinali finiti* ν ci offre un primo esempio d'un insieme transfinito; chiameremo *alef-zero,* in segni $\aleph_0$, il numero cardinale che gli corrisponde (§ 1); definiamo dunque

$$(1) \qquad \aleph_0 = \overline{\overline{\{\nu\}}}.$$

Che $\aleph_0$ sia un *numero transfinito,* cioè che *non sia uguale ad alcun numero finito* μ, segue dal semplice fatto, che, se allo insieme $\{\nu\}$ si aggiunge un nuovo elemento e_0, l'insieme somma $(\{\nu\}, e_0)$ è equivalente al primitivo $\{\nu\}$. Infatti tra i due si può stabilire una relazione

reciprocamente univoca, per la quale all'elemento e_0 si fa corrispondere l'elemento 1 del secondo, e all'elemento ν del primo l'elemento $\nu + 1$ del secondo. Perciò abbiamo per il § 3:

(2) $$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 .$$

Ma nel § 5 si è mostrato che $\mu + 1$ è sempre diverso da μ, quindi $\aleph_0$ non è uguale ad alcun numero finito μ.

Il numero $\aleph_0$ *è maggiore di qualunque numero finito* μ :

(3) $$\aleph_0 > \mu .$$

Ciò segue, in virtù di quanto fu stabilito al § 3, da ciò che $\mu = \overline{\overline{(1, 2, 3, \dots \mu)}}$, niuna parte dell'insieme $(1, 2, 3, \dots \mu)$ è equivalente allo insieme $\{\nu\}$, e $(1, 2, 3, \dots \mu)$ è esso stesso una parte di $\{\nu\}$.

Inoltre $\aleph_0$ *è il più piccolo numero cardinale transfinito.* Se a è un numero cardinale transfinito qualunque diverso da $\aleph_0$, si ha

(4) $$\aleph_0 < a.$$

Ciò è basato sui seguenti teoremi:

A. « *Ogni insieme transfinito T ha insiemi parziali il cui numero cardinale è* $\aleph_0$ ».

Dimostrazione. — Se con una legge qualunque si sopprime da T un numero finito di elementi $t_1, t_2, \dots t_{\nu-1}$, vi è sempre la possibilità di levare da esso un altro elemento t_ν. L'insieme $\{t_\nu\}$ dove ν denota un numero cardinale finito qualunque è un insieme parziale di T il cui numero cardinale è $\aleph_0$, perchè $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§ 1).

B. « *Se S è un insieme transfinito col numero cardinale* $\aleph_0$, *e* S_1 *un qualunque insieme transfinito parte di S, sarà anche* $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$ ».

Dimostrazione. — Si suppone che sia $S \sim \{\nu\}$; stabilita una legge di corrispondenza tra questi due insiemi, sia s_ν quell'elemento di S che corrisponde all'elemento ν di $\{\nu\}$, si ha

$$S = \{s_\nu\} .$$

L'insieme S_1 parte di S consta di certi elementi $s_\varkappa$ di S, e la totalità dei numeri $\varkappa$ forma un insieme transfinito K parte di $\{\nu\}$.

Per il teorema G del § 5, l'insieme K si può mettere sotto forma di serie

$$K = \{\varkappa_\nu\} ,$$

dove

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+} ,$$

quindi è anche

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

Di qui segue che $S_1 \sim S$, e per conseguenza $\overline{\overline{S_1}} = \aleph_0$.

Da A e B, in virtù del § 2, si deduce la formola (4).

Dalla (2), aggiungendo 1 ad ambi i membri, si ha:

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

e ripetendo la stessa osservazione:

(5) $$\aleph_0 + \nu = \aleph_0.$$

Ma noi abbiamo ancora

(6) $$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Infatti, per la (1) del § 3, $\aleph_0 + \aleph_0$ è il numero cardinale $\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}}$, essendo

$$\overline{\overline{\{a_\nu\}}} = \overline{\overline{\{b_\nu\}}} = \aleph_0.$$

Ora si ha evidentemente

$$\{\nu\} = (\{2\nu-1\}, \{2\nu\}),$$

$$(\{2\nu-1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

dunque

$$\overline{\overline{(\{a_\nu\}, \{b_\nu\})}} = \overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0.$$

L'equazione (6) può anche scriversi:

$$\aleph_0 . 2 = \aleph_0,$$

ed, aggiungendo ad ambi i membri ripetutamente $\aleph_0$, si deduce

(7) $$\aleph_0 . \nu = \nu . \aleph_0 = \aleph_0.$$

Ora noi abbiamo ancora

(8) $$\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0.$$

Dimostrazione. — Per la (6) del § 3, $\aleph_0 . \aleph_0$ è il numero cardinale che spetta all'insieme prodotto

$$\{(\mu, \nu)\},$$

dove μ e ν sono due qualunque, fra loro indipendenti, numeri cardinali finiti. Ora, se anche λ rappresenta un qualunque numero cardinale

finito (per guisa che $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ e $\{\nu\}$ sono tre notazioni diverse per lo stesso insieme dei numeri cardinali finiti), noi dobbiamo dimostrare che

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Denotiamo $\mu + \nu$ con ρ; ρ prende tutti i valori numerici 2, 3, 4, ... ed in tutto vi sono $\rho - 1$ elementi (μ, ν), per cui $\mu + \nu = \rho$, che sono

$$(1, \rho-1),\ (2, \rho-2),\ \ldots\ (\rho-1, 1).$$

In questa successione si ponga anzitutto $\rho = 2$ e si scriva l'unico elemento $(1, 1)$; indi si ponga $\rho = 3$ e si scrivano i due elementi $(1, 2)$, $(2, 1)$; poi si scrivano i tre elementi per cui $\rho = 4$, ecc.; si otterranno così tutti gli elementi (μ, ν) disposti in una semplice successione:

$$(1, 1);\ (1, 2),\ (2, 1);\ (1, 3),\ (2, 2),\ (3, 1);\ (1, 4),\ (2, 3),\ \ldots,$$

e precisamente avviene (come facilmente si vede) che l'elemento (μ, ν) si trova scritto al λ^{esimo} posto, essendo

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}. \tag{9}$$

Ora λ assume ciascun valore 1, 2, 3, ... una volta sola; quindi per mezzo della (9) si ha una relazione reciprocamente univoca tra i due insiemi $\{\lambda\}$ e $\{\mu, \nu\}$.

Moltiplicando i due membri dell'equazione (8) per $\aleph_0$ si ottiene $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$, e dopo una ripetuta moltiplicazione per $\aleph_0$ si ha per ogni numero cardinale finito ν l'equazione

$$\aleph_0^\nu = \aleph_0. \tag{10}$$

I teoremi E ed A del § 5 conducono al seguente teorema sugli insiemi finiti:

C. « *Ogni insieme finito E è cosifatto che esso non è equivalente ad alcuno dei suoi insiemi parziali* ».

A questo teorema fa riscontro il seguente per gli insiemi transfiniti:

D. « *Ogni insieme transfinito T è cosifatto, che esso ha degli insiemi parziali T_1, che gli sono equivalenti* ».

Dimostrazione. — Per il teorema A di questo paragrafo vi è un insieme parziale $S = \{t_\nu\}$ di T che ha il numero cardinale $\aleph_0$. Sia $T = (S, U)$, di guisa che U è composto di quelli elementi di T, che son diversi dagli elementi t_ν. Poniamo $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, sarà T_1 un insieme parziale di T, e precisamente quello che si ottiene da T sopprimendo il solo elemento t_1. Siccome è $S \sim S_1$ (teorema B di questo paragrafo), ed $U \sim U$, così è eziandio (§ 1) $T \sim T_1$.

Questi teoremi C e D mettono nella maniera più evidente in luce la differenza essenziale tra gli insiemi finiti e gli infiniti, siccome fin dal 1877 ho indicato nel t. 84 del *Crelle's Journal,* pag. 242.

Dopo di aver introdotto il più piccolo numero cardinale transfinito $\aleph_0$ e di averne stabilite le più immediate proprietà, si presenta la questione dei numeri cardinali più elevati e della loro deduzione da $\aleph_0$.

Mostreremo che i numeri cardinali transfiniti si possono ordinare rispetto alla loro grandezza, ed in quest'ordine formano, come i numeri cardinali finiti, ma in un senso più esteso, un *insieme ben ordinato.*

Da $\aleph_0$ si deduce con una determinata legge il numero cardinale immediatamente maggiore $\aleph_1$, da questo colla stessa legge l'immediatamente maggiore $\aleph_2$ e così di seguito.

Ma anche la serie illimitata dei numeri cardinali

$$\aleph_0 , \aleph_1 , \aleph_2 , \ldots \aleph_\nu , \ldots$$

non esaurisce l'idea dei numeri cardinali transfiniti. Si dimostrerà l'esistenza d'un numero cardinale, che denoteremo con $\aleph_\omega$ e che si presenta come l'immediatamente maggiore di tutti gli $\aleph_\nu$; da esso, e nella stessa maniera come $\aleph_1$ da $\aleph_0$, se ne deduce uno immediatamente maggiore $\aleph_{\omega+1}$, e così si seguita senza fine.

Per ogni numero cardinale transfinito a ve ne è uno immediatamente maggiore che si deduce da esso secondo un'unica legge; ed anche per ogni insieme $\{a\}$ illimitatamente crescente e ben ordinato di numeri cardinali transfiniti ve ne è uno immediatamente maggiore, che se ne deduce con unica legge.

A stabilire rigorosamente questi risultati da noi trovati nel 1882 ed esposti sia in un opuscolo « Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 », sia nel Vol. XXI dei « Mathematische Annalen » noi ci serviamo dei così detti « *tipi d'ordine* » (Ordnungstypen), di cui dobbiamo anzitutto esporre le teorie nei paragrafi seguenti.

§ 7.

I tipi d'ordine di insiemi semplicemente ordinati.

Chiamiamo *semplicemente ordinato* un insieme M quando tra i suoi elementi m sussiste un determinato ordine di posto (Rangordnung), per cui considerando due elementi qualunque m_1 ed m_2 l'uno prende il posto *inferiore* e l'altro il posto *superiore,* e ciò in guisa tale che, se di tre elementi m_1, m_2 ed m_3 è per il posto m_1 inferiore a m_2 ed m_2 inferiore ad m_3, anche m_1 è per il posto inferiore ad m_3.

La relazione tra due elementi m_1 e m_2, per cui m_1 occupa il posto inferiore, ed m_2 il posto superiore, nell'assegnato ordine, sarà designato colle formole

$$(1) \qquad m_1 < m_2 , \qquad m_2 > m_1 .$$

Così ad esempio ogni punteggiata P assegnata su una retta infinita è un insieme semplicemente ordinato, se considerando due punti qualunque p_1 e p_2 di essa si attribuisce il posto inferiore a quello, la cui coordinata (dopo di avere fissata l'origine e la direzione positiva) è minore.

È chiaro che uno stesso insieme può essere « ordinato semplicemente » secondo le più svariate leggi. Prendiamo ad esempio l'insieme R di tutti i numeri razionali positivi $\frac{p}{q}$ (dove p e q sono interi primi fra loro), che sono maggiori di 0 e minori di 1; si ha anzitutto il suo ordine « naturale » che è quello rispetto alla grandezza. Essi si possono però ancora ordinare (ed in questo nuovo ordine denoteremo l'insieme con R_0) in guisa che di due numeri $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$, per cui le somme $p_1 + q_1$ e $p_2 + q_2$ hanno valori diversi, abbia posto inferiore quello per cui la corrispondente somma è minore, ed in guisa che il più piccolo dei due numeri razionali sia quello di posto inferiore nel caso in cui $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$. In questo ordine, corrispondendo ad uno stesso valore di $p + q$ un numero finito di numeri razionali diversi $\frac{p}{q}$, il nostro insieme ha evidentemente la forma:

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\right),$$

dove

$$r_\nu < r_{\nu+1} .$$

Dunque, ogniqualvolta parliamo di un insieme M *semplicemente ordinato* noi imaginiamo stabilito un determinato ordine di posto per i suoi elementi nel senso sopra dichiarato.

Esistono insiemi doppiamente, triplamente, ν volte, α volte ordinati, ma da questi per ora nel nostro studio facciamo astrazione. Perciò ci permettiamo in quel che segue di adoperare l'espressione più breve « insieme ordinato » nel senso di « insieme semplicemente ordinato ».

Per ogni insieme ordinato M si ha un determinato « tipo ordinatore » o più brevemente un determinato « tipo », che noi denotiamo con

$$(2) \qquad \overline{M};$$

con ciò intendiamo *l'idea generale che si ricava da M, quando si fa astrazione soltanto dalla natura degli elementi m, ma si conserva per essi l'ordine di posto.*

Perciò il tipo d'ordine $\overline{M}$ è *esso stesso un insieme ordinato*, i cui elementi sono *unità pure*, le quali hanno fra loro lo stesso ordine di posto che hanno gli elementi corrispondenti di M, da cui quelle si dedussero coll'astrazione.

Chiamiamo « simili » (ähnlich) due insiemi M ed N se essi si possono riferire tra loro in modo reciprocamente univoco, in guisa che se m_1 ed m_2 sono due elementi qualunque di M, n_1 ed n_2 i corrispondenti elementi di N, la relazione di posto tra m_1 ed m_2 dentro M sia sempre la stessa che quella tra n_1 ed n_2 dentro N. Una siffatta corrispondenza di insiemi simili viene da noi chiamata una *rappresentazione* (Abbildung) di uno sull'altro. In essa ad un insieme parziale M_1 di M (che evidentemente viene ad essere anche un insieme ordinato) corrisponde un insieme parziale simile N_1 di N. La similitudine di due insiemi ordinati M e N viene espressa in formole con

(3) $$M \simeq N.$$

Ogni insieme ordinato è simile a sè stesso.

Se due insiemi ordinati sono simili ad un terzo, essi sono anche simili tra loro.

È facile dimostrare che *due insiemi ordinati hanno lo stesso tipo d'ordine allora e solo allora quando essi sono simili; di maniera che delle due formole*

(4) $$\overline{M} = \overline{N}, \qquad M \simeq N$$

una è sempre conseguenza dell'altra.

Se in un tipo d'ordine $\overline{M}$ si fa ancora astrazione dall'ordine degli elementi, si ottiene (§ 1) il numero cardinale $\overline{\overline{M}}$ dell'insieme ordinato M, che è ad un tempo il numero cardinale del tipo d'ordine $\overline{M}$.

Da $\overline{M} = \overline{N}$ segue sempre $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, cioè insiemi ordinati dello stesso tipo hanno sempre la stessa potenza o numero cardinale; la similitudine di insiemi ordinati ne porta sempre la equivalenza. Per lo contrario due insiemi ordinati possono essere equivalenti, senza essere simili.

Per rappresentare i tipi d'ordine, faremo uso delle lettere minuscole dell'alfabeto greco. Se α è un tipo ordinatore, con

(5) $$\overline{\alpha}$$

intendiamo il corrispondente numero cardinale.

I tipi ordinatori di insiemi finiti semplicemente ordinati non offrono alcun particolare interesse. Perchè facilmente si dimostra, che per uno stesso numero cardinale finito ν tutti gli insiemi semplicemente ordinati sono simili tra loro, e però hanno uno stesso tipo. I tipi ordinatori finiti sono perciò soggetti alle stesse leggi dei numeri cardinali finiti, e per rappresentare gli elementi è lecito far uso degli stessi segni 1, 2, 3, ... ν, ... sebbene questi siano da ritenersi diversi dai numeri cardinali.

Ben diverse sono le cose per i *tipi ordinatori transfiniti*; perchè per uno stesso numero cardinale transfinito vi sono innumerevoli tipi diversi di insiemi semplicemente ordinati, i quali nella loro totalità costituiscono una particolare « *classe di tipi* ».

Ognuna di queste classi di tipi è quindi determinata da un numero cardinale transfinito a, che è comune a tutti i tipi appartenenti alla classe; perciò noi la chiamiamo brevemente classe tipica $[a]$.

La classe che naturalmente ci si presenta la prima, di cui la trattazione completa deve essere l'immediato scopo della teoria degli insiemi transfiniti, è la classe tipica $[\aleph_0]$, la quale abbraccia tutti i tipi col numero cardinale transfinito minimo $\aleph_0$.

Dobbiamo ben distinguere dal numero cardinale a, che *determina* la classe tipica $[a]$, quel numero cardinale a', che *alla sua volta è determinato* dalla classe tipica $[a]$; questo è il numero cardinale, che spetta (§ 1) alla classe tipica $[a]$ in quanto questa rappresenta *un ben definito insieme, i cui elementi sono tutti i tipi* α *col numero cardinale* a. Vedremo che a' è diverso da a e precisamente è sempre maggiore di a.

Se in un insieme ordinato M si invertono tutte le relazioni di posto dei suoi elementi, in guisa che dappertutto un elemento superiore diventa inferiore, ed uno inferiore diventa superiore, si ottiene nuovamente un insieme ordinato, che denotiamo con

(6) $$^*M$$

e chiamiamo l'« *inverso* » di M.

Se $\alpha = \overline{\overline{M}}$, denotiamo il tipo ordinatore di $^*M$ con

(7) $$^*\alpha.$$

Può avvenire che sia $^*\alpha = \alpha$, come p. es. nei tipi finiti, o nel tipo dell'insieme R di tutti i numeri razionali maggiori di 0 e minori di 1 nel loro ordine naturale, che noi studieremo denotandolo con η.

Osserviamo inoltre, che due insiemi ordinati simili possono essere rappresentati l'uno sull'altro o in una sola maniera o in più maniere;

nel primo caso il corrispondente tipo è simile a sè stesso solo in una maniera, nel secondo in più maniere.

Così non solo tutti i tipi finiti, ma anche i tipi degli insiemi transfiniti « ben ordinati », dei quali più tardi ci occuperemo e che noi chiamiamo numeri ordinali transfiniti, sono di tal sorta da ammettere una sola rappresentazione in sè stessi. All'opposto il tipo η è simile a sè stesso in innumerevoli maniere.

Vogliamo chiarire questa differenza con due semplici esempi.

Con ω intendiamo il tipo d'un insieme ben ordinato

$$(e_1, e_2, \dots, e_\nu, \dots)$$

in cui

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

e dove ν è rappresentante di tutti i numeri cardinali finiti.

Un altro insieme ben ordinato

$$(f_1, f_2, \dots, f_\nu, \dots)$$

colla condizione

$$f_\nu \prec f_{\nu+1},$$

dello stesso tipo ω, può evidentemente essere « rappresentato » sul precedente soltanto coll'assumere e_ν ed f_ν come elementi corrispondenti. Perchè l'elemento e_1 del primo di posto infimo deve nella rappresentazione essere coordinato all'elemento infimo f_1 del secondo, e così l'elemento e_2 di posto successivo ad e_1 deve essere coordinato all'elemento f_2 di posto successivo ad f_1, ecc.

Ogni altra relazione reciprocamente univoca dei due insiemi equivalenti $\{e_\nu\}$ e $\{f_\nu\}$ non è una « rappresentazione » nel senso che abbiamo sopra stabilito per la teoria dei tipi.

Prendiamo ora un insieme ordinato della forma

$$\{e_{\nu'}\},$$

dove ν' è rappresentante di tutti i numeri interi finiti positivi e negativi, incluso lo 0, e dove si ha parimenti

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Questo insieme non ha alcun elemento di posto infimo, nè alcuno di posto supremo. Il suo tipo, secondo la definizione di somma che sarà data al § 8, è

$$^*\omega + \omega.$$

Esso è simile a sè stesso in innumerevoli maniere. Infatti consideriamo un insieme dello stesso tipo

$$\{f_{\nu'}\},$$

dove

$$\nu' < f_{\nu'+1};$$

i due insiemi ordinati possono essere rappresentati l'uno sull'altro, in guisa che all'elemento $e_{\nu'}$ del primo corrisponda l'elemento $f_{\nu'_0+\nu'}$ del secondo, essendo ν'_0 un determinato fra i numeri ν'. Per l'arbitrarietà di ν'_0 abbiamo dunque qui infinite rappresentazioni.

L'idea qui sviluppata di « tipo ordinatore » quando in ugual maniera sia trasportata agli « insiemi più volte ordinati », accanto all'idea di « numero cardinale o potenza » introdotta nel § 1, abbraccia tutto il « numerabile » che mai si possa pensare, e non ammette in questo senso alcuna ulteriore generalizzazione. Essa non contiene nulla di arbitrario, ma è la naturale estensione dell'idea di numero. *Merita quì di essere particolarmente rilevato, che il criterio di eguaglianza* (4) *segue con assoluta necessità dall'idea di tipo ordinatore e però non ammette cambiamento di sorta.* Nell'avere mal compreso questa circostanza è da ricercarsi la causa fondamentale dei gravi errori, che si trovano nell'opera del sig. G. Veronese: « Grundzüge der Geometrie, Deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894 ».

Là è spiegato a pag. 30 il « numero di un gruppo ordinato », che coincide del tutto con ciò che noi abbiamo chiamato « tipo d'ordine di un insieme semplicemente ordinato » (Zur Lehre von Transfiniten, Halle 1890, pag. 68-75, estratto dal Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik dell'anno 1887).

Ma il sig. V. crede di dover fare un'aggiunta al criterio dell'uguaglianza. Egli dice a pag. 27 dell'edizione originale italiana: « Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell'altro, sono uguali ».

Questa definizione dell'uguaglianza contiene un *circolo* e perciò diventa un *non senso.*

Che intende egli mai colla sua aggiunta *non uguale ad una parte dell'altro*? Per rispondere a questa domanda, bisogna anzitutto sapere quando due numeri sono uguali o non uguali. Quindi *la sua definizione dell'uguaglianza* (fatta astrazione dalla sua arbitrarietà) *presuppone una definizione dell'uguaglianza, che nuovamente presuppone una definizione dell'uguaglianza, per cui occorre di nuovo sapere che cosa è uguale e che cosa disuguale, ecc. ecc. all'infinito.*

Dopo che il sig. V. in tal maniera ha, per così dire, volontariamente abbandonato il fondamento indispensabile per confrontare i nu-

meri, non fa meraviglia la sregolatezza colla quale egli ulteriormente opera coi suoi numeri pseudotransfiniti, ed ascrive a questi proprietà, che non possono possedere per la semplice ragione che essi, nella forma da lui imaginata, non hanno esistenza di sorta a meno di quella che hanno sulla carta, ove sono scritti. Quindi si capisce anche la sorprendente rassomiglianza che riattacca le sue imagini di numeri ai « numeri infiniti » eminentemente assurdi di FONTENELLE nella sua « Géométrie de l'infini, Paris 1727 ».

Da poco tempo anche il sig. W. KILLING, nel suo « Index Lectionum » dell'Accademia di Münster (per il 1895-96), ha espresso le sue obbiezioni contro la base del libro del sig. VERONESE.

§ 8.

Addizione e moltiplicazione dei tipi d'ordine.

L'insieme (M, N) somma di due insiemi M ed N, quandò questi sono ordinati, si può pure riguardare come un insieme ordinato, nel quale le relazioni di posto degli elementi di M fra loro, e così pure le relazioni di posto degli elementi di N fra loro, son rimaste le stesse rispettivamente come in M ed in N, inoltre tutti gli elementi di M hanno posto più basso di tutti gli elementi di N. Se M' ed N' sono altri due insiemi ordinati, $M \simeq M'$, $N \simeq N'$, è eziandio $(M, N) \simeq (M', N')$; il tipo ordinatore di (M, N) dipende dunque soltanto dai tipi ordinatori $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$; quindi noi definiamo:

$$\alpha + \beta = \overline{(M, N)}. \tag{1}$$

Nella somma $\alpha + \beta$, α si dice l'« *augendus* » e β l'« *addendus* ».

Per tre tipi qualunque vige la legge associativa, facile a dimostrarsi,

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma. \tag{2}$$

Per lo contrario, la legge commutativa non è valida in generale per l'addizione di tipi. Ciò si vede già nel seguente semplice esempio.

Se ω è il tipo menzionato al § 7 dell'insieme ben ordinato

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \qquad e_\nu \prec e_{\nu+1},$$

$1 + \omega$ non è uguale a $\omega + 1$.

Perchè, se f è un nuovo elemento, si ha per la (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)},$$
$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

Ma l'insieme

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \dots, e_\nu, \dots)$$

è simile all'insieme E; dunque

$$1 + \omega = \omega .$$

Invece gli insiemi E e (E, f) non sono simili, poichè il primo non ha alcun termine di posto supremo, e il secondo ha il termine di posto supremo f. Quindi $\omega + 1$ è diverso da $\omega = 1 + \omega$.

Da due insiemi ordinati M ed N coi tipi α e β si può ricavare un insieme ordinato S nella maniera seguente: in N al posto d'ogni elemento n si sostituisce un insieme ordinato M_n, che ha lo stesso tipo α di M, cioè

(3) $$\overline{M_n} = \alpha ,$$

indi per ciò che riguarda l'ordine di

(4) $$S = \{M_n\}$$

si fanno le convenzioni seguenti:

1) due elementi qualunque di S che appartengono ad uno stesso insieme M_n, conservano in S la stessa relazione di posto che in M_n,

2) due elementi qualunque di S, che appartengono a due insiemi diversi M_{n_1} e M_{n_2}, prendono in S la relazione di posto, che n_1 ed n_2 hanno in N.

Il tipo ordinatore di S dipende, come è facile a vedersi, dai tipi α e β; noi definiamo:

(5) $$\alpha \cdot \beta = \overline{S} .$$

In questo prodotto α si dice il « *multiplicandus* » e β il « *multiplicator* ».

Stabilita una rappresentazione qualunque di M su M_n, sia m_n l'elemento di M_n corrispondente all'elemento m di M. Allora noi possiamo anche scrivere

(6) $$S = \{m_n\} .$$

Assumiamo ora un terzo insieme ordinato $P = \{p\}$ col tipo ordinatore $\overline{P} = \gamma$; si ha per la (5)

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\{m_n\}} , \qquad \beta \cdot \gamma = \overline{\{n_p\}} ,$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \overline{\{(m_n)_p\}} , \qquad \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}} .$$

Ma i due insiemi ordinati $\{(m_n)_p\}$ e $\{m_{(n_p)}\}$ sono simili e vengono l'uno sull'altro rappresentati quando si riguardino come corrispondenti gli elementi $(m_n)_p$ e $m_{(n_p)}$.

Quindi per tre tipi α, β, γ sussiste la *legge associativa*

$$(7) \qquad (\alpha \,.\, \beta) \,.\, \gamma = \alpha \,.\, (\beta \,.\, \gamma).$$

Dalle (1) e (5) segue anche facilmente la *legge distributiva*

$$(8) \qquad \alpha \,.\, (\beta + \gamma) = \alpha \,.\, \beta + \alpha \,.\, \gamma,$$

però soltanto nella forma qui scritta, ove *il fattore binomio fa da moltiplicatore.*

Per lo contrario la *legge commutativa* nella moltiplicazione dei tipi, come nell'addizione, non vale in generale. Ad esempio $2 \,.\, \omega$ e $\omega \,.\, 2$ sono tipi diversi; infatti si ha per la (5)

$$2 \,.\, \omega = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \ldots; e_\nu, f_\nu; \ldots)} = \omega;$$

per lo contrario è

$$\omega \,.\, 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu; f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)}$$

evidentemente diverso da ω.

Confrontando le definizioni date al § 3 delle operazioni fondamentali per i numeri cardinali con quelle qui stabilite per i tipi ordinatori, si riconosce facilmente, che il numero cardinale della somma di due tipi è uguale alla somma dei numeri cardinali di ciascun tipo, e che il numero cardinale del prodotto di due tipi è uguale al prodotto dei numeri cardinali di ciascun tipo. Ogni equazione adunque fra tipi d'ordine formata colle due operazioni fondamentali sussiste ancora quando in essa al posto di tutti i tipi si sostituiscono i loro numeri cardinali.

§ 9.

Il tipo d'ordine η dell'insieme R di tutti i numeri razionali, maggiori di 0 e minori di 1, nel loro ordine naturale.

Per R intendiamo, come al § 7, il sistema di tutti i numeri razionali $\frac{p}{q}$ (p e q interi primi tra loro), che sono > 0 e < 1, *nel loro ordine naturale,* cioè quello in cui il posto è determinato dalla grandezza del numero. Denotiamo poi con η il tipo ordinatore di R:

$$(1) \qquad \eta = \overline{R}.$$

Ma noi, al § 7, abbiamo anche indicato per lo stesso insieme un altro ordine, nel quale lo chiamiamo R_0, dove il posto è determinato in prima linea dalla grandezza di $p+q$, ed in seconda linea, e precisamente per quei numeri razionali per cui $p+q$ ha uno stesso valore, dalla grandezza di $\frac{p}{q}$. R_0 ha la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω:

(2) $$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) \quad \text{dove} \quad r_\nu \prec r_{\nu+1},$$

(3) $$\overline{R_0} = \omega.$$

Siccome R ed R_0 differiscono soltanto per l'ordine degli elementi, così essi hanno lo stesso numero cardinale, e siccome evidentemente $\overline{\overline{R_0}} = \aleph_0$, così anche

(4) $$\overline{\overline{R}} = \overline{\eta} = \aleph_0.$$

Il tipo η appartiene dunque alla classe tipica $[\aleph_0]$.

Osserviamo in secondo luogo, che in R non si trova nè un elemento di posto infimo, nè un elemento di posto supremo.

In terzo luogo R ha la proprietà che tra due suoi elementi qualunque cadono altri elementi; questa proprietà viene da noi espressa colle parole: *R è dappertutto denso.*

Vogliamo ora dimostrare che queste tre proprietà caratterizzano il tipo η di R, in guisa che sussiste il seguente teorema:

« Se un insieme semplicemente ordinato M soddisfa alle tre condizioni:

1) $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$,

2) M non ha elementi nè di posto infimo nè di posto supremo,

3) M è dappertutto denso;

il tipo ordinatore di M è uguale a η:

$$\overline{M} = \eta \text{ ».}$$

Dimostrazione. — Per la condizione 1) M si può mettere sotto la forma di un insieme ben ordinato del tipo ω; presa come base una tale forma, denotiamo M con M_0 e poniamo

(5) $$M_0 = (m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots).$$

Ora noi dobbiamo dimostrare che

(6) $$M \simeq R,$$

cioè dobbiamo dimostrare che M si può *rappresentare* su R in guisa

che la relazione di posto tra due elementi qualunque in M è la stessa che la relazione di posto tra i due elementi corrispondenti in R.

All'elemento r_1 in R sia fatto corrispondere l'elemento m_1 in M.

r_2 ha una determinata relazione di posto rispetto a r_1; per la condizione 2) vi sono infiniti elementi m_ν di M, che hanno rispetto a m_1 le stesse relazioni di posto, che ha in R r_2 rispetto a r_1; *tra essi* scegliamo quello che ha in M_0 l'indice minimo, denotiamolo con m_{ι_2} e coordiniamolo a r_2.

r_3 ha determinate relazioni di posto rispetto ad r_1 e r_2; per le condizioni 2) e 3) vi sono infiniti elementi m_ν di M, che hanno in M le stesse relazioni di posto rispetto a m_1 e m_{ι_2}, che ha r_3 in R rispetto a r_1 e r_2; tra essi scegliamo quello, e sia m_{ι_3}, che ha in M_0 l'indice minimo, e coordiniamolo a m_3.

Secondo la stessa legge imaginiamo continuato il processo di coordinazione; dopo che ai ν elementi

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$$

di R furono assegnati come imagini in M determinati elementi

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots m_{\iota_\nu}$$

i quali in M hanno fra loro le stesse relazioni di posto che i corrispondenti in R, si assegni come imagine dell'elemento $r_{\nu+1}$ di R l'elemento $m_{\iota_{\nu+1}}$ di M, che ha in M_0 l'indice minimo e che rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\nu}$$

ha in M le stesse relazioni di posto, che ha $r_{\cdot+1}$ in R rispetto a r_1, $r_2, r_3, \ldots, r_\nu$.

In questa maniera noi abbiamo per tutti gli elementi r_ν di R assegnati come imagini determinati elementi m_{ι_ν} di M e gli elementi m_{ι_ν} hanno in M lo stesso ordine che i corrispondenti elementi r_ν hanno in R.

Ma deve ancora essere dimostrato che gli elementi m_{ι_ν} comprendono tutti gli elementi m_ν di M, ovvero, ciò che è lo stesso, che la serie

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_\nu, \ldots$$

è soltanto una permutazione della serie

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

Noi dimostriamo ciò con una *induzione completa*, facendo vedere

che se nella rappresentazione si impiegano gli elementi m_1, m_2, ... m_ν *lo stesso avviene anche per l'elemento seguente* $m_{\nu+1}$.

Sia λ così grande che tra gli elementi

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda}$$

si trovino gli elementi

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu,$$

(i quali per ipotesi compariscono nella rappresentazione). Può avvenire che tra essi si trovi anche $m_{\nu+1}$, e allora $m_{\nu+1}$ viene impiegato nella rappresentazione.

Ma se $m_{\nu+1}$ *non si trova fra gli elementi*

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_\lambda},$$

$m_{\nu+1}$ ha rispetto a questi elementi dentro M una determinata relazione di posto; la stessa relazione di posto rispetto a r_1, r_2, ..., r_λ hanno in R infiniti elementi di R, tra questi sia $r_{\lambda+\sigma}$ quello che in R_0 ha l'indice minimo.

Allora $m_{\nu+1}$, come è facile persuadersi, ha in M rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

la stessa relazione di posto, che ha $r_{\lambda+\sigma}$ in R rispetto a

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\lambda+\sigma-1}.$$

Siccome m_1, m_2, ... m_ν già sono comparsi nella rappresentazione, così è $m_{\nu+1}$ l'elemento dotato del minimo indice in M_0 che ha questa relazione di posto rispetto a

$$m_1, m_{\iota_2}, \ldots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}.$$

Per conseguenza seguendo la nostra legge di corrispondenza si ha

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

Dunque anche in questo caso l'elemento $m_{\nu+1}$ viene ad essere rappresentato, e precisamente è $r_{\lambda+\sigma}$ il suo corrispondente in R.

E così noi vediamo, che col nostro modo di corrispondenza *tutto l'insieme* M viene ad essere rappresentato su tutto l'insieme R; M ed R sono insiemi simili, c. v. d.

Dal teorema ora dimostrato si deducono a mo' d'esempio i seguenti:

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri razionali negativi e positivi, incluso lo zero, nel loro ordine naturale. »

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri razionali maggiori di a e minori di b, nel loro ordine naturale, dove a e b son due numeri reali qualunque, e $a < b$. »

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri reali algebrici nel loro ordine naturale. »

« η è il tipo ordinatore dell'insieme di tutti i numeri reali algebrici, maggiori di a e minori di b, nel loro ordine naturale, dove a e b sono due numeri reali qualunque, e $a < b$. »

Infatti tutti questi insiemi ordinati soddisfano alle tre condizioni richieste per M dal nostro teorema (*Crelle's Journal*, Bd. 77, pag. 258).

Consideriamo inoltre degli insiemi che, secondo le definizioni del § 8, hanno i tipi $\eta + \eta$, $\eta\eta$, $(1 + \eta)\eta$, $(\eta + 1)\eta$, $(1 + \eta + 1)\eta$, per essi sono ancora soddisfatte quelle tre condizioni. Quindi abbiamo i teoremi:

(7) $$\eta + \eta = \eta,$$
(8) $$\eta\eta = \eta,$$
(9) $$(1 + \eta)\eta = \eta,$$
(10) $$(\eta + 1)\eta = \eta,$$
(11) $$(1 + \eta + 1)\eta = \eta.$$

Applicando più volte la (7) e la (8) si trova per ogni numero finito ν:

(12) $$\eta \, . \, \nu = \eta,$$
(13) $$\eta^\nu = \eta.$$

Per lo contrario, per $\nu > 1$, i tipi $1 + \eta$, $\eta + 1$, $\nu \, . \, \eta$, $1 + \eta + 1$ sono, come si vede facilmente, diversi fra loro e ancora diversi da η. D'altra parte è

(14) $$\eta + 1 + \eta = \eta,$$

ma $\eta + \nu + \eta$ per $\nu > 1$ è diverso da η.

Finalmente conviene ancora mettere in rilievo che

(15) $$^*\eta = \eta.$$

§ 10.

Le serie fondamentali contenute in un insieme ordinato transfinito.

Prendiamo a considerare un insieme M transfinito, semplicemente ordinato, qualunque. Ogni insieme parziale di M è esso pure un insieme ordinato. Per lo studio del tipo $\overline{M}$ si manifestano particolarmente utili

quegli insiemi parziali di *M*, che appartengono ai tipi ω ed $^*\omega$; noi li chiameremo « *serie fondamentali di primo ordine contenute in M* » e precisamente i primi (quelli del tipo ω) « *ascendenti* », gli altri (del tipo $^*\omega$) « *discendenti* ».

Siccome noi qui ci limitiamo alla considerazione delle serie fondamentali *del primo ordine* (in studii successivi ne verranno in campo anche altre d'ordine superiore), così noi le chiameremo qui semplicemente « *serie fondamentali* ».

Una « serie fondamentale » ascendente ha dunque la forma

$$\{a_\nu\}, \quad \text{ove} \quad a_\nu < a_{\nu+1}, \tag{1}$$

una « serie fondamentale discendente » è della forma

$$\{b_\nu\}, \quad \text{ove} \quad b_\nu > b_{\nu+1}. \tag{2}$$

In tutte le nostre considerazioni ν (come pure anche $\varkappa$, λ, μ) ha il significato d'un numero cardinale finito qualunque oppure anche di un tipo finito rispettivamente d'un numero ordinale finito.

Chiamiamo « *compartecipanti* » (zusammengehörig) due serie fondamentali ascendenti $\{a_\nu\}$ e $\{a'_\nu\}$ contenute in *M*, e scriviamo

$$\{a_\nu\} \,||\, \{a'_\nu\}, \tag{3}$$

quando, sia per ogni elemento a_ν esistono elementi a'_λ, tali che

$$a_\nu < a'_\lambda,$$

sia ancora per ogni elemento a'_ν esistono elementi a_μ, tali che

$$a'_\nu < a_\mu.$$

Chiamiamo « *compartecipanti* » due serie fondamentali discendenti $\{b_\nu\}$ e $\{b'_\nu\}$ contenute in *M*, e scriviamo

$$\{b_\nu\} \,||\, \{b'_\nu\}, \tag{4}$$

quando per ogni elemento b_ν esistono elementi b'_λ, tali che

$$b_\nu > b'_\lambda,$$

e per ogni elemento b'_ν esistono elementi b_μ, tali che

$$b'_\nu > b_\mu.$$

Una serie fondamentale ascendente $\{a_\nu\}$ ed una discendente $\{b_\nu\}$ si chiamano « *compartecipanti* » e si scrive

$$\{a_\nu\} \,||\, \{b_\nu\},$$

1) se per tutti i ν e μ si ha

$$a_\nu < b_\mu ,$$

2) se in M esiste *al più* un elemento m_0 (cioè o uno solo o nessuno) tale che per tutti i ν sia

$$a_\nu < m_0 < b_\nu .$$

Ciò posto, sussistono i teoremi:

A. « *Se due serie fondamentali sono compartecipanti con una terza, esse sono anche compartecipanti tra loro.* »

B. « *Due serie fondamentali collo stesso verso, di cui l'una sia parte dell'altra, sono sempre compartecipanti.* »

Quando in M esiste un elemento m_0, il quale rispetto alla serie ascendente $\{a_\nu\}$ ha un posto tale, che

1) per ogni ν

$$a_\nu < m_0 ,$$

2) per ogni elemento m di M, che sia $< m_0$, esiste un numero ν_0 siffatto che

$$a_\nu > m \quad \text{per} \quad \nu \geqq \nu_0 ,$$

noi chiamiamo m_0 « *elemento limite di* $\{a_\nu\}$ *in* M » e nello stesso tempo un « *elemento principale di* M ».

Similmente noi chiamiamo ancora m_0 un « elemento principale di M » e ad un tempo « elemento limite di b_ν in M » quando sono soddisfatte le condizioni:

1) per ogni ν

$$b_\nu > m_0 ,$$

2) per ogni elemento m di M, che sia $> m_0$, esiste un certo numero ν_0 siffatto che

$$b_\nu < m \quad \text{per} \quad \nu \geqq \nu_0 .$$

Una serie fondamentale *non può mai avere più di un* elemento limite in M, ma M ha in generale molti elementi principali.

È facile persuadersi della verità dei seguenti teoremi:

C. « *Se una serie fondamentale ha un elemento limite in* M, *tutte le serie fondamentali con essa compartecipanti hanno lo stesso elemento limite in* M. »

D. « *Se due serie fondamentali (collo stesso verso o con versi opposti) hanno uno stesso elemento limite in* M, *esse sono compartecipanti.* »

Siano M ed M' due insiemi ordinati simili, per guisa che

(6) $$\overline{M} = \overline{M'},$$

e pongasi a fondamento una rappresentazione qualunque dei due insiemi; sussistono, come si vede facilmente, i seguenti teoremi:

E. « *Ad ogni serie fondamentale in M corrisponde come imagine una serie fondamentale in M', ed inversamente; ad ogni serie ascendente una ascendente; ad ogni discendente una discendente; a serie fondamentali compartecipanti in M corrispondono come imagini serie fondamentali compartecipanti in M', e viceversa.* »

F. « *Se una serie fondamentale in M possiede un elemento limite in M, anche la serie fondamentale corrispondente in M' possiede un elemento limite in M', e inversamente; e questi due elementi limiti sono imagini l'uno dell'altro nella rappresentazione.* »

G. « *Agli elementi fondamentali di M corrispondono come imagini elementi fondamentali di M', e inversamente.* »

Se un insieme M consta di soli elementi principali, per modo che ognuno dei suoi elementi è un elemento principale, noi lo chiamiamo « *un insieme condensato* » (insichdichte Menge).

Se per ogni serie fondamentale in M esiste un elemento limite in M, noi chiamiamo M « *un insieme chiuso* » (abgeschlossene Menge).

Un insieme che è ad un tempo condensato e chiuso dicesi « *insieme perfetto* ».

Se un insieme ha uno di questi tre predicati, lo stesso predicato spetta eziandio ad ogni insieme simile; quindi gli stessi predicati si possono anche attribuire ai corrispondenti tipi ordinatori, e così vi sono « *tipi condensati* », « *tipi chiusi* », « *tipi perfetti* », come pure « *tipi densi dappertutto* » (§ 9).

Cosi ad es. η è un tipo « condensato »; esso è anche, come fu mostrato al § 9, « dappertutto denso », ma non « chiuso ».

ω ed $^*\omega$ non hanno elementi principali (unità principali); per lo contrario $\omega + \nu$ e $\nu + {}^*\omega$ hanno ciascuno un elemento principale e sono « tipi chiusi ».

Il tipo $\omega . 3$ ha due elementi principali, ma non è « chiuso »; il tipo $\omega . 3 + \nu$ ha tre elementi principali ed è « chiuso ».

§ 11.

Il tipo ordinatore θ del continuo lineare X.

Passiamo allo studio del tipo ordinatore dell'insieme $X = \{x\}$ di tutti i numeri reali x, che sono $\geqq 0$ e $\leqq 1$, nel loro ordine naturale, per

guisa che per due elementi arbitrari x e x' si ha

(1) $$x < x' \quad \text{quando} \quad x < x'.$$

La notazione di questo tipo sia

$$\overline{\overline{X}} = \theta.$$

Dagli elementi della teoria dei numeri razionali e irrazionali si sa che ogni serie fondamentale $\{x_\nu\}$ in X ha un limite x_0 in X, e che anche inversamente ogni elemento x di X è elemento limite di serie compartecipanti in X. Perciò X è un « *insieme perfetto* » e θ un « *tipo perfetto* ».

Ma con ciò θ non è ancora sufficientemente caratterizzato; noi dobbiamo oltre a ciò tener presente la seguente proprietà di X.

X contiene come insieme parziale l'insieme R, studiato al § 9, di tipo ordinatore η, e *particolarmente in modo che tra due elementi qualunque x_0 ed x_1 di X* trovano posto elementi di R.

Ora dobbiamo dimostrare che *queste proprietà prese insieme* caratterizzano completamente il tipo ordinatore θ del continuo lineare X, per guisa che sussiste il teorema:

« *Se un insieme ordinato M ha tale impronta che:* 1) *esso è perfetto,* 2) *in esso è contenuto un insieme S col numero cardinale $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$, il quale ha siffatta relazione con M che tra due elementi qualsivogliano m_0 ed m_1 di M trovano posto elementi di S, si ha $\overline{\overline{M}} = \theta$*.

Dimostrazione. — Se S contenesse un elemento supremo ed un infimo, questi in causa della 2) avrebbero lo stesso carattere anche come elementi di M; noi potremmo allora sopprimerli da S senza che perciò quest'insieme perda la relazione con M espressa nella 2).

Noi supponiamo perciò fin da principio che S sia senza elemento supremo od infimo; allora S ha, per il § 9, il tipo ordinatore η. Perchè, essendo S una parte di M, tra due elementi arbitrarii s_0 e s_1 di S debbono per la 2) trovar posto altri elementi di S; inoltre si ha per la 2) $\overline{\overline{S}} = \aleph_0$. I due insiemi S ed R sono dunque « *simili* »,

(2) $$S \simeq R.$$

Imaginiamo ora stabilita una qualunque « *rappresentazione* » di R su S; asseriamo che essa fornisce ad un tempo una « *rappresentazione* » di X su M, e precisamente nella maniera che segue.

Tutti gli elementi di X, che appartengono ad un tempo all'insieme R, si fanno corrispondere come imagini a quegli elementi di M, che sono ad un tempo elementi di S e che, per la rappresentazione stabilita di R su S, corrispondono a quegli elementi di R.

Ma se x_0 è un elemento di X non appartenente a R, esso si può riguardare come elemento limite d'una serie fondamentale $\{x_\nu\}$ contenuta in X, la quale può essere sostituita con una serie fondamentale $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ compartecipante con essa contenuta in R. A quest'ultima corrisponde come imagine una serie fondamentale $\{s_{\lambda_\nu}\}$ in S e M, la quale per la 1) è limitata da un solo elemento m_0 in M, che non appartiene ad S (F, § 10). Questo elemento m_0 in M (che rimane lo stesso, quando in luogo delle serie fondamentali $\{x_\nu\}$ e $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ se ne pensano altre limitate dallo stesso elemento x_0 in X [E, C, D, § 10]) serve come imagine di x_0 in X. Inversamente, ad ogni elemento m_0 di M, che non si trova in S, corrisponde un ben determinato elemento x_0 di X, che non appartiene ad R, e del quale m_0 è l'imagine.

In questa maniera viene stabilita una relazione reciprocamente univoca tra X ed M, la quale bisogna dimostrare che costituisce una « rappresentazione » di questi insiemi.

Ciò sussiste anzitutto per quegli elementi di X ed M che appartengono ad un tempo agli insiemi R ed S rispettivamente.

Confrontiamo ora un elemento r di R con un elemento x_0 di X non appartenente ad R; i corrispondenti elementi di M siano s ed m_0.

Se è $r < x_0$, esiste una serie fondamentale $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ ascendente limitata da x_0, e per un certo valore ν_0 si ha

$$r > r_{\varkappa_\nu} \quad \text{per} \quad \nu \overline{\overline{>}} \nu_0 .$$

L'imagine di $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ in M è una serie fondamentale ascendente $\{s_{\lambda_\nu}\}$ limitata in M da m_0, e si ha (§ 10) in primo luogo $s_{\lambda_\nu} < m_0$ per ogni ν ed in secondo luogo $s < s_{\lambda_\nu}$ per $\nu \overline{\overline{>}} \nu_0$, perciò (§ 7) $s < m_0$.

Se è $r > x_0$, si conchiude similmente che $s > m_0$.

Consideriamo finalmente due elementi x_0 ed x'_0 non appartenenti ad R e gli elementi m_0 ed m'_0 ad essi corrispondenti in M; con un procedimento analogo si dimostra che, se $x < x'_0$ si ha $m_0 < m'_0$.

Con ciò risulta dimostrata la similitudine di X ed M, e quindi si ha

$$\overline{M} = \theta.$$

Halle, marzo 1895.

Nuove pubblicazioni.

N. Jadanza. — *Rivista di topografia e catasto.* Torino. Associazione annua L. 12.

G. Pesci. — *Trattato elementare di trigonometria piana e sferica.* Livorno, Giusti, 1895, pag. 313, L. 4.

— *Appendice al trattato elementare di trigonometria.* Livorno, Giusti, 1895, pag. 77, L. 1.

G. Testi. — *Corso di Matematiche.* Vol. III. *Geometria elementare,* Parte I. Livorno, Giusti, 1896. Prezzo delle parti I e II L. 3,50.

D. Gambioli. — *Raccolta di esercizi di aritmetica generale, algebra e meccanica elementare.* Bologna, Zanichelli, 1896, pag. 496, L. 4.

O. Biermann. — *Elemente der höheren Mathematik.* Leipzig, Teubner, 1895, pag. 381.

G. Riboni. — *Elementi di Geometria, ad uso delle scuole secondarie inferiori,* corredati da una raccolta di esercizi per cura di D. Gambioli. Bologna, Zanichelli, 1896, pag. 278, L. 2.

G. Ingrami. — *Elementi di Algebra, ad uso delle scuole secondarie superiori.* Bologna, 1895, p. 222, L. 3.

— *Calcolo numerico e letterale ad uso delle scuole secondarie inferiori.* Bologna, 1895, pag. 134, L. 2.

E. D'Ovidio. — *Geometria analitica.* Torino, Bocca, 1896, p. XVI+444, L. 10.

E. Webber. — *Applicazioni geometriche e analitiche di Calcolo differenziale ed integrale.* Milano, Rechiedei, 1895, pag. 263, L. 3,50.

A. Tournois. — *Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique.* Paris (sans date), pag. 208, prix 4 fr., 50.

Gérard. — *Bulletin de Mathématiques élémentaires.* Paris. Abonnement pour l'Italie 6 frs.

F. Klein. *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert.* Leipzig, Teubner, 1895. 8° V-66 p. e 2 tav.

Questo opuscolo è il riassunto di un corso di lezioni tenuto da F. Klein a Gottinga nell'estate 1894. Esso ci presenta, risolta coi mezzi più facili e più semplici di cui dispone l'analisi, una questione che è fondamentale per la geometria elementare, ma che questa per sè sola non è atta ad esaurire; quella cioè di determinare quali siano i problemi geometrici risolubili colla riga e col compasso.

Dopo aver mostrato (Introduzione), come un'espressione analitica possa costruirsi colla riga e col compasso sempre e soltanto quando essa sia radice d'un'equazione algebrica risolubile con un numero finito di estrazioni di radici quadratiche, l'autore tratta (Parte I) della costruzione delle espressioni algebriche. Fa vedere anzitutto (Cap. I) che un'espressione costruibile geometricamente dev'essere radice d'una equazione irriducibile il cui grado sia una potenza di 2, e ne trae come conseguenze l'impossibilità di risolvere (Cap. 2) il problema di Delo e quello della trisezione dell'angolo, che si riducono all'equazione $x^3 = r$ dove $r = 2$ o $r = e^{i\varphi}$, e la determinazione (Cap. 3) della forma che deve avere il numero primo p perchè la circonferenza sia divisibile geometricamente in p parti eguali. Il processo di divisione viene (Cap. 4) effettivamente sviluppato pel caso di $p = 17$, e l'autore fa seguire alcuni cenni storici sulle costruzioni col solo compasso (Mascheroni), colla sola riga (Brianchon), colla riga e con un cerchio fisso (Poncelet, Steiner), mostrando come basti un unico cerchio fisso, insieme alla riga, per risolvere graficamente ogni equazione quadratica. Un ultimo capitolo (Cap. 5) è dedicato alle costruzioni algebriche mediante coniche o curve d'ordine superiore.

Passando poi (Parte II) ai numeri trascendenti, l'autore ne dimostra anzitutto (Cap. 1) l'esistenza sulle tracce di G. Cantor, indi, dopo alcune notizie storiche (Cap. 2) sulla quadratura del cerchio, espone (Cap. 3-4) le dimostrazioni date da Gordan (Math. Ann. T. 43) della trascendenza di e e π.

Un'appendice contiene un cenno sulla macchina integratrice (*Integraph*) di Abdank-Abakanowicz e sull'applicazione di questa al problema della quadratura del cerchio.

Modesto per la mole e per l'argomento, l'opuscolo che ci sta dinanzi è pregevolissimo per l'eleganza, la chiarezza e la potenza sintetica di vedute che distinguono gli scritti del dotto professore di Gottinga. E sarebbe desiderabile che tutti gli insegnanti di matematica delle scuole secondarie imparassero a conoscerlo, perchè vi apprenderebbero con lieve fatica le ragioni vere dei limiti che s'impongono naturalmente alla geometria elementare e della irresolubilità di certi problemi che entrano apparentemente nel campo di questa; nè più si ripeterebbe il caso, che ci si narra avvenuto di recente, d'un insegnante che esortava i giovani a concentrare i loro sforzi sulla quadratura del cerchio, colla speranza di un grosso premio promesso da un'Accademia... imaginaria!

Allo scopo appunto di rendere il lavoro del Klein più facilmente accessibile ai nostri matematici, il prof. F. Giudice ne ha intrapresa una versione italiana, di cui gli editori Rosenberg e Sellier di Torino hanno coraggiosamente assunto la pubblicazione. Di ciò va dato all'uno e agli altri sincera lode; poichè chi scrive o stampa di matematica in Italia non può attendere alcun compenso, tranne tutt'al più l'intima soddisfazione di aver fatto cosa utile e buona. Noi speriamo tuttavia che il nome dell'autore, la natura dell'argomento e la piccola mole del libro incoraggeranno il nostro pubblico matematico a far buon viso alla nuova pubblicazione, e che, come gl'insegnanti tedeschi sono accorsi numerosi ad ascoltare la parola dell'illustre maestro, così i nostri giovani professori vorranno tutti leggerne e meditarne lo scritto. È questo il migliore augurio che possiamo fare al traduttore ed agli editori.

Mantova, 22 settembre 1895

G. Vivanti.

Zum Infinitärcalcul.

Mit Befremden bemerke ich, dass Herr G. CANTOR in dem auf S. 104 des V Bandes Ihres Journals abgedrackten Briefe den Einwurf, welcher gegen den Infinitärcalcul von P. DU BOIS-REYMOND erhoben werden muss, auch gegen meine Darstellung desselben richtet. Und doch habe ich an allen Stellen, wo ichda von gehandelt habe, ausdrücklich gesagt, dass das System von Functionen, deren « Nullen » unter einander verglichen werden sollen, gehörig zu beschränken sei (1). Ich wähle unter den Functionen, welche bei $\lim x = +0$ den Grenzwerth $+0$ haben, jene Functionen $f(x)$ aus, welche die Eigenschaft haben, dass *der Quotient von je zweien von ihnen bei lim* $x = +0$ *einen* (endlichen oder unendlichen) *Grenzwerth hat.* Jeder solchen Function $f(x)$ werde ein Ding ingeordnet, das « die Null von $f(x)$ » heissen und mit $\mathrm{u}(f(x))$ bezeichnet werden mag. Ist $g(x)$ eine andere von diesen Functionen, so heisse $\mathrm{u}(f(x))$ gleich $\mathrm{u}(g(x))$, wenn der Quotient $f(x):g(x)$ bei $\lim x = +0$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerth hat, dagegen sei $\mathrm{u}(\mathrm{f}(x))$ grösser oder kleiner als $\mathrm{u}(g(x))$, je nachdem $f(x):g(x)$ bei $\lim x = +0$ den Grenzwerth $+0$ oder $+\infty$ hat. Nunmehr sind die Dinge $\mathrm{u}(f(x))$ zu Grössen (im Sinne von H. Grassmann) gemacht. Sollen unter den Grössen $\mathrm{u}\{f(x)\}$ Verknüpfungen vorgenommen werden, so muss das System der Functionen $f(x)$ noch weiter beschränkt werden.

Nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft ist es freilich nicht möglich, eine explicite Definition der obigen Functionensystems zu geben. Immerhin giebt es aber Systeme von Functionen, welche die genannte Beschaffenheit besitzen. Man braucht nur von den Ausdrücken, welche rational gebildet sind aus einer endlichen Anzahl von positiven Potenzen der Functionen

$$x\,, \quad \lambda_1(x) = -1 : \mathrm{l}x\,, \quad \lambda_2(x) = -1 : \mathrm{l}(\lambda_1(x)) \ldots\ldots \left[\lambda_n(x) = -1 : \mathrm{l}(\lambda_{n-1}(x))\right]$$

---

(1) Vgl. z. B. meines Vorles. ü. allgemeine Arithmetik I. S. 213 und dazu II. S. 325.

und der reciproken Werthe von

$$e^{1:x} = e_1(1:x) \qquad e_1\big(e_1[1:x]\big) = e_2(1:x) \quad \ldots\ldots \quad \big[e_1\big(e_{n-1}[1:x]\big) = e_n(1:x)\big]$$

jene zurückzubehalten, welche bei $\lim x = +0$ den Grenzwerth $+0$ haben (1).

Man wird freilich sagen, durch die vorstehenden Beschränkungen des den neuen Grössen zu Grunde liegenden Functionensystems büssen diese Grössen ihr haptsächliches Interesse ein. Das mag richtig sein. Allein darauf kommt es nicht an; von Bedeutung ist lediglich die Frage, ob solche Grössen zulässig seien. Und diese muss ich bejahen. Ist ja das Verfahren, nach welchem sie eingeführt werden, kein anderes, als das von Euclid im V Buch der Elemente angewandte, um zu den Verhältnissen der gleichartigen geometrischen Grössen zu gelangen. In der That ordnet er je zweien solchen Grössen bei gegebener Aufeinanderfolge ein Ding, ihr Verhältniss, zu und definirt sodann bloss die gleichen Verhaltnisse und das grössere Verhältniss unter je zweien ungleichen.

In dem soeben erwähnten, besonderen Systeme von « Nullen » erscheint neben den positiven Zahlen α als Exponenten der positiven Potenzen x^α die Grösse $\mathrm{u}\big(\lambda_1(x)\big)$, welche Herr Cantor a. a. O. mit j bezeichnet. Sie ist zufolge der obigen Definition kleiner als jede positive Zahl, also, da die Null und die negativen Zahlen im genannten Grössensysteme nicht vorkommen, sicher keine reelle Zahl. Daher ist, wenn man das Symbol x^j überhaupt gebrauchen will, zunächst dessen Bedeutung festzustellen. Solange als dies nicht geschehen ist, kann die scharfsinnige Erörterung des Herrn Cantor über jene Grösse j nicht überzeugend wirken.

Am 1 October 1895.

O. Stolz.

---

(1) Bekanntlich hat jeder solche Ausdruck bei $\lim x = +0$ einen Grenzwerth.

“ Association internationale pour l’avancement des Quaternions, et d’autres méthodes vectorielles ”

M.

Les notions mathémathiques liées au traitement direct de vecteurs et de fonctions vectorielles attirent de plus en plus l’attention des géomètres et des physiciens. Il y a cinquante ans environ les bases de la théorie des vecteurs furent amplement développées dans l’ouvrage de Hamilton : « *Elements of Quaternions* » et dans celui de Grassmann: « *Ausdehnungslehre* ». Dans sa seconde oeuvre monumentale Hamilton donna un calcul vectoriel complet et applicable a toutes sortes de problèmes et particulièrement aux problèmes géométriques et physiques. Ces deux systèmes qui se distinguent de toutes les autres méthodes mathématiques par leur richesse de transformations, leur généralité de traitement, leur simplicité d’expression et d’interprétation, n’ont pas été dûment appréciés et développés.

Cependant le besoin toujours croissant d’un calcul vectoriel ou du moins d’une manière d’écrire vectorielle compacte surtout en rapport avec le progrès considérable de la théorie de l’électricité a porté plus d’un savant des dernières années à introduire un nouveau système. Tous ces systèmes cependant ont beaucoup de commun avec ceux que Hamilton et Grassmann ont développés.

C’est pourquoi il nous parait que le temps est venu de réunir nos forces, afin que ceux qui cultivent cette branche importante de la science puissent apprendre à se connaître et que l’intérêt des autres mathématiciens puisse être excité et entretenu.

Poussés par ces considérations nous avons l’honneur de proposer l’organisation de ce que nous nommerons provisoirement: *Association internationale pour l’avancement des Quaternions et d’autres méthodes vectorielles.*

Une telle association pourrait faire beaucoup pour la propagation de l'analyse vectorielle. Un journal paraissant de temps à autre pourrait mettre les membres de l'association en contact avec les différentes formes de cette science et pourrait faciliter les discussions sur l'introduction et l'acceptation de nouvelles manières d'écrire.

Nous avons tâché de développer dans ce peu de lignes la tâche importante de la nouvelle association: il va sans dire que nous accueillerons avec empressement chaque observation qui puisse améliorer cette organisation. Inutile de dire que nous ne faisons que préparer le terrain; dès que l'association sera constituée, nous serons prêts à confier à des personnes plus compétentes que nous le soin de veiller à ses intérêts. Nous espérons de grand cœur que nos efforts seront sympathiques à tous les amis de cette branche des sciences mathématiques et que nous ne tarderons pas à recevoir les preuves de leur adhésion.

P. MOLENBROEK (la Haye, Pays-Bas).
S. KIMURA (Yale-University, U. S. A.)

Octobre, 1895.

NB. Nous prions ceux qui demeurent in Europe de s'adresser au premier signataire, et ceux qui demeurent en Amérique de s'adresser au second.

La R. d. M., mentre appoggia vivamente siffatto progetto, terrà informati i lettori del suo sviluppo.

Le forme geometriche prospettive.

Nota del Prof. Diego Fellini *(Forlì)*

L'illustre Prof. L. Cremona [1] chiama *prospettive*:

due punteggiate se sono sezioni di uno stesso fascio di raggi;

due fasci di raggi se proiettano una medesima punteggiata da due centri diversi, ovvero se sono sezioni di uno stesso fascio di piani;

due fasci di piani se proiettano uno stesso fascio di raggi da due centri diversi;

una punteggiata ed un fascio di raggi, ovvero un fascio di raggi e un fascio di piani, se la prima forma è una sezione della seconda;

due piani se sono sezioni di una medesima stella;

due stelle se proiettano uno stesso piano da due centri diversi;

un piano ed una stella, se il piano è una sezione della stella.

Però questa definizione non è integralmente adottata dai vari autori. Così ad esempio l'illustre prof. V. Murer [2], premesso doversi intendere per *congiungente due punti* la retta che li unisce, per *congiungente un punto e una retta* il piano che per essi passa, espone la seguente definizione:

Due forme proiettive si diranno in particolare prospettive se le congiungenti o le intersezioni delle coppie di elementi corrispondenti si trovano in una medesima forma fondamentale: oppure se l'una è contenuta nell'altra.

E, a parlare con maggior diffusione, si diranno prospettive:

a) *Due punteggiate se sezioni dello stesso fascio di raggi;*

b) *Una punteggiata e un fascio di raggi o di piani, se la prima è sezione del secondo;*

c) *Due fasci di raggi se proiezioni della stessa punteggiata o sezioni dello stesso fascio di piani;*

---

(1) *Elementi di Geometria Proiettiva* di Luigi Cremona (1873), pag. 21.

(2) *Primi elementi di Geometria Proiettiva e Descrittiva* del Dott. Vittorio Murer (1885), pag. 15.

d) *Un fascio di raggi ed uno di piani se il primo è sezione del secondo;*

f) *Due fasci di piani se proiezioni dello stesso fascio di raggi;*

g) *Due sistemi piani se sezioni della stessa stella;*

h) *Due stelle se proiezioni dello stesso sistema piano;*

l) *Una stella e un sistema piano se il secondo è una sezione della prima.*

Ora il dettaglio che tiene dietro alla definizione generale, mentre considera come prospettivi una punteggiata ed un fascio di piani se la prima è sezione del secondo (caso che non figura fra quelli enumerati dal CREMONA), non contempla però tutti i casi compresi nella definizione premessa, poichè per essa sono prospettivi anche:

Una punteggiata ed un fascio di raggi se sezioni di uno stesso fascio di piani;

Un fascio di piani ed un fascio di raggi se proiettano una stessa punteggiata.

L'illustre prof. F. ASCHIERI (1) dà la definizione seguente:

Due forme fondamentali di 1ª e 2ª specie si dicono prospettive se si deducono l'una dall'altra con una sola operazione. E si dicono prospettive le seguenti coppie di forme:

Due punteggiate che siano sezioni di uno stesso fascio di raggi;

Due fasci di raggi che essendo in uno stesso piano proiettano una stessa punteggiata;

Due sistemi piani che siano sezioni di una stessa stella;

Due stelle che proiettano uno stesso sistema piano.

Vale a dire che Egli come il MULLER, ed al contrario del CREMONA, considera come prospettivi una punteggiata ed un fascio di piani, se la prima è sezione del secondo; considera come prospettivi due fasci di raggi che proiettano una stessa punteggiata, solo quando siano situati in uno stesso piano, e non quindi se sono sezioni di uno stesso fascio di piani; e non considera affatto come prospettivi due fasci di piani che proiettano da centri diversi uno stesso fascio di raggi.

Qualunque sia il modo di vedere, due forme, solo perchè si trovano in una delle suaccennate condizioni, non godono di alcuna proprietà comune; tanto varrebbe allora considerare come prospettive anche due punteggiate sezioni di uno stesso fascio di piani e dire senz'altro in generale:

Sono prospettive due forme se una è sezione dell'altra, o se tutte e due sono sezioni o proiezioni di una terza.

---

(1) F. ASCHIERI. — *Geometria Proiettiva* (Manuale Hœpli, 1886), pag. 27.

Crediamo invece più opportuno tener presente che le forme sono figure, e che quindi (a meno che non si voglia dare alla parola *prospettiva* due significati diversi, secondochè si tratta di figure o semplicemente di forme) il concetto di prospettività delle forme deve rientrare nel concetto generale di prospettività delle figure.

Secondo Steiner e Staudt *sono prospettive due figure se ai punti* A, B, C,... *dell'una corrispondono i punti* A′, B′, C′,... *dell'altra in base ad una legge qualsivoglia, e se le due figure si trovano in tale posizione che le rette* AA′, BB′, CC′,... *congiungenti i punti corrispondenti formino una stella di raggi, cioè passino per uno stesso punto (a distanza finita od infinita).*

Per questa definizione adottata pure dal Baltzer (1) e dal Cremona (2), venendo a parlare delle forme geometriche, sono prospettive due punteggiate e sono prospettivi due sistemi piani (piani punteggiati), se sono rispettivamente sezioni dello stesso fascio di raggi e della stessa stella (stella di raggi). I centri di proiezione e prospettività di due punteggiate prospettive e di due sistemi piani prospettivi sono rispettivamente i centri del fascio di raggi e della stella di cui sono sezioni. Due punteggiate prospettive hanno un elemento unito, il punto comune alle due rette sulle quali si trovano; due sistemi piani hanno un elemento unito, la retta (punteggiata) comune ai due piani sui quali si trovano.

Con ciò nulla è tolto al concetto generale di figure prospettive. Dalla prospettività, come caso particolare, si ha poi l'omologia, e da quest'ultima l'omotetia.

---

(1) *Elementi di Matematica* del Dott. Riccardo Baltzer, Prima versione italiana per Luigi Cremona. — Parte 5ª. *Stereometria* (1867), pag. 73.

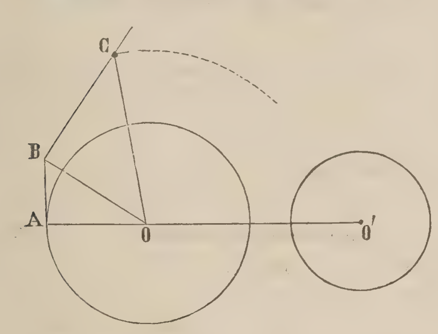
(2) Opera citata, pag. 3.

Sobre los circolos radicales

por Don Juan J. Duràn Loriga. - Comandante de Artilleria; Coruña-Spagna

Se sabe que el lugar geometrico de los puntos tales que sus potencias con relacion á dos circunferencias fijas guardan la relacion $\frac{m}{n}$ es una circunferencia, y si suponemos $m = -n$, esta linea tambien será el lugar de los puntos que tienen respecto á otras dos de esta clase potencias iguales y de signos contrarios y que la analogia nos conduce á llamarla *circunferencia radical* (*) de las propuestas. Es muy facil determinar su centro y radio.

Llamenos P_o y $P_{o'}$ las potencias de un punto P del plano respecto á las circunferencias O y O′ (fig. 1ª). Se tendrà $P_o = - P_{o'}$ ó lo que es lo mismo, llamando l y l' las distancias de P á los centros y d la distancia O O′



$$l^2 - R^2 = R^2 - l^2$$

es decir

$$l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2$$

El centro de la circunferencia que buscamos será por consiguiente el medio de O O′ y su radio será

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}$$

(*) Algunos Autores en particular los ingleses llman « circulo radical » (radical circle) al que corta ortogonalmente á otros tres pero nos parece preferible la denominacion muy usada de « circulo ortotomico » y llamar circulo radical al que es objeto de este estudio.

Para que la circunferencia radical exista es preciso que se tenga

$$d < \sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

esta condicion se cumple siempre, cuando las circunferencias son tangentes (ya exteriores ó interiores), secantes, ó interiores pero si son exteriores podrá existir ó no la circunferencia radical.

Cuando las circunferencias son secantes, teniendo evidentemente que pasar la circunferencia radical por los dos puntos de corte (de potencia cero), podrá describirse inmediatamente.

Cuando son tangentes exteriores, la circunferencia radical serà tangente interior á la de mayor radio y en el punto de tangencia de las dadas (puesto que este punto tiene potencia cero respecto á ambas) y como su centro es en todos los casos el medio de la linea de centros, es tambien su trazado inmediato.

Si se quiere numericamente determinar su radio sin recurrir al hecho visto á priori, se hara $d = R + R'$ en el valor de ρ y resulta como es consiguiente $\rho = \frac{1}{2}(R - R')$.

Si son tangentes interiores tambien resultarà la circunferencia radical tangente á las dadas y su radio serà $\rho = \frac{1}{2}(R + R')$.

Si las circunferencias son concentricas, tambien lo serà con ellas la radical y su radio se obtendra haciendo $d = 0$ en el valor ρ con lo que resulta

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2)}$$

Para el trazado grafico de la circunferencia radical de dos exteriores (cuando existe) ó de dos interiores se utilizaran las consideraciones que vamos à exponer.

Consideremos tres circunferencias O, O' y O'', llamemos $\pi_{00'}$ la circunferencia radical de O y O' y $\pi_{oo''}$ la de O y O''; si estas circunferencias se cortan se tendrá en los puntos de interseccion

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = -P_{0'} \\ P_0 = -P_{0''} \end{array}\right. \quad \text{por consiguiente } P_{0'} = P_{0''}$$

es decir que el eje radical de O' y O'' lo es tambien de $\pi_{00'}$ y $\pi_{00''}$

Cuando las circunferencias radicales no se cortan, tambien, es facil dar una demostracion geometrica y aun mas sencillo, demostrarlo analiticamente, como haremos mas adelante.

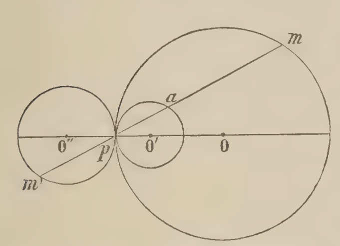
Esta observacion sugiere el medio de encontrar la circunferencia radical de dos exteriores (si existe) ó de dos interiores O y O'. Cortense por una tercera O'', determinese la circunferencia radical de O y O'' y el eje radical de O' y O'' y se tendrà uno ó dos puntos de la circunferencia que se quiere determinar y de la que el centro es conocido.

La circunferencia O'' debe elegirse de un modo conveniente para que se corten el eje y circunferencia radical auxiliares, lo cual es facil conseguir.

Puede verse graficamente si existe la circunferencia radical en el caso de ser las dadas exteriores (unico caso en que puede haber imposibilidad) por la siguiente construccion. Levantase en el extremo del radio OA (fig. 1ª) la perpendicular AB igual al radio R' de la otra circunferencia, unase O con B tracese la perpendicular $BC = OB$ y si la circunferencia descrita con el radio OC envuelve el centro O' la circunferencia radical existe.

La sencillez de esta construccion evita otras explicaciones.

Cuando dos circunferencias son ortogonales, se ve claramente que la radical pasa por los centros de ellas, como se deduce tambien del valor de ρ pues siendo $R^2 + R'^2 = \overline{OO'}^2$ resulta $\rho = \frac{1}{2}OO'$. La reciproca es tambien cierta como se ve facilmente.



La consideracion de circunferencias radicales permite resolver inmediatamente el seguiente problema.

Se tienen dos circunferencias tangentes, por ejemplo interiores, O y O' (fig. 2ª) de radios respectivos R y R' por el punto de tangencia p se trazan secantes, tales como $p\,a\,m$ y se toma en sentido contrario una longitud $am' = am$. ¿Cual es el lugar geometrico de el punto m'?

Tracemos la circunferencia O'' que tenga por circunferencia radical respecto á la O, la O' y se tendrá en valor absoluto $ap.\,am = ap.\,am'$ y por lo tanto $am' = am$, el lugar buscado es por consiguiente la circunferencia O''; para determinar su radio x, notemos que se tiene $R' = \frac{1}{2}(R - x)$ de donde se deduce $x = R - 2R'$. La circunferencia encontrada es tangente exterior ó interior á la O segun sea $R - 2R' \gtrless 0$. Si la circunferencia O' pasa por el punto O el lugar geometrico se reduce al punto p lo cual es evidente.

Hemos dicho anteriormente que si se tienen tres circunferencias O, O' y O'' y se determinan las radicales de dos grupos OO' y OO'' por ejemplo, el eje radical de estas circunferencias radicales es el mismo

que el de las del tercer grupo. — Esto permite demostrar con gran sencillez que las circunferencias descritas sobre las medianas de un triangulo como diametros, tienen de dos en dos por eje radical las alturas de dicho triangulo. Observemos en efecto que si sobre los lados de un triangulo como diametros se describen circunferencias, las radicales de estas, son las trazadas sobre las medianas (asi p. e. la correspondiente á las descritas sobre b y c es la que tiene por diametro la mediana relativa al lado a), resulta pues en virtud de nuestra observacion que los ejes radicales de las últimas seran los mismos que los correspondientes á las primeras, es decir las alturas del triangulo. Tenemos pues seis circunferencias que tienen por centro radical comun el ortocentro del triangulo dado.

Si consideramos ahora las circunferencias descritas desde los medios de los lados como centros con un radio igual á las medianas correspondientes y á las que hemos llamado por ciertas razones que en otra ocasion espusimos circunferencias potenciales (vease nuestra nota del Progreso matematico tomo V pag. 70), es evidente que dichas circunferencias son las descritas tomando como diametros las medianas del triangulo anticomplementario, pero por otra parte en virtud de lo anteriormente dicho, estas circunferencias son las radicales de las descritas sobre los lados de este último triangulo, podemos en consecuencia decir que las circunferencias descritas desde los vertices de un triangulo como centros con radios iguales á los lados opuestos tienen por circunferencias radicales, las potenciales de dicho triangulo y que por lo tanto su centro radical es el ortocentro del triangulo anticomplementario del propuesto. Fenemos pues un segundo grupo de seis circunferencias que tienen el mismo centro radical.

Hemos dicho que cuando dos circunferencias son ortogonales la circunferencia radical tiene por diametro la linea de centros y como el circulo de Longchamps es ortotomico de los descritos desde los vertices como centros con radios iguales á los lados opuestos, resulta que las circunferencias que tienen por diametros las rectas que unen los vertices de un triangulo con el ortocentro de su complementario son las radicales del circulo de Longchamps y de los otros tres de que hemos hecho merito.

El mismo criterio puede servir para encontrar las circunferencias radicales de algunas otras del triangulo, pero en todos los casos puede recurrirse á la geometria analitica, es en efecto evidente que si $C = 0$ y $C' = 0$ son las ecuaciones de dos circunferencias, la de la radical será $C + C' = 0$ ya se trate de coordenadas, cartesianas ó trilineales, asi la circunferencia radical de las rapresentadas por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + 2A\,x + 2By + C = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2A'\,x + 2B'y + C' = 0$$

es la siguiente

$$x^2 + y^2 + (A + A')\,x + (B + B')\,y + \frac{1}{2}(C + C') = o$$

y si en particular se toma por eje de las X la linea de centros y una de ellas tiene el suyo en el origen (suponemos rectangular el sistema) la circunferencia radical será

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2\,(R^2 + R'^2) - \alpha^2}{4}$$

resultado que comprueba lo que anteriormente hemos dicho, que para que la circunferencia radical exista tiene que ser la distancia de centros menor que $\sqrt{2\,(R^2 + R'^2)}$. Si esta distancia es $\sqrt{2\,(R^2 + R'^2)}$ la circunferencia se reduce á un punto situado en la linea de centros, interiormente á la circunferencia de mayor radio y á una distancia de su centro igual á la anterior cantidad radical dividida por dos.

Si se trata de coordenadas baricentricas y las circunferencias dadas son

$$\Sigma\,\alpha \times \Sigma\,u\alpha - \Sigma\,a^2\,\rho\Upsilon = 0$$
$$\Sigma\,\alpha \times \Sigma\,u'\alpha - \Sigma\,a^2\,\rho\Upsilon = 0$$

la circunferencia radical es

$$\Sigma\,\alpha.\,\Sigma\,(u + u')\,\alpha - 2\,\Sigma\,a^2\,\rho\Upsilon = 0$$

Es muy facil probar analiticamente un hecho que anteriormente hemos consignado y es que si tenemos tres circunferencias O, O′, O″ y las agrupamos de dos en dos, el eje radical de las circunferencias radicales de dos grupos lo es del tercer grupo. — Tenemos en efecto llamando.

$$C = 0 \quad .. \quad C' = 0 \quad .. \quad C'' = 0$$

las ecuaciones de las tres circunferencias dadas.

La circunferencia radical de $\left\{\begin{array}{l} C = 0 \\ C' = 0 \end{array}\right.$ es $C + C' = 0$

$$\text{Eje radical de} \left\{ \begin{array}{l} C + C' = 0 \\ \\ C + C'' = 0 \end{array} \right. \text{es } C' - C' = 0$$

$$\text{La circunferencia radical de} \left\{ \begin{array}{l} C = 0 \\ \\ C'' = 0 \end{array} \right. \text{es } C + C'' = 0$$

$$\text{Eje radical de} \left\{ \begin{array}{l} C' = 0 \\ \\ C'' = 0 \end{array} \right. \text{es } C' - C'' = 0$$

Si despues de encontrar las circunferencias radicales de tres dadas operamos lo mismo (cuando es posible) con las que sucesivamente vamos obteniendo, podran resultar series triples de circulos sometidos á ciertas ligazones cuyo estudio puede ser curioso.

La consideracion de circunferencias radicales en la geometria del triangulo relacionando las relativas á circulos notables de este, con otros circulos, rectas y puntos ligados al mismo, podrá quizas dar lugar à resultados interesantes, pero faltos hoy de tiempo para hacer un estudio detenido solo hemos apuntado ideas, que nos proponemos desarrollar en otra ocasion.

La Coruña, Junio 95.

JUAN J. DURÀN LORIGA.

ELENCO BIBLIOGRAFICO

sull' "Ausdehnungslehre„ di H. Grassmann

Hermann Grassmann (1809-1877) pubblicò il suo capolavoro « *Ausdehnungslehre* » nel 1844. Ma per lunghi anni su questo libro regnò il silenzio. Solo da poco si va sempre più riconoscendo la potenza di questo nuovo strumento per trattare le più svariate parti della matematica: determinanti, invarianti, geometria analitica e projettiva, fisica matematica, ecc.

Nell'elenco che segue non sono menzionati i lavori del Grassmann, poichè ora si stanno appunto stampando le sue opere complete. Su questa pubblicazione vedasi: Rivista di Matematica, a. 1894, p. 167; Bulletin des sciences mathématiques, a. 1895, p. 234; e specialmente l'ampia ed importantissima relazione: V. Schlegel, *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre*; ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren, nel Zeitschrift für Mathematik, a. 1896.

Questo elenco non contiene i lavori sul calcolo geometrico che precedettero quelli di Grassmann, quali quelli di Möbius, Bellavitis, ecc., nè quelli che seguirono cronologicamente, benchè indipendentemente, quali quelli di Cauchy, St Venant, e specialmente quanto si riferisce ai quaternioni di Hamilton.

(P.)

Allé — *Ueber die Ableitung der Gleichungen der drehenden Bewegung eines starren Körpers nach der Grassmann'schen Analyse.* Mittheilungen der deutschen math. Gesellschaft in Prag, 1892, p. 64.

R. S. Ball — *The theory of schrews.* Dublin, 1876.

H. Burkhardt — *Ueber Functionen von Vectorgrössen, welche selbst wieder Vectorgrössen sind. Eine Anwendung invariantentheoretischer Methoden auf eine Frage der mathematischen Physik.* Math. Annalen, Bd. 43, a. 1893.

— Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. W. z. Göttingen, 1893.

E. Carvallo — *Sur une généralisation du théorème des projections.* Nouvelles Annales, t. IX, 1891. — Rivista di Matem., I, pag. 269.
— *Sur les surfaces minima.* Bulletin des sciences mathém., 1894.
— *La méthode de Grassmann.* Nouvelles Annales, 1892.
— *Théorèmes de mécanique.* Nouvelles Annales, 1893.
— *Nouveau théorème de mécanique.* Nouvelles Annales, 1893.
— *Sur les forces centrales.* Nouv. Ann., 1893 (Riv. di Mat., III, p. 137).
— *Sur les systèmes linéaires.* Monatshefte f. Math. u. Physik, t. 2.
— *Exposition d'une méthode de M. Caspary, pour l'étude des courbes gauches.* Bulletin de la Société math. de France, t. XV, a. 1887.
F. Caspary — *Sur une méthode générale de la géometrie qui forme le lien entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique.* Bull. des Sciences Mathém., t. XIII, 1889.
— *Nouvelles manières d'exprimer au moyen des fonctions hyperelliptiques de primière espèce, les coordonnées etc.* Bull. des Sciences Mathém., t. XV, 1891.
— *Ueber einige Determinanten-Identitäten, welche in der Lehre von den perspectivischen Dreiecken vorkommen.* Crelle's Journal, t. 95, p. 36.
— *Ueber die Erzeugung algebraischer Raumcurven durch veränderliche Figuren.* Crelle's Journal, t. 100, p. 405.
F. Castellano — *Alcune applicazioni cinematiche della teoria dei vettori.* Rivista di Matematica, 1892, pag. 19.
— *Lezioni di Meccanica razionale*, Torino 1894 (Rivista di Matematica, a. 1895, p. 11).
Chelini — *Sulla composizione geometrica dei sistemi di rette, di aree e di punti.* Mem. Acc. Bologna, 1871.
— *Nuova geometria dei complessi.* Id., 1871.
Clifford — *Applications of Grassmann's extensive Algebra.* American Journal of Math., I, p. 350.
Homersham Cox — *Application of Grassmann's Ausdehnungslehre to properties of circles.* Quaterly Journal, a. 1890.
L. Cremona — *Elementi di Calcolo grafico.* Torino 1874.
Dillner — *Théorie du Calcul géométrique.* Tidskrift för Matem. och Fysik, 1869.
B. Élie — *La fonction vectorielle et ses applications à la Physique.* Mém. Soc. Bordeaux, 1893, pag. 1-137.
Favaro — *La statica grafica.* Venezia 1873.
J. W. Gibbs — *Elements of vector analysis.* New-Haven, 1884.
H. Grassmann (jun.) — *Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumkurven und krummen Flächen.* Halle a/S. 1888.
— *Punktrechnung und projective Geometrie.* Halle 1894.

E. W. Hyde — *Calculus of direction and position.* American Journal of Math., VI, pag. 1.

— *The schrew as a unit in a Grassmannian System of the sixth order.* Annals of Mathematics, vol. VIII.

Kirchner — *Ein Beitrag zur Bewegung unveränderlicher ebener Sisteme.* Programm Meiningen, 1887.

F. Kraft — *Abriss des Geometrischen Kalküls,* Leipzig, Teubner, 1893, p. 255.

Kraft — *Aequivalenz der Linientheilsysteme.* Schlöm. Zeitschr., 1894.

Lüroth — *Grundriss der Mechanik,* 1881.

A. Macfarlane — *Principles of the Algebra of Physics.* Proceed. of the American J. for the Adv. of. S., vol. XL, 1891.

Mahler — *Einleitung in die Ausdehnungslehre* (Schulprogramm der Gymnasienns in Ulm, 1883-84).

R. Mehmke — *Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie.* Rivista di Matem., II, pag. 65.

— *Ueber die Aenderung der Hauptkrümmungen einer Fläche bei einer beliebigen Berührungstransformation.* Riv. di Matem., II, p. 159.

— *Ueber die Bewegung einer starren ebenen Systems in seiner Ebene.* Schlöm. Zeitschrift, t. 35, a. 1889.

— *Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnuugslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene.* Stuttgart 1880.

— *Ueber zwei, die Krümmung von Curven und das Gauss'sche Krümmungsmaass von Flächen betreffende charakteristische Eigenschaften der linearen Punkttransformationen.* Schlöm. Zeitschr., a. 1891.

— *Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann.* Schlöm. Zeitschrift, 1892.

— *Ueber die Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe Grassmann'scher Methoden.* Math. Ann., t. XXIII, pag. 143.

— *Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung.* Civilingenieur, t. XXIX.

— *Eine mathematische Aufgabe,* 1886.

— *Einfache Darstellung der Trägheitsmomenten.* Schlöm. Zeitschr. 1883.

E. Müller — *Die Kugelgeometrie nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Monatshefte für Math., t. III.

— *Neue Methode zur Ableitung der Statischen Gegetze.* Mittheilungen des k. k. Technologischen Gewerbe-Museums in Wien, 1893, p. 17-72.

— *Die Liniengeometrie nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Monatshefte f. Math. u. Ph., 1891.

— *Anwendung der Grassmann'schen Methoden auf die Theorie der Curven und Flächen zweiten Grades.* Crelle J., t. 115, a. '95, p. 234.

H. Noth — *Aritmetik der Lage*, a. 1882.

G. Peano — *Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann.* Torino 1888.

— *Gli elementi di calcolo geometrico.* Torino 1891.

— *Die Grundzüge des Geometrischen Calculs; deutsche Aufg. v. Schepp.* Leipzig 1891.

— *Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie.* Rend. Circolo Mat. Palermo, 1888.

— *Lezioni di analisi infinitesimale.* Torino 1893.

— *Sulla definizione dell'area d'una superficie.* Rend. Accad. Lincei, 1890, pag. 54.

— *Sul moto del polo terrestre.* Atti Acc. Torino, 5 maggio e 6 giugno 1895.

L. Schendel — *Grundzüge der Algebra, nach Grassmann'schen Prinzipien.* Halle 1895.

V. Schlegel — *Ueber die geometrische Darstellung des Imaginären vom Standpunkte der Ausdehnungslehre.* Schlöm. Zeitschr., XXIII, p. 141.

— *Ueber neuere geometrische Methoden und ihre Verwandschaft mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Id., XXIV, p. 83.

— *Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung mittelst der Grassmann'schen Ausdehnungstheorie.*

— *System der Raumlehre, nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre.* Leipzig 1872-75.

— *On the problem of the minimum sum of the distances of a point from given points.* Bulletin of the American Math. Society, 1894.

— *Die Hauptmethoden der* Grassmann'*schen Ausdehnungslehre in ihrer Anwerdung auf die Mechanik dargestellt.* Civilingenieur, XL Band, 1894.

— *Zwei Sätze vom Schwerpunkt.* Schlöm. Zeitschrift, Bd. XXI.

— *Sur le théorème de M. Laisant.* Bull. Société math. de France, t. X.

— *Zum Gauss'schen Fundamentalsatz der Axonometrie.* Hoffmann's Zeitschr., Bd. XVIII.

Sturm — *Sulle forze in equilibrio.* Annali di Mat., t. VII, pag. 217.

Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione

Nota di G. Vailati *in Torino.*

In una Nota « *Sulle relazioni di posizione tra i punti d'una linea chiusa* » pubblicata recentemente in questa Rivista (Vol. V, pag. 75) ho assunto a base d'uno studio elementare sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione la possibilità di definire, tra i loro elementi, una relazione che soddisfi alle condizioni espresse dalle seguenti formole (nelle quali S_1 sta per indicare la classe degli elementi che appartengono alla varietà che si considera ed il segno $||$ designa la relazione che si vuol definire):

$a, b, c, d \,\varepsilon\, S_1 \,.\, \supset :$

(1) $$ab \,||\, cd \,.=.\, cd \,||\, ab$$

(2) $$ab \,||\, cd \,.=.\, ab \,||\, dc$$

(3) $$ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, bd \,.=.\, \Lambda$$

(4) $$ab \,||\, cd \,.\cup.\, ac \,||\, bd \,.\cup.\, ad \,||\, bc$$

$a, b, c, d, e \,\varepsilon\, S_1 \,.\, \supset :$

(5) $$ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be \,.\supset.\, ac \,||\, de$$

(6) $$ab \,||\, cd \,.\, ac \,||\, be \,.\supset.\, cd \,||\, be$$

(7) $$ab \,||\, cd \,.\, ab \,||\, ce \,.\, ab \,||\, de \,.=\, \Lambda \,.$$

Osservavo poi che ad esaurire la trattazione dell'argomento da questo punto di vista sarebbe stato necessario verificare se le dette proposizioni, oltre a esser sufficienti per la deduzione di tutte le proprietà della relazione a cui si riferiscono, fossero anche tutte necessarie, se non ve ne fosse cioè tra esse alcuna che si potesse dedurre dalle rimanenti.

Partendo ora da considerazioni suggeritemi da un lavoro recentemente pubblicato (*) nel quale questa stessa questione è trattata da un

---

(*) *Sui principî che reggono la Geometria di posizione.* Memoria del Dott. Mario Pieri (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1894-5). V. il capitolo che porta il titolo: *Principî sul separarsi e sulla connessione degli elementi d'una forma di* 1ª *specie.*

altro punto di vista, sono riuscito a dedurre le proposizioni (6) e (7) dalle altre cinque.

Per dimostrare la (6) osservo anzi tutto che la (5), mediante lo scambio delle lettere a, b rispettivamente con c, d, si trasforma nella seguente:

$$(5') \qquad cd \| ab \, . \, ca \| de : \supset ca \| be$$

la quale ultima, scambiandovi a e b rispettivamente con d ed e, dà luogo a quest'altra:

$$(5'') \qquad ca \| de \, . \, cd \| ab : \supset cd \| be \, .$$

Ora le (5) e (5′) possono essere anche scritte rispettivamente come segue:

$$ab \| cd \, . \supset : ac \| be \, . \supset . \, ac \| de$$
$$cd \| ab \, . \supset : ca \| de \, . \supset . \, ca \| be$$

dalle quali, tenendo conto delle (1) e (2), si ricava:

$$ab \| cd \, . \supset : ca \| be \, . = . \, ca \| de \, .$$

Sostituendo ora nella (5″), all'espressione $ca \| de$ l'altra $ca \| be$, ora dimostrata equivalente, si ottiene:

$$ca \| be \, . \, cd \| ab : \supset cd \| be$$

la quale, applicando di nuovo le (1) e (2), dà immediatamente la (6).

Passo ora a dimostrare la (7). Tenendo conto della (4), basterà far vedere che il prodotto delle due espressioni seguenti:

$$bc \| de \cup bd \| ce \cup be \| cd$$
$$ab \| cd \, . \, ab \| ce \, . \, ab \| ed$$

si riduce a Λ. Ora ciò risulta immediatamente dal fatto che ciascuno dei tre termini che si ottengono eseguendo questo prodotto si riducono a Λ in virtù delle (1), (2), (3). Infatti:

$$ab \| cd \, . \, ab \| ce \, . \, ab \| ed \, . \, bc \| de : = : cd \| ba \, . \, cb \| de \, . \, ab \| ce \, . \, ab \| ed :$$
$$\supset : cb \| ae \, . \, ab \| ce \, . \, ab \| ed : = \Lambda$$

$$ab \| cd \, . \, ab \| ce \, . \, ab \| ed \, . \, bd \| ce : = : dc \| ba \, . \, db \| ce \, . \, ab \| ce \, . \, ab \| ed :$$
$$\supset : db \| ae \, . \, ab \| ed \, . \, ab \| ce : = \Lambda$$

$$ab \| cd \, . \, ab \| ce \, . \, ab \| ed \, . \, be \| cd : = ec \| ba \, . \, eb \| cd \, . \, ab \| cd \, . \, ab \| ed :$$
$$\supset : eb \| ad \, . \, ab \| cd \, . \, ab \| ed : = \Lambda \, .$$

Restano in tal modo dimostrate le proposizioni (6) e (7). Si noti che nella dimostrazione della (6) ci siamo serviti solo delle proposizioni (1), (2), (5) senza far uso delle (3) e (4), mentre nella dimostrazione della (7) abbiamo dovuto servirci anche di queste ultime due.

Rimarrebbe a provare che, delle cinque proposizioni che costituiscono ora i soli nostri postulati, nessuna può esser dedotta dalle altre quattro. Perciò, seguendo l'unico metodo di dimostrazione applicabile in casi di questa natura, non occorrerà altro che trovare cinque modi d'interpretare il simbolo $ab \,||\, cd$ per ciascuno dei quali non si verifichi una delle cinque condizioni espresse dalle (1)-(5), pure verificandosi le altre quattro (*).

(*) Mentre è in corso di pubblicazione il presente scritto il mio egregio amico Dott. A. Padoa, al quale avevo proposta la soluzione di questa questione, mi annuncia di esser riuscito a stabilire ciò che egli chiama l'*indipendenza ordinata* delle proposizioni (1)-(5), a dimostrare, cioè, che ciascuna di esse, prese nell'ordine secondo il quale sono enunciate, non si può dedurre dalle precedenti. Ecco le quattro interpretazioni del simbolo $ab \,||\, cd$ che lo hanno condotto a questo risultato che egli gentilmente mi permette di render qui noto:

Se con $ab \,||\, cd$ s'intende: *il segmento di estremi* a, b *è equipollente a quello di estremi* c, d, è vera la (1) e sono false le altre quattro. Se s'intende: a *dista da* b *come* c *da* d, sono vere le (1), (2) e false le altre tre. Se s'intende: *il punto medio del segmento* ab *coincide col punto medio del segmento* cd, sono vere le (1), (2), (3) e false le altre due. Se infine, essendo $a, b, c \ldots$ punti d'un piano assegnato, s'intende asserire col simbolo $ab \,||\, cd$ che *i segmenti finiti* ab *e* cd *hanno almeno un punto in comune,* sono vere le (1), (2), (3), (4) ed è falsa la (5).

Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse

Nota di FRANCESCO D'ARCAIS

È noto come una espressione analitica possa rappresentare, pei valori di una variabile complessa pei quali ha significato, porzioni di funzioni analitiche diverse. Mediante le seguenti semplici proposizioni sulle serie si ottengono facilmente quante si vogliano di tali espressioni ed in modo da vedere la ragione di questo fatto analitico relativo ad esse. Il che potrà forse presentare, non fosse altro che didatticamente, qualche utilità.

Posto

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \, ,$$

dove le u sono quantità finite qualunque, la serie

$$(1) \qquad \frac{u_2}{S_1 S_2} + \frac{u_3}{S_2 S_3} + \ldots + \frac{u_n}{S_{n-1} S_n} + \ldots$$

è convergente ed ha il valore $\frac{1}{u_1}$ se la serie

$$(2) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

è divergente, ed ha il valore $\frac{1}{u_1} - \frac{1}{S}$ se la serie (2) è convergente ed ha il valore S diverso da zero (*).

Basta, infatti, osservare che la somma dei primi n termini della serie (1) è

$$\left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{S_n} \, .$$

(*) V. il mio *Corso di Calcolo Infinitesimale*, vol. I, pag. 322, esercizi 2° e 3°.

In modo analogo si prova che:

Se $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sono numeri interi positivi, dati secondo una certa legge, e tali che

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \quad , \quad \lim_{r=\infty} n_r = \infty \, ,$$

la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{u_{n_r+1} + u_{n_r+2} + \ldots + u_{n_{r+1}}}{S_{n_r} S_{n_{r+1}}} \tag{3}$$

è convergente ed ha per valore $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}}$ se la serie (2) è divergente, ed ha per valore $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}} - \dfrac{1}{S}$ se la serie (2) è convergente e vale S, S diverso da zero.

Per $n = 1$, $n_{r+1} = n_r + 1 = r + 1$ si ha il teorema precedente.

Da quanto precede risulta che:

Se le u sono funzioni di una variabile complessa x, e la (2) *è convergente ed ha per valore S, diverso da zero, in un campo* C, *ed è divergente nei punti non appartenenti a* C, *la serie* (3) *rappresenta una porzione della funzione analitica* $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}} - \dfrac{1}{S}$ *nel campo* C, *e una porzione della funzione analitica* $\dfrac{1}{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}}$ *fuori del campo* C.

Ad esempio: partendoci dalla serie geometrica

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots ,$$

si riconoscerà subito, applicando il primo teorema, che la serie

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n-1})} + \ldots$$

rappresenta la funzione $\dfrac{1}{x(1-x)^2}$ fuori del circolo di raggio *uno* col centro nell'origine, e la funzione $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ nei punti interni a questo circolo (*).

(*) V. l. c., pag. 323, esercizio 5°, pel caso di x reale.

Applicando alla stessa serie geometrica il secondo teorema, si vedrà che la serie

$$\frac{1-x^{n_2-n_1}}{\left(1-x^{n_1}\right)\left(1-x^{n_2}\right)}+\frac{x^{n_2-n_1}\left(1-x^{n_3-n_2}\right)}{\left(1-x^{n_2}\right)\left(1-x^{n_3}\right)}+\dots$$

$$+\frac{x^{n_r-n_1}\left(1-x^{n_{r+1}-n_r}\right)}{\left(1-x^{n_r}\right)\left(1-x^{n_{r+1}}\right)}+\dots$$

rappresenta la funzione $\frac{1}{1-x^{n_1}}$ se $|x|<1$, e la funzione $\frac{1}{x^{n_1}\left(1-x^{n_1}\right)}$ se $|x|>1$. In particolare, per $n_1=1$, $n_{r+1}=2n_r=2^r$, la serie

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^4}+\frac{x^3}{1-x^8}+\dots+\frac{x^{2^{r-1}-1}}{1-x^{2^r}}+\dots$$

vale $\frac{1}{1-x}$ se $|x|<1$, e vale $\frac{1}{x(1-x)}$ se $|x|>1$.

Dal che si deduce subito che le serie

$$\frac{1+x^{n_1}}{1-x^{n_1}}+\sum_{r=1}\frac{2x^{n_r}\left(x^{n_{r+1}-n_r}-1\right)}{\left(1-x^{n_r}\right)\left(1-x^{n_{r+1}}\right)}\,,\quad \frac{1+x}{1-x}+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{2x^{2^{r-1}}}{x^{2^r}-1}$$

hanno per valore $+1$ se $|x|<1$, e -1 se $|x|>1$, risultato dovuto, in altro modo, al sig. J. TANNERY (*).

Partendoci dalla serie

$$1+x(1+x)+x^2(1+x+x^2)+\dots+x^{n-1}(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})+\dots,$$

che è convergente e vale $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ se $(x)<1$, ed è divergente se $|x|>1$, giacchè per essa $S_n=\frac{(1-x^n)\,(1-x^{n+1})}{(1-x)(1-x^2)}$, ed applicando il

(*) V. *Bulletin des Sciences Mathématiques, etc.*, vol. V, serie 2ª, pag. 182.

primo teorema, si riconoscerà che la serie

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}+\cdots$$

rappresenta la funzione $\frac{1+x-x^2}{(1-x)(1-x^2)^2}$ se $|x|<1$, e la funzione $\frac{1}{x(1-x)(1-x^2)^2}$ se $|x|>1$.

Padova, 27 dicembre 1895.

Nuove pubblicazioni.

W. W. Beman and d. E. Smith. — *Plane and solid Geometry*. Boston, Ginn, a. 1895, p. 320.

P. Painlevé. — *Leçon sur le frottement*. Paris, A. Hermann, a. 1895, p. 111.

M. Demartres. — *Cours d'Analyse* rédigé par M. E. Lemaire. Paris, A. Hermann, a. 1896, p. 156.

F. Aschieri. — *Lezioni di Geometria descrittiva*. Milano, Hoepli, a. 1896, pag. IX+443, prezzo L. 8,50.

G. A. Maggi. — *Principio della teoria matematica del movimento dei corpi. Corso di meccanica razionale*. Milano, Hoepli, a. 1896, pag. XVIII+503; prezzo L. 12.

E. Pascal. — *Funzioni ellittiche*. Manuali Hoepli, a. 1896; prezzo L. 1,50.

INDICE DEI VOLUMI I-V (1891-1895)

(Il primo numero indica il volume, il secondo la pagina)

AMODEO F. — Sulla linearità delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni . . . . II 145
— Lettera aperta al direttore della *Rivista di Matematica* . II 150
ASCOLI G. — Sulle derivate apparenti . . . . IV 22
BAGGI Ing. VITTORIO — Odoardo Jacoangeli, *Triangolazioni Topografiche e Triangolazioni Catastali* . . . . V 86
BERTINI E. — Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche . . . . I 22
BETTAZZI R. — Osservazioni sopra l'articolo del dott. G. Vivanti « Sull'infinitesimo attuale » . . . . I 174
— Sull'infinitesimo attuale . . . . II 38
— Sulla Parte VII del Formulario . . . . IV 161
BIASI G. — *Corrispondenza* . . . . III 74
BURALI-FORTI C. — C. Testi, *Elementi di geometria* . . . I 14
— La risoluzione dei problemi di Aritmetica nelle scuole secondarie inferiori . . . . I 31
— Osservazioni al Trattato d'Aritmetica di S. Bertrand . . I 85
— S. Pincherle, *Sopra una recensione agli Elementi di Aritmetica* I 120
— Sul Trattato di Aritmetica razionale del dott. C. M. Testi . II 2
— Oskar Schlömilch, *Elementi di Geometria* . . . . . II 18
— Sopra un metodo generale di costruzioni in geometria descrittiva II 96
— E. Sadun e C. Soschino, *Lezioni di aritmetica. Elementi della teoria dei numeri interi e frazionari* . . . . . II 191
— Giovanni Biasi, *Elementi di Aritmetica e Algebra, esposti con metodo sintetico* . . . . III 40
— Sulla raccolta di formule . . . . III 75
— Sulla teoria delle grandezze . . . . III 76
— I numeri negativi . . . . III 138
CAMPETTI A. — E. De Amicis, *Introduzione alla teoria matematica della propagazione del calore* . . . . . . I 159
CANONICA M. — Risoluzione della Questione IV . . . . . IV 46
CANTOR G. — Sui numeri transfiniti (Estratto d'una lettera a G. Vivanti) . . . . V 104
— Lettera a G. Peano . . . . V 108
— Contribuzione al fondamento della Teoria degli insiemi transfiniti . . . . V 129

Capelli A. — Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite . . . II 54
Castellano F. — H. Simon, *Costruzioni geometr. senza compasso* I 122
— Alcune applicazioni cinematiche nella teoria dei vettori. . II 19
— Soluzione della questione VII . . . . II 82
— Alcune proprietà delle accelerazioni d'ordine qualunque nel moto di una figura piana nel suo piano . . . . III 23
— M. Chini, *Esercizi di calcolo infinitesimale* . . . . III 181
Catalan E. — Lettera . . . . IV 125
Catania S. — Sul concetto di condizione a cui devono soddisfare gli elementi di una figura nella Geometria elementare . III 101
— Un'osservazione intorno alle formole per l'addizione degli archi nella Trigonometria del Serret . . . . . IV 43
— Sull'insegnamento della matematica nei Ginnasi e nei Licei . V 33
— Sulla risoluzione delle equazioni numeriche di terzo grado . V 81
Cesàro E. — Costruzioni baricentriche . . . . . . II 43
— Sulle curve di Bertrand . . . . II 153
— Su talune erronee « riflessioni » del prof. Arminio Nobile . III 128
— Sulla trattazione intrinseca delle questioni baricentriche . V 90
Cordone G. — Sopra una generalizzazione del teorema di Fermat V 25
Crotti ing. F. — *Corrispondenza*. . . . . II 176
D'Arcais F. — Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse . . . . . V 186
De Amicis E. — Questioni II e III . . . . I 126
— Dipendenza fra proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema . . . . II 113
— Sull'incommensurabilità, secondo il prof. Gambioli, e su certi libri di testo . . . . V 110
Del Re A. — Consider. nel gruppo delle similitudini sul piano reale II 99
— Sopra diverse proposizioni nella geometria proiettiva delle coniche e delle quadriche . . . . II 138
F. S. — Questione I . . . . I 102
Fano G. — Sull'insegnamento della matematica nelle Università tedesche e in particolare nell'Università di Gottinga . IV 170
— Sulla Parte IX del Formulario: Contributo alla teoria dei numeri algebrici . . . . V 1
Favaro A. — Sopra la parte fatta alla storia in un disegno di Bibliografia delle Matematiche . . . . I 72
Fellini D. — Le forme geometriche prospettive . . . . V 170
Garbasso A. — La teoria di Maxwell dell'elettricità e della luce III 149
Gerbaldi F. — Sulle equazioni differenziali lineari . . . I 125
Giudice F. — G. Petersen, *Teoria delle equazioni algebriche* I 103
— G. Lazzeri ed A. Bassani, *Elementi di Geometria* . . I 160
— Otto Hölder, *Ueber den Casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades* . . . . II 11
— Giulio Petersen, *Teoria delle equazioni algebriche* . . II 106

GIUDICE F. — Sulle equazioni algebriche . . . . . II 193
— S. Pincherle, *Algebra complementare* . . . . . III 118
— Sull equazione di 3° grado . . . . III 146
— G. Garbieri, *Teoria e applicazioni dei determinanti* . . III 183
— Ernesto Cesàro, *Corso di analisi algebrica con introduzione al calcolo infinitesimale* . . . . IV 25
— Sulla Parte VIII del Formulario . . . . IV 163
GIUDICE F. e PEANO G. — Domenico Amanzio, *Elementi di Algebra elementare* . . . . II 14
GREMIGNI G. — A proposito del postulato dell'equivalenza e di altre questioni geometriche . . . . III 64
— A difesa della seconda edizione degli « Elementi d'Euclide ». Altra risposta al prof. Lazzeri . . . . IV 17
GUIMARAES R. — G. De Longchamps, *Exposition de la théorie des intégrateurs* . . . . I 163
— Clément Thiry, *Distances des points remarquables du triangle* II 62
— C. A. Laisant et E. Perrin, *Premiers principes d'algèbre avec plus de 1200 exercices gradués* . . . . II 187
— Inversion cyclique des fonctions monogènes et holomorphes V 52
JADANZA N. — Questione IV . . . . I 153
— *Corrispondenza* . . . . III 15
— Per un nuovo libro di astronomia sferica . . . . . V 50
LAMPE E. — Soluzione della questione VII . . . . . . II 81
LAZZERI G. — M. Gremigni, *Gli elementi di Euclide* . . . II 188
— Sulla seconda edizione degli « Elementi di Euclide » . . III 121
LORIA G. — R. De Paolis, *Teoria di gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* I 105
— Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche I 185
— Aggiunte all'articolo « Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche » . . . . II 37
— Sulla teoria della curvatura delle superficie . . . . II 84
— *Pro veritate.* Risposta alle « Osservazioni » del prof. Pascal III 6
— Ancora sul teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche . . . . III 105
— Giulio Vivanti, *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica* . . . . IV 28
DON JUAN J. DURÀN LORIGA — Sobre los circolos radicales . V 173
MACCAFERRI E. — Sugli insiemi continui e sugli insiemi connessi IV 97
MAGGI G. A. — *Corrispondenza* . . . . III 60
MARTINETTI V. — Su un problema di geometria numerativa relativo alle congruenze lineari . . . . III 108
MEHMKE R. — Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie . . . II 65
— Ueber die Aenderung der Hauptkrümmungen einer Fläche bei einer beliebigen Berührungstransformation . . . II 159

Milesi L. — Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni . II 103
Mollame V. — Soluzione algebrica dell'equazione

$$0 = x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \ddots - \cfrac{1}{x}}}$$

. . . . . II 212
— Sviluppo del determinante e relazioni notevoli che ne derivano III 47
Morera G. — Osservazione relativa al resto nello sviluppo di Taylor . . . . II 36
Musso G. — Sulle permutazioni relative ad una data . . IV 109
Nagy A. — I teoremi funzionali nel calcolo logico . . . II 177
Newcomb S. — Pensiero matematico moderno, Conferenza (versione di O. Zanotti-Bianco) . . . . IV 121
Novarese E. — Sulla definizione della velocità di un punto . I 12
— Necrologia di Sofia Kowalevski . . . . I 21
Ovazza E. — X. Antomary, *Leçons de Cinématique et de Dynamique* III 63
P. ing. M. — Questione VII . . . . II 64
Pascal E. — Il Senatore Errico Betti . . . . II 151
— A proposito di un libro del prof. Gino Loria sulla Scuola Napolitana di Matematica nella prima metà del secolo . II 179
— Sugli insegnamenti di matematica superiore nelle Università italiane . . . . III 170
— Giuseppe Battaglini, Cenno necrologico . . . . . IV 91
— Un capitolo di calcolo differenziale . . . . . . V 37
Peano G. — Principii di Logica matematica . . . . . I 1
— Formole di Logica matematica . . . . I 24
— Sul concetto di numero. *Nota I* . . . . I 87
— Aggiunte e correzioni alle formule di Logica Matematica . I 182
— Sul concetto di numero. *Nota II* . . . . I 256
— Lettera aperta al prof. G. Veronese . . . . . . I 267
— Osservazioni sul « Traité d'Analyse par H. Laurent » . . II 31
— Esempi di funzioni sempre crescenti e discontinue in ogni intervallo . . . . II 41
— Questione VI . . . . II 42
— Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti II 58
— Sulla definizione del limite d'una funzione . . . . . II 77
— G. Veronese, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, ecc.* . . . . . . II 143
— Sullo stesso soggetto (Formule di quadratura) . . . III 17
— Sulla Parte V del Formulario: Teoria dei gruppi di punti . IV 33
— Sui fondamenti della Geometria . . . . IV 51
— Un precursore della Logica Matematica . . . . . . IV 120
— Hermann Grassmanns, *Gesammelte mathematische und physicalische Werke* . . . . IV 167

PEANO G. — F. Castellano, *Lezioni di Meccanica razionale* . V 11

— Dr G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet* . . . . V 122

P(EANO) — Sommario dei Libri VII, VIII e IX di Euclide . . I 10

— E. W. Hyde, *The directional Calculus, based upon the methods of H. Grassmann* . . . . I 17

— F. D'Arcais, *Corso di Calcolo infinitesimale* . . . . I 19

— S. Dickstein, *Pojecia i metody matematyky* . . . . I 124

— E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* . . I 164

— Il teorema fondamentale di trigonometria sferica . . . I 269

— Questioni non ancora risolte . . . . II 1

— Sommario del Libro X d'Euclide . . . . II 7

— Sopra un massimo . . . . II 36

— Albino Nagy, *Lo stato attuale ed i progressi della logica* . II 80

— N. Jadanza, *Una difesa delle formole di Simpson, ed alcune formole di quadratura poco note* . . . . . . III 137

— E. Carvallo, *Sur les forces centrales* . . . . . . III 137

— A. Ziwet, *An elementary treatise on theoretical mechanics* III 184

— *Varietà:* Il principio delle aree e la storia di un gatto . V 31

— Elenco bibliografico sull'*Ausdehnungslehre* di H. Grassmann . V 179

PIERI M. — Sui sistemi lineari di coni . . . . III 44

— G. Lazzeri, *Trattato di Geometria analitica* . . . . III 115

— Trasformazione di ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli . . . . IV 40

PINCHERLE S. — Considerazioni geometriche sul numero delle radici reali di un'equazione algebrica . . . . . . III 54

PIRONDINI G. — Contatto e ortogonalità di due elicoidi . . II 127

— Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio . . III 27

PORTA F. — Sulle equazioni di Lagrange per il moto di un punto III 18

ROSSOTTI M. A. — Questione V . . . . II 34

SADUN E. — Intorno ad alcune identità algebriche . . . IV 189

— Intorno al alcune identità algebriche . . . . . . V 19

SBRANA S. — Risoluzione della Questione I . . . . , . I 170

— Deduzione del postulato del segmento da quello dell'angolo . III 179

— Sulla definizione d'equivalenza in Geometria . . . . IV 147

SEGRE C. — Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche I 42

SFORZA G., ROZZOLINO G. — A proposito di un recente articolo del sig. F. Giudice . , ... II 150

STEPHANOS — La géométrie des masses . . . . . . IV 15

STOLZ O. — Zum infinitärcalcul . . . . V 166

TESTI G. M. — Sulla definizione di velocità di un punto . . I 78

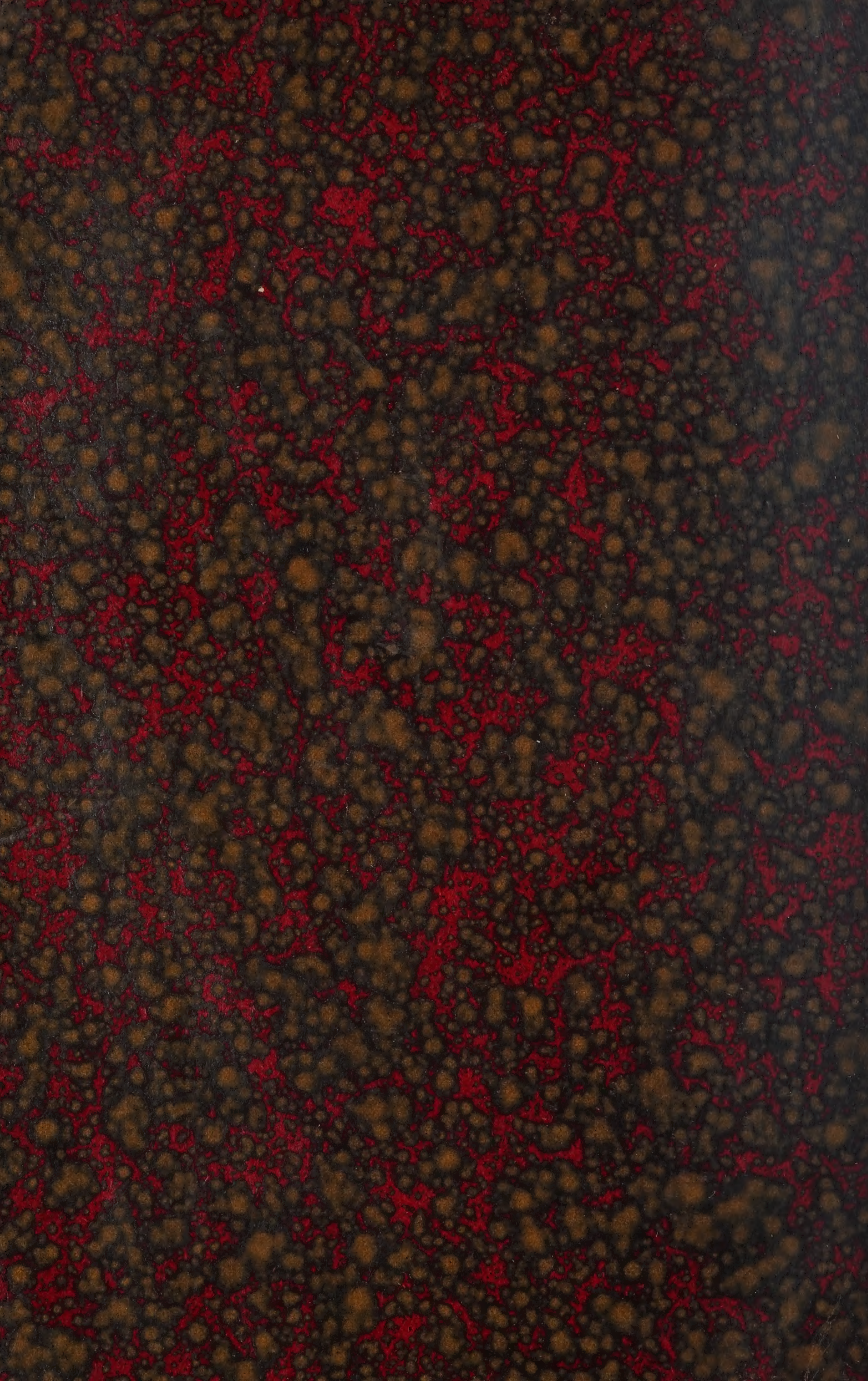
— J.-F. Bonnel, *Essai de géométrie rationnelle* . . . . II 108

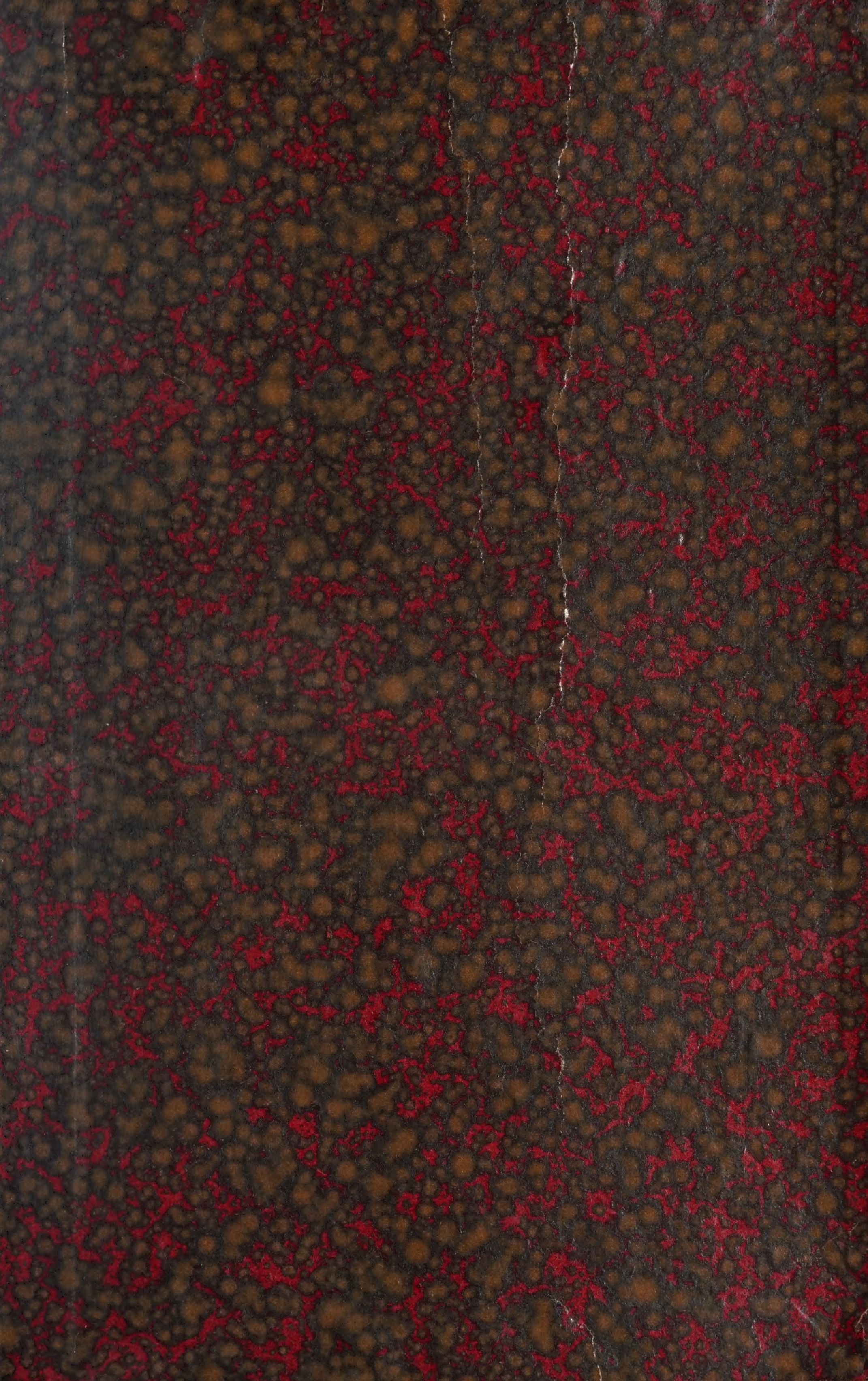
VAILATI G. — Un teorema di logica matematica . . . . I 103

— Le proprietà fondamentali delle operazioni della Logica deduttiva . . . . I 127

— Sui principî fondamentali della geometria della retta . . II 71

Vailati G. — Dipendenza fra le proprietà delle relazioni . . II 161
— A. Nagy, *Principî di logica esposti secondo le teorie moderne* III 62
— Catalogue of the University of Texas for 1893-94 . . . IV 106
— C. Burali-Forti, *Logica matematica* . . . . IV 143
— Sulle relazioni di posizione fra punti d'una linea chiusa . V 75
— Sulle proprietà caratteristiche delle varietà a una dimensione V 183
Valle G. — Charles Henry, *Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques* . . . . V 79
Vivanti G. — Sulla teoria delle probabilità. Lettera aperta al prof. Ernesto Cesàro . . . . I 69
— Sull'infinitesimo attuale . . . . I 135
— Ancora sull'infinitesimo attuale . . . . I 248
— Sopra una questione elementare della teoria degli aggregati di G. Cantor (traduzione) . . . . II 165
— Sull'uso della rappresentazione geometrica nella teoria aritmetica dei numeri complessi . . . . II 167
— Sulle serie di potenze . . . . III 111
— Lista bibliografica della teoria degli aggregati . . . III 189
— Sulla Parte VI del Formulario . . . . IV 135
— Prof. A. Sterza, *Aritmetica razionale per il Ginnasio superiore* IV 141
— Sopra una questione elementare del giuoco del bigliardo . V 87
— F Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert* . . . . V 164
Volterra V. — Esercizi di fisica matematica . . . . . IV 1
Zanotti-Bianco O. — N. Jadanza, *Guida al calcolo delle coordinate* geodetiche . . . . I 270
— Sulla scoperta del potenziale . . . . III 56
— Sulla scoperta del potenziale . . . . III 114
— Rettificazione di alcune inavvertenze in un moderno trattato di geodesia . . . . , . III 133
— A proposito della nota « Rettificazione di alcune inavvertenze in un moderno trattato di geodesia » . . . . . . IV 21
Zignago I. — Appunti di Aritmetica . . . . IV 151
La Redazione — Enrico Novarese . . . . II 35
— Sopra una raccolta di formule (*Supplem. al fascic. di marzo*) II
— Sopra la raccolta di formule di matematica . . . . . II 76
— Sulla raccolta di formule . . . . III 1
Corrispondenza . . . . I 154
Formule di matematica (*Supplemento al fascicolo di aprile*) . II
Sul formulario di matematica . . . . III 185
Association française pour l'avancement des Sciences - Congrès de Caen 1894 . . . . IV 159
Association internationale pour l'avancement des Quaternions et d'autres méthodes vectorielles . . . . V 168






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5REV C001
RIVISTA DI MATEMATICA TORINO
3-5 1893-95
3 0112 016839539